ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE







PAA
Annalen



ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.





ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND IX.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT FÜNFUNDVIERZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST DREI FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1880.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.



Inhalt.

Neue Folge. Band IX.

Erstes Heft.

Geschlossen am 15. December 1879.

Zweites Heft.

Geschlossen am 15. Februar 1880.

Drittes Heft.

Viertes Heft.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. Mach und Doubrava, Fig. 1—4. — Herwig, Fig. 5. — von Waltenhofen, Fig. 6—7. — Lommel, Fig. 8—13. Schönemann, Fig. 14—15. — Giese, Fig. 16.

Taf. II. Clausius, Fig. 1—2. Schaper, Fig. 3—5. — Schönn, Fig. 6. — Dvořák, Fig. 7—12. — Long, Fig. 13—15.

Taf. III. Dorn, A. Fig. 1—2. — Hoorweg, B. Fig. 1—17.

1880. ANNALEN № 1.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND IX.

I. *Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme; von G. Kirchhoff und G. Hansemann.*

(Der Akademie der Wissensch. zu Berlin vorgelegt am 20. Nov. 1879.)

Es soll im Folgenden eine neue Methode auseinander gesetzt werden, die wir angewandt haben, um die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme, oder vielmehr das Verhältniss dieser Leitungsfähigkeit zu dem Producte aus specifischer Wärme und Dichtigkeit zu bestimmen. Die Resultate der Messungen dieser Grösse, die bisher ausgeführt sind, zeigen grosse Unterschiede; der Grund hiervon kann unserer Meinung nach darin liegen, dass bei den meisten derselben die Wärmemengen, die der dem Versuche unterworfene Körper nach aussen hin abgab oder von aussen aufnahm, nicht in genügender Weise in Rechnung gezogen sind; mit Hülfe des Begriffs der äussern Wärmeleitungsfähigkeit, der zu diesem Zwecke eingeführt worden ist, kann derselbe nur unvollkommen erreicht werden. Die Ueberlegenheit der neueren, namentlich der von F. Neumann angegebenen Methoden über die älteren beruht vorzugsweise darauf, dass bei ihnen die Ableitung der Wärme nach aussen von geringerem Einfluss auf den Werth ist, der sich für die zu bestimmende Grösse ergibt. Immerhin findet aber auch bei ihnen ein solcher Einfluss in erheblichem Maasse statt. Bei der Methode, die wir angewandt haben, glauben wir diesen Einfluss noch weiter herabgedrückt zu haben, und dadurch zu einem zuverlässigern Werthe geführt zu sein, als die bisher gewonnenen sind.

Der ideale Fall, den wir bei unseren Versuchen näherungsweise zu verwirklichen gesucht haben, ist dieser: Das leitende Medium ist nur durch eine Ebene begrenzt und hat bis zu einem gewissen Augenblick überall dieselbe Temperatur; in diesem Augenblick wird in der Grenzfläche eine andere constante Temperatur erzeugt. Kennt man die Aenderung, welche die Temperatur in einem bestimmten Abstande von der Grenzfläche nach einem bestimmten Zeitraume erfahren hat, so kann man aus dem Verhältniss dieser zur Temperaturänderung in der Grenzfläche den Quotienten aus dem Producte der specifischen Wärme und der Dichtigkeit in die Leitungsfähigkeit des Mediums nach einer bekannten einfachen Formel berechnen.

Wir benutzten eine Eisenmasse von der Gestalt eines Würfels von 140 mm Seite; eine Kante war vertical gestellt, und gegen eine Seitenfläche wurde, nachdem der Würfel längere Zeit sich selbst überlassen worden war, aus einer Brause ein kräftiger Wasserstrom geleitet, der um einige Grade wärmer oder kälter war als der Beobachtungsraum. Es war dafür gesorgt, dass die Temperatur in einigen Punkten der geraden Linie, die in der Mitte der bespritzten Seitenfläche senkrecht auf dieser steht, gemessen werden konnte; zu jedem dieser Punkte führt nämlich ein verticaler, enger Canal, dazu bestimmt, die eine Löthstelle einer aus dünnen Drähten von Neusilber und Kupfer gebildeten Thermokette aufzunehmen, deren andere Löthstelle in einer constanten Temperatur sich befand, und die mit einem Spiegelgalvanometer verbunden werden konnte. Es war nöthig, an der Scala des Galvanometers Ablesungen zu machen, während der Magnet desselben in lebhafter Bewegung war; das wurde ermöglicht durch einen Chronographen, mit dessen Hülfe der Beobachter die Zeitpunkte markirte, in denen der Verticalfaden des Fernrohrs durch gewisse Theilstriche ging, deren Zahlen er gleichzeitig einem Gehülfen dictirte.

Mannichfaltige Betrachtungen waren nöthig, um die Verschiedenheiten zwischen der hergestellten Anordnung

und dem vorher bezeichneten idealen Falle zu berücksichtigen.

Es war zunächst der Einfluss zu untersuchen, den die Seitenflächen und die Hinterfläche des Würfels auf die Bewegung der Wärme in ihm ausübt. Dieser nur unbedeutende Einfluss lässt sich mit der nöthigen Genauigkeit berechnen, wenn man auch nur rohe Näherungswerthe für die innere und die äussere Leitungsfähigkeit des Eisenwürfels zu Hülfe zieht.

Näherungsweise wird die Temperatur der bespritzten Vorderfläche des Würfels eine constante sein; doch hielten wir es für geboten, uns von der Voraussetzung dieser Constanz unabhängig zu machen. Wir erreichten das, indem wir bei jedem Versuch eine fortlaufende Beobachtungsreihe über die Temperatur in einem Punkte anstellten, der nur 5,46 mm von der Vorderfläche entfernt ist, eine Beobachtungsreihe, die fast bis zu dem Zeitpunkte fortgesetzt wurde, in dem die Temperatur in einem entferntern Punkte beobachtet werden musste. Es dienten hierbei zwei ganz gleiche Thermoketten, von denen zuerst die eine, dann die andere mit dem Galvanometer in Verbindung gesetzt war. Diese Methode gewährt noch einen andern Nutzen. Durch die Galvanometerbeobachtungen kann nur ermittelt werden die Temperatur der in den Canal des Würfels eingesenkten Löthstelle der Thermokette, während in den aus der Theorie der Wärmeleitung entwickelten Gleichungen die Temperatur vorkommt, welche am Orte der Mitte des Bodens des Canals zur selben Zeit stattfinden würde, wenn der Canal und die Thermokette gar nicht vorhanden wären. Diese beiden Temperaturen sind, genau genommen, nicht dieselben. Der Fehler, den man begeht, indem man die eine für die andere setzt, verliert, wie zu zeigen versucht werden soll, seinen Einfluss bei der genannten Versuchsmethode.

Aus den Galvanometerbeobachtungen ist zunächst auf die electromotorische Kraft der benutzten Thermokette und aus dieser auf die Temperatur der eingesenkten Löth-

stelle zu schliessen. Misst man die Ablenkung der Gleichgewichtslage der Galvanometernadel durch Ströme von verschiedener Intensität, so ist bei unserm Instrumente diese Intensität, also bei gleichbleibendem Widerstande auch die electromotorische Kraft, proportional mit der der Ablenkung entsprechenden Zahl von Scalentheilen; eine Abweichung von dieser Proportionalität haben wir bei unserm Galvanometer nicht auffinden können. Will man die electromotorische Kraft aus Beobachtungen bestimmen, bei denen die Galvanometernadel in Bewegung ist, so muss man zur Differentialgleichung der Bewegung der Nadel zurückgehen und es müssen die in dieser vorkommenden Constanten durch vorgängige Versuche bestimmt sein. Zu diesen Constanten gehört die Schwingungsdauer und die Dämpfung. Wir fanden es nöthig, noch eine Constante einzuführen und zu bestimmen. Die Nadel unseres Galvanometers bestand aus einem nahe astatischen System, und ein nicht unerheblicher Theil der Richtkraft rührte von dem Aufhängungsfaden her; die elastische Nachwirkung dieses machte sich bei den Beobachtungen in sehr deutlicher Weise geltend. Mit befriedigendem Erfolge haben wir versucht, den Einfluss der elastischen Nachwirkung zu berücksichtigen und unschädlich zu machen mit Hülfe der von Hrn. Boltzmann aufgestellten Theorie derselben. Es führt diese eine neue Constante ein, die durch vorläufige Versuche bestimmt werden musste.

Die electromotorische Kraft einer Thermokette bei einer Temperaturdifferenz der Löthstellen von wenigen Graden pflegt als proportional mit dieser Temperaturdifferenz angenommen zu werden. Die Beziehungen, welche Hr. Avenarius bei einigen Thermoketten zwischen der electromotorischen Kraft und den Temperaturen ihrer Löthstellen gefunden hat, zeigten uns aber, dass die Annahme jener Proportionalität bei unseren Messungen einen nicht zu vernachlässigenden Fehler herbeiführen konnte. Wir haben daher die Form des Avenarius'schen Gesetzes für

unsere Thermoketten als gültig angenommen und die darin vorkommenden Constanten durch besondere Versuche bestimmt, bei denen die Temperaturen mit Hülfe eines Jolly'schen Luftthermometers gemessen wurden. Nach der so hergeleiteten Gleichung haben wir dann bei den Wärmeleitungsversuchen die Temperaturdifferenz der Löthstellen der Thermoketten aus ihrer electromotorischen Kraft berechnet.

Bei diesem kurzen Bericht über den Gang unserer Untersuchung ist ein Punkt noch zu erwähnen. Wir haben bei derselben, wie es bei ähnlichen Untersuchungen zu geschehen pflegt, zunächst angenommen, dass die Leitungsfähigkeit und das Product aus specifischer Wärme und Dichtigkeit von der Temperatur unabhängig sind, während thatsächlich diese beiden Grössen mit der Temperatur sich ändern. Bei Rücksicht hierauf muss man die Frage stellen, für welche Temperatur der Werth der Leitungsfähigkeit (und der Werth des Verhältnisses dieser zu dem Product aus specifischer Wärme und Dichtigkeit) gilt, der ohne diese Rücksicht aus den Beobachtungen berechnet ist. Bei der von uns gewählten Methode lässt sich diese Frage beantworten, wenn man annimmt, dass jene beiden Grössen innerhalb des in Betracht kommenden Temperaturintervalls lineare Functionen der Temperatur sind und sich nur wenig ändern. Mit Hülfe der Gleichung, die sich hierbei ergibt, und bei Benutzung einer Angabe von Bède über die specifische Wärme des Eisens bei verschiedenen Temperaturen haben wir aus unseren Beobachtungen abgeleitet, dass die Leitungsfähigkeit des Eisens, dividirt durch das Product aus seiner specifischen Wärme und seiner Dichtigkeit, bei der Temperatur ϑ

$$= 16{,}94 - 0{,}034\,(\vartheta - 15)$$

ist, wenn die Temperatur nach Celsius'schen Graden gemessen wird, und die Einheiten der Zeit und der Länge Secunde und Millimeter sind. Dabei muss aber bemerkt werden, dass dem Coëfficienten von ϑ nur eine geringe

Sicherheit zukommt, da bei unseren Versuchen die Temperatur nur in engen Grenzen sich bewegte.

Von den Ergebnissen früherer Messungen stimmt mit dem unsrigen am besten das von H. Weber[1]) gefundene überein, nach dem jene Grösse bei der Temperatur von 39° C. = 16,97 ist. Grössere Abweichungen zeigen die Resultate von F. Neumann, Ångström und Forbes, soweit sie mit dem unsrigen verglichen werden können. Ob verschiedene Eisensorten bedeutende Unterschiede der in Rede stehenden Grösse darbieten, müssen spätere Untersuchungen zeigen. Um das von uns benutzte Eisen einigermassen zu charakterisiren, möge angeführt werden, dass es aus den Eisenwerken der Dortmunder Union herrührender Puddelstahl ist, und dass die chemische Analyse in ihm ergeben hat:

0,129 Procent Kohle
und 0,080 „ Silicium.

Ist u die Temperatur eines Körpers im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, c das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit, k die Leitungsfähigkeit, so ist:

$$(1) \qquad c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z},$$

oder, wenn man:

$$\frac{k}{c} = a$$

setzt und c und k als constant annimmt:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Es bilde der Körper einen Würfel, dessen Kanten die Länge l haben, und die Gleichungen seiner Seitenflächen seien:

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0 \qquad x = l \quad y = l \quad z = l.$$

1) Weber, Pogg. Ann. **146.** p. 257. 1872.

Es sei ferner bis zum Augenblick $t = 0$ überall $u = 0$, und von diesem Augenblick an $u = 1$ in der Fläche $z = 0$, während die fünf anderen Seitenflächen ihre Wärme gegen eine Umgebung von der Temperatur Null ausstrahlen. Neben der partiellen Differentialgleichung (2) hat dann u die Bedingungen zu erfüllen, dass:

$$\text{für } t = 0 \qquad u = 0$$

$$(3)\quad \begin{cases} \text{für } x = 0 \;\; \frac{\partial u}{\partial x} = hu, & \text{für } x = l \;\; \frac{\partial u}{\partial x} = -hu, \\ \;\;\text{"}\;\; y = 0 \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = hu, & \;\;\text{"}\;\; y = l \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -hu, \\ \;\;\text{"}\;\; z = 0 \;\; u = 1, & \;\;\text{"}\;\; z = l \;\; \frac{\partial u}{\partial z} = -hu \end{cases}$$

ist, wo h eine Constante, nämlich das Verhältniss der äussern zur innern Leitungsfähigkeit bedeutet. Die Aufgabe, diesen Forderungen gemäss u zu bestimmen, lässt nur eine Lösung zu; man kann diese finden, indem man u gleich einer Reihe setzt, die nach aufsteigenden Potenzen von h fortschreitet. Für den vorliegenden Zweck ist es ausreichend, die beiden ersten Glieder dieser Reihe zu ermitteln. Demnach setze man:

$$(4)\qquad u = U_0 + h U_1 .$$

Die Forderungen, die dann für U_0 sich ergeben, erfüllt man, indem man U_0 als eine Function der beiden Variabeln z und t annimmt, die der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

und den Bedingungen genügt, dass:

$$\text{für } t = 0, \qquad U_0 = 0$$

$$\text{für } z = 0 \quad U_0 = 1, \qquad \text{für } z = l \quad \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0$$

ist. Man setze:

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx .$$

Diese Function spielt bei den hier auszuführenden Rechnungen eine grosse Rolle; wir haben bei diesen die von Kramp für sie berechnete Tabelle benutzt.

Es hat $U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$ die Eigenschaft, dass:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{und} \quad \text{für } t=0 \quad U=0,$$

$$\text{für } z=0 \quad U=1, \qquad \text{für } z=\infty \quad U=0$$

ist. Daraus folgt:

$$(5) \quad \begin{cases} U_0 = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{2l-z}{2\sqrt{at}}\right) - U\left(\frac{4l-z}{2\sqrt{at}}\right) + . \\ \qquad - U\left(\frac{2l+z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{4l+z}{2\sqrt{at}}\right) - ., \end{cases}$$

oder, wie wir schreiben wollen:

$$U_0 = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R.$$

Es war nöthig, das hierdurch definirte R für gewisse Werthe der darin vorkommenden Argumente zu berechnen. Indem wir Millimeter und Secunde zu Einheiten der Länge und der Zeit nahmen, konnten wir als Näherungswerth von a 16,5 wählen; l hatten wir $= 140$ zu setzen. Der kleinste Werth von z, der in Betracht kam, war 5,46; für ihn und alle Werthe von t, die ins Auge zu fassen waren, ergab sich R verschwindend klein; ferner fand sich:

für $z = 44{,}65$	$t = 145$	$R = 0{,}00067$
„ $= 44{,}65$	$= 175$	$= 0{,}00192$
„ $= 71{,}26$	$= 145$	$= 0{,}00254$

Zur Bestimmung von U_1 hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\right),$$

$$\text{für } t=0 \quad U_1 = 0,$$

$$\text{für } x=0 \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = U_0, \qquad \text{für } x=l \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = -U_0,$$

$$„ \quad y=0 \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = U_0, \qquad „ \quad y=l \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = -U_0,$$

$$\text{für } z=0 \quad U_1 = 0, \qquad z = l \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = -U_0.$$

Um ihnen zu genügen, setze man:

$$U_1 = U_x + U_y + U_z,$$

wo U_x eine Function von x, z, t, U_y eine Function von y, z, t und U_z eine Function von z, t sein soll; jede dieser Functionen soll die für U_1 aufgestellte partielle Differentialgleichung erfüllen und sowohl für $t=0$ als für $z=0$ verschwinden. Ueberdies muss dann sein:

$$\text{für } x=0 \quad \frac{\partial Ux}{\partial x} = U_0, \qquad \text{für } x=l \quad \frac{\partial Ux}{\partial x} = -U_0,$$

$$z=l \quad \frac{\partial Ux}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } y=0 \quad \frac{\partial Uy}{\partial y} = U_0, \qquad \text{für } y=l \quad \frac{\partial Uy}{\partial y} = -U_0,$$

$$z=l \quad \frac{\partial Uy}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } z=l \quad \frac{\partial Uz}{\partial z} = -U_0.$$

Um U_x zu finden, muss man zunächst eine Function von x, z, t, die V genannt werden möge, ermitteln, für welche:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

$$\text{für } t=0 \quad V=0,$$

$$\text{für} \quad x=0 \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f(z,t), \quad \text{für } x=\infty \quad V=0,$$

$$\text{„} \quad z=0 \quad V=0, \qquad \text{„} \quad z=\infty \quad V=0$$

ist, wo $f(z,t)$ eine gegebene Function von z und t bedeutet, die für $z=\infty$ verschwindet. Die folgende Erwägung lehrt dieses V kennen. Es ist:

$$\frac{1}{t}\, e^{-\frac{x^2+z^2}{4at}}$$

eine Lösung der in Rede stehenden partiellen Differentialgleichung; eine allgemeinere erhält man, wenn man hier $t-t'$ für t, $z-z'$ oder $z+z'$ für z setzt, den Ausdruck, der dadurch entsteht, mit einer willkürlichen Function von z' und t' mal $dz'dt'$ multiplicirt und zwischen constanten

Grenzen nach z' und t' integrirt. Der Differentialgleichung wird daher auch genügt durch:

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^\infty dt'\,dz' f(z',t')\frac{1}{t-t'}\left(e^{-\frac{x^2+(z-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2+(z+z')^2}{4a(t-t')}}\right),$$

da der Theil von $\frac{\partial V}{\partial t}$, der infolge davon auftritt, dass die obere Grenze der Integration nach t' nicht constant, sondern t ist, verschwindet. Dieses V erfüllt zugleich die Bedingungen, die für $t = 0$, $z = 0$, $x = \infty$ und $z = \infty$ aufgestellt sind; es genügt auch der für $x = 0$ geltenden Bedingung, wie die folgende Betrachtung zeigt. Es ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4a\pi}\int_0^t\int_0^\infty dt'\,dz' f(z',t')\frac{x}{(t-t')^2}\left(e^{-\frac{x^2+(z-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2+(z+z')^2}{4a(t-t')}}\right).$$

Wenn x verschwindet, so wird der unter den Integralzeichen stehende Ausdruck gleich Null, es sei denn, dass zugleich $t - t'$ und $z - z'$ verschwinden; für ein unendlich kleines x ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z,t)}{4a\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dt\,dz}{t^2}e^{-\frac{x^2+z^2}{4at}},$$

oder wenn man die Integration nach z ausführt, indem man benutzt, dass

$$\int_0^\infty dz\,e^{-\alpha^2 z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z,t)}{2\sqrt{a\pi}}\int_0^\infty\frac{x\,dt}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4at}}.$$

Führt man hier an Stelle der Integrationsvariabeln t eine neue durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = s$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z,t)}{\sqrt{a\pi}}\int_0^\infty x\,ds\,e^{-\frac{x^2}{4a}s^2} = f(z,t),$$ wie zu beweisen war.

Nun setze man:

$$f(z, t) = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right),$$

führe statt des Zeichens V das Zeichen $V(x)$ ein, sodass:

$$(6) \quad V(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^\infty dt'\,dz'\,U\left(\frac{z'}{2\sqrt{at'}}\right)\frac{1}{t-t'}\left(e^{-\frac{x^2+(z-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2+(z+z')^2}{4a(t-t')}}\right),$$

und mache:

$$(7) \quad \begin{aligned} W = W(z) = V(x) + V(l-x) + V(2l-x) + V(3l-x) + . \\ + V(l+x) + V(2l+x) + V(3l+x) + . \end{aligned}$$

Dieses W genügt dann der Differentialgleichung, der U_x genügen soll, und es ist:

$$\text{für } t = 0 \quad W = 0$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial x} = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right), \quad \text{für } x = l \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right),$$

$$\text{„} \quad z = 0 \quad W = 0 \quad , \quad \text{„} \quad z = \infty \quad W = 0.$$

Bei Rücksicht auf die Gleichung (5) folgt hieraus, dass alle Forderungen, die U_x erfüllen soll, erfüllt werden durch:

$$\begin{aligned} U_x = W(z) + W(2l-z) - W(4l-z) + . \\ - W(2l+z) + W(4l+z) - . \end{aligned}$$

Aus U_x erhält man U_y, indem man y an die Stelle von x setzt.

Um U_z zu erhalten, muss man zunächst eine Function von z und t, die Z oder auch $Z(z)$ genannt werden möge, aufsuchen, die die Bedingungen erfüllt:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}, \qquad \text{für } t = 0 \quad Z = 0,$$

$$\text{für } z = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = f(t), \quad \text{für } z = \infty \quad Z = 0,$$

wo $f(t)$ eine gegebene Function von t bedeutet. Es geschieht das, wenn:

$$Z = -\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^t dt'\,f(t')\,\frac{1}{\sqrt{t-t'}}\,e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}}$$

gesetzt wird. Der Differentialgleichung wird nämlich genügt, da:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{z^2}{4at}}$$

eine Lösung derselben ist; es verschwindet Z für $t=0$ und für $z=\infty$; endlich ist:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t dt' f(t') \frac{z}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}};$$

der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck verschwindet für $z=0$, wenn nicht zugleich $t-t'=0$ ist; daher ist für ein unendlich kleines z:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{f(t)}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \frac{z\,dt}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4at}} = f(t).$$

Nun bezeichne man den in der Gleichung (5) gleich U_0 gesetzten Ausdruck durch:

$$U_0(z, t),$$

mache:

$$f(t) = U_0(l, t),$$

sodass:

$$Z(z) = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t U_0(l, t') \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}}$$

wird; es ist dann:

$$U_z = Z(l-z) - Z(3l-z) + Z(5l-z) - .$$
$$- Z(l+z) + Z(3l+z) - Z(5l+z) + .$$

Numerische Rechnungen waren nur auszuführen für $x=\frac{l}{2}$ und $y=\frac{l}{2}$; für diese Werthe von x und y ist:

$$U_x = U_y, \qquad \text{also:} \qquad U_1 = 2U_x + U_z,$$

und es vereinfacht sich die Gleichung (7) in:

$$W(z) = 2\left(V\left(\frac{l}{2}\right) + V\left(\frac{3l}{2}\right) + V\left(\frac{5l}{2}\right) + \cdots\right).$$

Bei den Werthsystemen von z und t, die in Betracht zu ziehen waren, war U_z ganz zu vernachlässigen, und es

reichte in jeder der für U_x und $W(z)$ aufgestellten Reihen die Berücksichtigung des ersten Gliedes aus, sodass:

$$U_1 = 4\,V\left(\frac{l}{2}\right)$$

gesetzt werden konnte, wo $V\left(\frac{l}{2}\right)$ aus (6) zu ermitteln war. Führt man hier an Stelle von z' die neue Integrationsvariable s' durch die Gleichung:

$$z' = 2\sqrt{at'}\,s'$$

ein und setzt zugleich:

$$z = 2\sqrt{at'}\,s,$$

so hat man also:

$$U_1 = -\frac{4\sqrt{a}}{\pi}\int_0^t dt'\,\frac{\sqrt{t'}}{t-t'}\,e^{-\frac{l^2}{16a(t-t')}}$$

$$\int_0^\infty ds'\,U(s')\left(e^{-(s-s')^2\frac{t'}{t-t'}} - e^{-(s+s')^2\frac{t'}{t-t'}}\right).$$

Dieses Doppelintegral ist für die Werthe von z und t, für die seine Kenntniss nöthig war, durch mechanische Quadratur mit Hülfe graphischer Darstellung berechnet. Für $z = 5{,}46$ mm und alle Werthe von t, die in Betracht kamen, konnte es gleich Null gesetzt werden, und es ergab sich:

für $z = 44{,}65$	$t = 145$	$U_1 = -5{,}21$
$= 44{,}65$	$= 175$	$= -7{,}77$
$= 71{,}26$	$= 145$	$= -5{,}62.$

Um hiernach der Gleichung (4) gemäss u berechnen zu können, mussten wir noch die Grösse h bestimmen. Es möge hier die Beschreibung der Versuche, durch welche das geschehen ist, angeschlossen werden.

Es war der Würfel in seiner ganzen Masse nahezu gleichmässig über die Temperatur seiner Umgebung erwärmt. Die eine Löthstelle einer mit dem Galvanometer verbundenen Thermokette war in der Nähe desselben, vor seiner Strahlung geschützt, aufgestellt, die andere in einen

Canal des Würfels, der in seinem Mittelpunkte endigte, eingeführt. Ist v der Ueberschuss der Temperatur im Punkte (x, y, z) zur Zeit t über die Temperatur der Umgebung, so ist:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\begin{array}{llll} \text{und für } x = 0 & \frac{\partial v}{\partial x} = hv, & \text{für } x = l & \frac{\partial v}{\partial x} = -hv \\ \quad\;\; " \quad y = 0 & \frac{\partial v}{\partial y} = hv, & \quad " \quad y = l & \frac{\partial v}{\partial y} = -hv \\ \quad\;\; " \quad z = 0 & \frac{\partial v}{\partial z} = hv, & \quad " \quad z = l & \frac{\partial v}{\partial z} = -hv. \end{array}$$

Ist t so gross, dass von der Reihe, durch welche v sich darstellen lässt, wenn noch der Anfangszustand als gegeben betrachtet wird, nur das erste Glied berücksichtigt zu werden braucht, so ist hiernach:

$$v = \text{const.}\, e^{-3\lambda^2 a t}\left(\cos\lambda x + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda x\right)\left(\cos\lambda y + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda y\right)\left(\cos\lambda z + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda\right.$$

wo λ die keinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\lambda l}{2} = \frac{h}{\lambda}$$

bedeutet. Für beliebige feste Werthe von x, y, z ist daher:

$$\text{(9)} \qquad v = \text{const.}\, e^{-3\lambda^2 a t};$$

für den Mittelpunkt des Würfels, d. h. für den Punkt $x = y = z = \frac{l}{2}$, gilt diese Gleichung schon bei kleineren Werthen von t, als für andere Punkte, da für ihn die Coëfficienten der drei Glieder, welche in jener Reihe auf das erste folgen, verschwinden.

Da bei der Bestimmung von h eine geringe Genauigkeit ausreicht, so konnte die Galvanometerablenkung in einem Augenblick unmittelbar als Maass für den entsprechenden Werth von v dienen. War beobachtet, wie die Ablenkung mit der Zeit abnahm, so konnte mit Hülfe des schon benutzten Näherungswerthes von a aus (9) λ, und dann aus (8) h gefunden werden.

Bei einem Versuche dieser Art sank die Galvanometerablenkung in der Zeit von 165 Minuten von 361,3 Scalentheilen auf 187,0; und zwar so, dass in gleichen Zeitintervallen der Logarithmus der Ablenkung sehr nahe um gleich viel abnahm; setzt man wieder $a = 16{,}5$, so folgt hieraus $\lambda = 0{,}00116$, und weiter, da $l = 140$, $h = 0{,}000\,094\,3$.

Daraus ergibt sich:

für $z = 44{,}65$,	$t = 145$,	$R + \hbar U_1 = 0{,}00018$
$= 44{,}65$,	$= 175$,	$= 0{,}00118$
$= 71{,}26$,	$= 145$,	$= 0{,}00201$

Die im vorigen Abschnitt untersuchte, durch die Gleichungen (2) und (3) definirte Funktion u von den Argumenten x, y, z, t möge nun durch $u(t)$ bezeichnet werden. Setzt man:

$$v = \int_0^t f(t')\, dt' \frac{\partial u(t-t')}{\partial t}, \tag{10}$$

wo $f(t)$ eine beliebige Function von t bedeutet, so ist dann

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\text{für } t = 0 \quad v = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = hv, \quad \text{für } x = l \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -hv,$$

$$\text{„} \quad y = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = hv, \quad \text{„} \quad y = l \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -hv,$$

$$\text{„} \quad z = 0 \quad v = f(t), \quad \text{„} \quad z = l \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -hv.$$

Um einzusehen, dass der partiellen Differentialgleichung genügt wird, hat man zu beachten, dass $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwindet, da für diesen Werth von t:

$$u = 0, \text{ also auch } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist; und um zu beweisen, dass $v = f(t)$ für $z = 0$ ist, ist zu benutzen, dass das Integral:

$$\int \frac{\partial u(t)}{\partial t} dt,$$

genommen von $t = 0$ bis zu irgend einem positiven Werthe von t, für einen unendlich kleinen Werth von z gleich 1 ist.

Nun soll in Beziehung auf $f(t)$ die Annahme gemacht werden, dass:

$$f(t) = C + \varphi(t)$$

ist, wo C eine Constante bedeutet und $\varphi(t)$ als unendlich klein betrachtet werden darf. Nach der im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnung hat man:

$$u(t) = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h\,U_1;$$

auch das Glied $R + h\,U_1$ soll als unendlich klein angesehen werden. Substituirt man diese Werthe von $f(t)$ und $u(t)$ in die Gleichung (10), so erhält man bei Vernachlässigung einer kleinen Grösse höherer Ordnung:

$$(11)\quad v = C\left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h\,U_1\right) + \int_0^t \varphi(t')\,dt'\,\frac{\partial U\left(\frac{z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}.$$

Es möge der Werth von z für den vordersten Canal, also 5,46 mm, durch z_0, und der Werth von v für $x = \frac{l}{2}$, $y = \frac{l}{2}$, $z = z_0$ durch v_0 bezeichnet werden. Für diese Werthe von x, y, z ist, wie erwähnt, $R + h\,U_1$ als verschwindend zu betrachten; man hat daher:

$$v_0 = C\,U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \int_0^t \varphi(t')\,dt'\,\frac{\left(\partial\,U\frac{z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}.$$

Diese Gleichung schreibe man:

$$(12)\qquad v_0 = C\,U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \psi(t),$$

indem man:

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t')\,dt'\,\frac{\partial\,U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}$$

setzt. Bei der hierdurch gegebenen Definition von $\psi(t)$ ist aber:

$$\int_0^t \varphi(t')\,dt'\,\frac{\partial U\left(\frac{z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t} = \int_0^t \psi(t')\,dt'\,\frac{\partial U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t};$$

denn, bezeichnet man die eine oder die andere Seite dieser Gleichung durch V, so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad \text{für } t = 0 \quad V = 0,$$

$$\text{für } z = z_0 \quad V = \psi(t), \qquad \text{für } z = \infty \quad V = 0,$$

und diese Gleichungen bestimmen V eindeutig, da aus ihnen folgt, dass, wenn W der Unterschied zweier Functionen ist, die ihnen genügen:

$$\tfrac{1}{2}\int_{z_0}^{\infty} W^2\,dz + a\int_0^t\int_{z_0}^{\infty}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dt\,dz = 0$$

sein muss, welche Bedingung nur durch $W = 0$ erfüllt wird. Die Gleichung (11) wird dadurch:

$$v = C\left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h\,U_1\right) + \int_0^t \psi(t')\,dt'\,\frac{\partial U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}. \tag{13}$$

Wäre es möglich, Temperaturen im Innern des unverletzten Würfels zu beobachten, so würden die Gleichungen (12) und (13) dazu dienen können, um mit Hülfe eines Näherungswerthes von a den genauern Werth dieser Grösse zu berechnen. Es müsste die Temperatur v_0 als Function der Zeit beobachtet sein; die Gleichung (12) gäbe dann $\psi(t)$, nachdem C willkürlich, aber so gewählt wäre, dass $\psi(t)$ klein bleibt; aus der Gleichung (13) wäre dann, nachdem das Integral durch mechanische Quadratur bestimmt wäre, $U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$ zu berechnen und hieraus der genauere Werth von a zu ermitteln. Nun sind in den Würfel aber Canäle gebohrt, in diese sind die Enden von Thermoketten eingeführt, und auf die Temperaturen der Löthstellen dieser können allein die Beobachtungen sich beziehen. Es soll zu zeigen versucht werden, dass die Gleichungen (12) und (13)

in der angegebenen Weise benutzt werden dürfen, auch, wenn man durch v die Temperaturen dieser Löthstellen bezeichnet, gerechnet von der ursprünglichen Temperatur des Würfels. Dabei soll aber nur der Fall ins Auge gefasst werden, dass die Seitenflächen und die Hinterfläche des Würfels keinen merkbaren Einfluss auf die Verbreitung der Wärme in ihm haben, das sehr kleine Glied $R + h\,U_1$ in der Gleichung (13) also vernachlässigt werden darf.

Der Durchmesser eines jeden der Canäle soll als unendlich klein angenommen werden; der Einfluss desselben auf die Temperaturvertheilung in dem Würfel wird sich dann nur auf unendlich kleine Entfernungen von seiner Wand hin erstrecken. Man denke sich eine Fläche s, die die Umgebung des Canals in einer Weite von dem übrigen Theile des Würfels abgrenzt, die klein, aber gross genug ist, um einen Einfluss des Canals auf die Temperaturen jenseits derselben auszuschliessen. Diese Fläche s, deren grösster Theil als eine cylindrische Fläche von kreisförmigem Querschnitt gedacht werden möge, ergänze man zu einer geschlossenen, indem man die Cylinderfläche in die Luft hin verlängert und einen Querschnitt (der durch die Drähte der Thermokette hindurchgeht) hinzufügt. Man stelle sich die Aufgabe, die Wärmebewegung in dem Systeme zu ermitteln, das durch die so gebildete Fläche vollständig begrenzt ist. Die Umgebung des Würfels hat die Temperatur Null; dieselbe Temperatur haben die Querschnitte der Drähte der Thermokette, die zu der begrenzenden Fläche gehören, und man wird annehmen dürfen, dass die ausserhalb des Würfels befindlichen Stücke dieser Drähte ihre Wärme gegen eine Umgebung von derselben Temperatur ausstrahlen. Die Elemente der Fläche s haben diejenigen Temperaturen, die sie zur selben Zeit haben würden, wenn der Canal nicht vorhanden wäre, Temperaturen, die, wie bisher, durch v bezeichnet werden sollen Bedeutet V die Temperatur irgend eines Punktes des betrachteten Systemes zur Zeit t, so ist V durch v eindeutig

bestimmt, wenn man noch berücksichtigt, dass zur Zeit $t = 0$ das ganze System die Temperatur Null besass; und zwar stellt sich V dar als ein über die Fläche s und das Zeitintervall t zu nehmendes Integral, das sich bezeichnen lässt als eine homogene, lineare Function der Werthe, welche v in der Fläche s und in dem Zeitintervall t annimmt. Jeder dieser Werthe nun lässt sich nach der Taylor'schen Reihe so entwickeln, dass das erste Glied der Werth von v ist, der dem Zeitpunkte t und dem Werthe von z entspricht, der für die Spitze gilt, in die der Canal ausläuft, und die folgenden Glieder die Differentialquotienten dieses Werthes nach t und z enthalten. Es folgt daraus für V eine Reihe, die bezeichnet werden kann als eine homogene, lineare Function von v und seiner Differentialquotienten nach t und z. Das gilt auch, wenn V auf einen Punkt der Löthfläche bezogen wird; also auch, wenn, wie es nun geschehen soll, durch V die aus den Galvanometerbeobachtungen abzuleitende Temperatur der Löthstelle bezeichnet wird, die ein gewisses Mittel aus den Temperaturen der einzelnen Punkte der Löthfläche ist. Die Coëfficienten der einzelnen Glieder dieses V sind ausschliesslich von der Gestalt des Canals und der Gestalt, Lage und Natur des eingesenkten Theiles der Thermokette abhängig; sie sollen als gleich für die verschiedenen benutzten Thermoketten angenommen werden. Fasst man den bezeichneten Ausdruck von V als eine Function der beiden Veränderlichen t und z auf, so hat man:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad \text{für } t = 0 \quad V = 0 \quad \text{und für } z = \infty \quad V = 0,$$

da:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

ist und v, d. h. bei der in der Gleichung (10) benutzten Bezeichnungsweise:

$$\int_0^t f(t')\,dt' \frac{\partial U\left(\frac{z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t},$$

mit allen seinen Differentialquotienten nach t und z für $t=0$ und für $z=\infty$ verschwinden. Aus diesen Eigenschaften von V folgt aber durch Schlüsse, die mit denen ganz übereinstimmen, durch welche die Gleichungen (12) und (13) abgeleitet sind, dass, wenn man den Werth von V für $z=z_0$ durch V_0 bezeichnet und:

$$V_0 = C\,U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \psi(t)$$

setzt, indem man dem Zeichen $\psi(t)$ eine von seiner früheren verschiedene Bedeutung gibt:

$$V = C\,U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + \int_0^t \psi(t')\,dt'\,\frac{\partial U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}$$

wird. Diese Gleichungen unterscheiden sich aber von den Gleichungen (12) und (13), abgesehen von dem Fehlen des Gliedes $R + h\,U_1$, das wir hier als zu vernachlässigen angenommen hatten, nur dadurch, dass V und V_0 an die Stelle von v und v_0 getreten sind.

Es werde nun durch v die von der ursprünglichen Temperatur des Würfels an gerechnete Temperatur der in einen der Canäle eingesenkten Löthstelle einer Thermokette bezeichnet; die Temperatur der zweiten Löthstelle sei die ursprüngliche des Würfels und E die electromotorische Kraft der Thermokette. Die Galvanometerbeobachtungen lehren zunächst dieses E kennen, aus ihm ist auf v zu schliessen. Näherungsweise sind v und E einander proportional; wir fanden es aber nöthig, die Abweichungen von dieser Proportionalität zu berücksichtigen und haben:

$$v = p\,(E - \mu\,E^2) \tag{14}$$

gesetzt, wo p und μ von v unabhängige Grössen bedeuten. Bezeichnet man den Werth von E für $v = v_0$ durch E_0, oder, um seine Abhängigkeit von t anzudeuten, durch $E_0(t)$, so ist ebenso:

$$v_0 = p\left(E_0(t) - \mu\,E_0^2(t)\right).$$

Diese Ausdrücke sind für v_0 und v in die Gleichungen (12) und (13) zu substituiren. Aus der ersteren dann $\psi(t)$ für

alle in Betracht kommenden Werthe von t zu berechnen, wäre lästig; man kann die Mühe verringern, indem man benutzt, dass μ und $\psi(t)$ nur klein sind. Infolge dieses Umstandes kann man in dem Gliede $p\mu E_0^2(t)$ der Gleichung (12):

$$E_0(t) = \frac{C}{p} U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

setzen und erhält dann aus ihr:

$$\psi(t) = pE_0(t) - CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) - \mu\frac{C^2}{p}U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right).$$

Diesen Werth setze man in die Gleichung (13) und schreibe C an Stelle von $\frac{C}{p}$, indem man diesem Buchstaben eine neue Bedeutung gibt; man findet dann:

$$E - \mu E^2 = C\left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + hU_1\right)$$

$$+ \int_0^t \left(E_0(t') - CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) - \mu C^2 U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)\right) dt' \frac{\partial U \frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}}{\partial t}.$$

Auch das neue C kann innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden; es muss nur so gewählt werden, dass:

$$E_0(t) - CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

klein ist.

Die gefundene Gleichung wird zur numerischen Rechnung bequemer, wenn man an Stelle von t' eine neue Integrationsvariable, die U genannt werden möge, durch die Gleichung:

$$U = U\left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)$$

einführt; sie wird dann:

$$15)\quad \begin{cases} E - \mu E^2 = C\left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + hU_1\right) \\ + \int_0^{U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{at}}\right)} \left(E_0(t') - CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right)\right) dU - \mu C^2 \int_0^{U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{at}}\right)} U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) dU. \end{cases}$$

Bei den bisher gemachten Auseinandersetzungen ist angenommen, dass die Leitungsfähigkeit k und das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit c, also auch das Verhältniss dieser beiden Grössen a constant sind. Thatsächlich sind dieselben von der Temperatur abhängig, und der auf die angegebene Weise berechnete Werth von a wird nur für eine gewisse Temperatur richtig sein. Diese Temperatur soll nun ermittelt werden. Dabei kann statt des Falles, der bei den Versuchen verwirklicht war, der einfachere und mit diesem sehr nahe übereinstimmende ins Auge gefasst werden, dass für die Temperatur u die Bedingungen gelten, dass:

$$\text{für } t = 0 \qquad u = 0,$$

$$\text{für } z = 0 \quad u = 1, \qquad \text{für } z = \infty \quad u = 0$$

ist. Es ist dann u eine Function der beiden Variabeln t und z, und die Differentialgleichung (1) vereinfacht sich in:

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z}.$$

c und k sind hier aber Functionen von u; von diesen soll angenommen werden, dass:

$$k = k_0 + k_1 u, \qquad c = c_0 + c_1 u$$

ist, wo k_0, k_1, c_0, c_1 Constanten sind, und zwar k_1 und c_1 Constanten, die als unendlich klein angesehen werden können. Dann ist:

$$a = a_0 + a_1 u, \tag{16}$$

wo:

$$a_0 = \frac{k_0}{c_0} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{a_0} = \frac{k_1}{k_0} - \frac{c_1}{c_0}.$$

Unter diesen Voraussetzungen hat es keine Schwierigkeiten, die Function u mit Rücksicht auf die unendlich kleinen Glieder niedrigster Ordnung zu bestimmen. Die Differentialgleichung für dieselbe ist dann:

$$(c_0 + c_1 u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left((k_0 + k_1 u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

oder:

$$c_0\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_1}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial t} = k_0\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_1}{2}\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial z^2}.$$

Ihr sowohl, als den für u angegebenen Grenzbedingungen kann man durch eine Function des einen Arguments $\frac{z}{\sqrt{t}}$ genügen. Man setze:

$$x = \frac{z}{2\sqrt{a_0 t}};$$

dann ist, wenn Ω eine Function von x bedeutet:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}\frac{x}{t}\frac{d\Omega}{dx}, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = \frac{1}{4a_0 t}\frac{d^2\Omega}{dx^2}.$$

Macht man hier, unter der Voraussetzung, dass u eine Function von x ist, einmal $\Omega = u$, dann $\Omega = u^2$, so wird die Differentialgleichung für u:

$$2x\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{c_1}{c_0}x\frac{d(u^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0}\frac{d^2(u^2)}{dx^2},$$

und die beiden willkürlichen Constanten, welche das allgemeine Integral derselben enthält, sind gerade ausreichend, die beiden Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \quad u = 1, \qquad \text{für } x = \infty \quad u = 0$$

zu erfüllen.

Vernachlässigt man die mit c_1 und k_1 behafteten Glieder, so wird $u = U(x)$, oder, wie der Kürze wegen geschrieben werden soll, $= U$; mit der erforderlichen Genauigkeit ist daher die Differentialgleichung für u:

$$2x\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{c_1}{c_0}x\frac{d(U^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0}\frac{d^2(U^2)}{dx^2}.$$

Das allgemeine Integral derselben ist:

$$u = A + BU,$$

wo A und B als Functionen von x aus den Gleichungen:

$$\frac{dA}{dx} + U\frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{dU}{dx}\frac{dB}{dx} = -\frac{c_1}{c_0}x\frac{d(U^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0}\frac{d^2(U^2)}{dx^2}$$

zu bestimmen sind. Aus diesen folgt bei Rücksicht auf Gleichung (16):

$$\frac{dA}{dx} = -2\frac{a_1}{a_0}xU^2 + \frac{k_1}{k_0}U\frac{dU}{dx}, \qquad \frac{dB}{dx} = 2\frac{a_1}{a_0}xU - \frac{k_1}{k_0}\frac{dU}{dx}.$$

Benutzt man, dass:

$$\int_0^x x\,dx\,U = \frac{x^2 U}{2} + \frac{1-U}{4} - \frac{x e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\int_0^x x\,dx\,U^2 = \frac{x^2 U^2}{2} + \frac{1-U^2}{4} - \frac{U x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-2x^2}\right)$$

ist und bestimmt die additiven, willkürlichen Constanten, die A und B enthalten, so dass $u = 1$ für $x = 0$ und $u = 0$ für $x = \infty$ wird, so ergibt sich:

$$u = U + \frac{a_1}{a_0}\left(\frac{U x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{U - e^{-2x^2}}{\pi}\right) + \frac{k_1}{2k_0} U(1-U).$$

Berechnet man aus einem beobachteten Werthe von u die Grösse a, ohne Rücksicht auf ihre Abhängigkeit von der Temperatur zu nehmen, so thut man das nach der Gleichung:

$$u = U\left(\frac{z}{2\sqrt{a t}}\right).$$

Dieselbe lässt sich schreiben:

$$u = U + (a - a_0)\frac{\partial U}{\partial a_0},$$

oder, wenn man u_m die „mittlere" Temperatur nennt, für welche der für a gefundene Werth bei Rücksicht auf die Abhängigkeit dieser Grösse von der Temperatur gilt:

$$u = U + a_1 u_m \frac{\partial U}{\partial a_0}, \quad \text{d. h.} \quad u = U + \frac{a_1}{a_0} u_m \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks von u mit dem vorher abgeleiteten ergibt:

$$u_m = U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{U e^{x^2} - e^{-x^2}}{x} + \frac{k_1}{k_0}\frac{a_0}{a_1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{x^2}}{x} U(1-U),$$

oder, wenn man $\frac{c_1}{c_0}$ an Stelle von $\frac{k_1}{k_0}$ durch die Gleichung:

$$\frac{k_1}{k_0} = \frac{a_1}{a_0} + \frac{c_1}{c_0}$$

einführt:

$$(17)\quad \begin{cases} u_m = U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{U e^{x^2} - e^{-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{x^2}}{x} U(1-U) \\ \qquad + \frac{c_1}{c_0} \frac{a_0}{a_1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{x^2}}{x} U(1-U). \end{cases}$$

Da in dieser Gleichung nur das Verhältniss von c_1 und a_1 vorkommt, so lässt sich unbeschadet ihrer Gültigkeit die Definition dieser Grössen so verallgemeinern, dass man darunter die Aenderungen versteht, die c und a in irgend einem Temperaturintervall, z. B. bei der Erwärmung um 1° C. erleiden.

Es soll nun auseinandergesetzt werden, wie wir die am Galvanometer gemachten Beobachtungen berechnet haben.

Es sei eine Schliessung aus dem Galvanometer und einer Thermokette gebildet; W sei der Widerstand derselben, E die electromotorische Kraft zur Zeit t, s die zur selben Zeit gemachte Scalenablesung. Nimmt man den Ablenkungswinkel des Spiegels als unendlich klein an und sieht ab von den Aenderungen des magnetischen Meridians und von der elastischen Nachwirkung des Aufhängefadens, so hat man:

$$\alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 = \frac{\gamma E}{W},$$

wo α, β, γ Constanten sind und s_0 die Scalenablesung bezeichnet, die der Gleichgewichtslage des Spiegels für den Fall entspricht, dass kein Strom durch das Galvanometer fliesst. Schon wegen der fortwährenden Aenderungen des magnetischen Meridians erfordert diese Gleichung eine Modification. Die Gleichgewichtslage des Spiegels für den Fall, dass kein Strom vorhanden ist, ist nicht constant; aber sie ändert sich der Regel nach sehr langsam und für ein hinreichend kleines Zeitintervall proportional mit der Zeit. Ist s_0 die ihr entsprechende Scalenablesung zur Zeit $t = 0$, so ist sie zur Zeit t, wenn t nicht zu gross ist, $s_0 + \varepsilon t$, wo ε eine kleine Constante ist, die aber bei jedem

Beobachtungssatze von neuem bestimmt werden muss. Man hat dann:

$$\alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 - \varepsilon t = \frac{\gamma E}{W},$$

Diese Gleichung verwandelt sich bei Rücksicht auf die elastische Nachwirkung nach der von Hrn. Boltzmann aufgestellten Theorie[1]), wenn man annimmt, dass längere Zeit vor dem Augenblick $t = 0$ der Spiegel grössere Ablenkungen nicht erlitten hat, und wenn man nur mässige positive Werthe von t ins Auge fasst, in die folgende:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\gamma E}{W} &= \alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 - \varepsilon t \\ &- \eta \left\{ (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} \left(s(t - w) - s(t) \right) \right\}, \end{aligned}\right.$$

wo η eine neue, kleine Constante bedeutet und $s(t)$ für s geschrieben, s also als Functionszeichen gebraucht ist. Das Glied εt stellt dann nicht allein den Einfluss der Aenderungen des magnetischen Meridians dar, sondern zugleich den Einfluss eines Theiles der elastischen Nachwirkung, nämlich desjenigen, der eine Folge von Ablenkungen des Spiegels ist, die lange Zeit vor dem Augenblicke $t = 0$ stattgefunden haben.

Ist die Bewegung des Spiegels so langsam, dass die mit den Factoren α^2 und β behafteten Glieder vernachlässigt werden können, so ist einfacher:

$$(19)\quad \frac{\gamma E}{W} = s - s_0 - \varepsilon t - \eta \left\{ (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} \left(s(t-w) - s(t) \right) \right\}.$$

Ist in dem Intervall von $t = 0$ bis $t = t_1$ $\quad s = s_1$
$\qquad = t_1 . \quad = t_2 . \quad = s_2 .$

wo $s_1, s_2, \ldots$ näherungsweise constant sind, und liegt t in dem Intervall von $t = t_n$ bis $t = t_{n+1}$, so hat man:

1) Boltzmann, Wien. Ber. October 1874.

$$(20) \qquad (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} \big(s(t-w) - s(t)\big)$$

$$= (s_1 - s_0) \log t + (s_2 - s_1) \log(t - t_1) + (s_3 - s_2) \log(t - t_2) + \cdot + (s_{n+1} - s_n) \log(t - t_n).$$

Bei der endlichen Grösse, die die Ablenkungswinkel bei unseren Versuchen hatten, wird man von diesen Gleichungen auch Gebrauch machen und die Grössen α, β, ε und η unbedenklich als constant betrachten dürfen, da die Versuche so angeordnet waren, dass die von ihnen abhängigen Glieder nur verhältnissmässig kleine Werthe hatten; dagegen war zu vermuthen, dass γ sich als abhängig von der Grösse des Ablenkungswinkels zeigen würde. Versuche, die zur Bestimmung dieser Abhängigkeit angestellt sind, haben aber ergeben, dass auch γ als constant betrachtet werden darf.

Um die Art, wie die elastische Nachwirkung in Rechnung gebracht ist, zu prüfen und den Werth von η zu bestimmen, wurde auf folgende Weise verfahren. Der Strom einer aus Kupfer und Eisendrähten gebildeten Thermokette, deren Löthstellen einerseits durch siedendes Wasser, andererseits durch fliessendes Wasser der Wasserleitung auf constanten Temperaturen erhalten wurden, wurde während einer gewissen Zeit durch das Galvanometer geleitet, und zu gewissen Zeitpunkten, vor dem Beginn des Stromes, während der Dauer und nach dem Aufhören desselben die Galvanometerscala abgelesen. Es wurden acht solcher Beobachtungssätze gemacht, die voneinander sich unterschieden durch die Dauer und die Intensität des Stromes, welche durch Einschaltung von Widerständen geändert werden konnte. Zwischen je zwei dieser aufeinander folgenden Versuche liess man einen Zeitraum vergehen, der hinreichte, um zu bewirken, dass die elastische Nachwirkung, die eine Folge des früheren war, während des späteren als eine lineare Function der Zeit angesehen werden durfte. Bei den Beobachtungen, die nach Oeffnung des Stromkreises ausgeführt waren, war die Bewegung so langsam, dass die

von den Constanten α und β abhängigen Glieder der Gleichung (18) vernachlässigt werden konnten; sie durften daher nach der Gleichung (19) berechnet werden; es war ferner $E = 0$, und es konnte die für die Gleichung (20) gemachte Voraussetzung als erfüllt angenommen, $n = 1$, $t_1 =$ der Dauer des Stromes, $s_1 =$ der während desselben gemachten Scalenablesung und $s_2 = s_0$ gesetzt werden. Hiernach geben die Gleichungen (19) und (20):

$$s - s_0 = \varepsilon t + \eta (s_1 - s_0) \log \frac{t}{t - t_1} \cdot \tag{21}$$

Beispielsweise möge einer der Beobachtungssätze angeführt werden:

t	s	$s - s_0$	$s - s_0 - \varepsilon t$	η
−300	486,35	—	—	—
− 60	486,35	—	—	—
0		Strom geschlossen		
60	852,00			
90		Strom unterbrochen		
150	487,40	1,05	1,07	0,00735 m
180	487,15	0,80	0,82	0,00753 m
210	487,00	0,65	0,68	0,00764 m
240	486,90	0,55	0,59	0,00789 m
270	486,80	0,45	0,49	0,00760 m
300	486,75	0,40	0,44	0,00776 m
360	486,65	0,30	0,35	0,00766 m
480	486,55	0,20	0,27	0,00819 m
600	486,45	0,10	0,18	—

Die erste Columne enthält die Zeit t, in Secunden ausgedrückt, die zweite die entsprechenden Ablesungen s, bei denen die Zehntel und halben Zehntel eines Scalentheiles geschätzt sind. Aus derselben ist zu entnehmen, dass:

$$t_1 = 90, \qquad s_0 = 486{,}35, \qquad s_1 - s_0 = 366.$$

Die dritte Columne enthält die Werthe von $s - s_0$. Aus je zweien ihrer Zahlen können mit Hülfe der Gleichung (21) die beiden Unbekannten ε und η berechnet werden. Aus der ersten und letzten haben wir den Werth von ε bestimmt und die aus ihm sich ergebenden Werthe von $s - s_0 - \varepsilon t$ in der folgenden Columne aufgeführt. Die letzte Columne enthält die dann aus der Gleichung (21) folgen-

den Werthe von η; m bedeutet dabei den Modulus der Briggs'schen Logarithmen, d. h. die Zahl 0,4343; in dieser Form sind die Werthe von η angegeben, weil bei den numerischen Rechnungen immer das Verhältniss $\eta : m$ auftritt. Endlich ist ein Mittelwerth von η nach der Methode der kleinsten Quadrate unter der Voraussetzung abgeleitet, dass bei den einzelnen Werthen von $s - s_0 - \varepsilon t$ gleich grosse Fehler gleich wahrscheinlich sind, d. h. nach der Formel:

$$\eta = \frac{\sum \frac{(s - s_0 - \varepsilon t)^2}{\eta}}{\sum \frac{(s - s_0 - \varepsilon t)^2}{\eta^2}}, \tag{22}$$

wo unter den Summenzeichen η den aus dem entsprechenden $s - s_0 - \varepsilon t$ berechneten Werth bedeutet. So ergab sich:

$$\eta = 0{,}00755\, m\,.$$

Die auf diese Weise aus den acht Beobachtungssätzen abgeleiteten Werthe von $\eta : m$ sind in der folgenden kleinen Tafel zusammengestellt, deren Verticalreihen mit der in Secunden ausgedrückten Dauer des Stromes überschrieben sind, während den Horizontalreihen die durch diese hervorgebrachte Ablenkung, also $s_1 - s_0$, vorgesetzt ist:

	90	180
105	0,00550	0,00712
207	597	651
366	755	702
464	749	727

Indem wir nach der Gleichung (22) einen Mittelwerth von η aus allen acht Beobachtungssätzen berechneten, fanden wir:

$$\eta = 0{,}007\; m\,.$$

Die Uebereinstimmung der für η gefundenen Zahlen ist nicht gross; aber sie ist nicht geringer als sie erwartet werden durfte in Rücksicht auf die Kleinheit des Betrages, den die elastische Nachwirkung namentlich nach den kleineren Ablenkungen besass. Sie ist unseres Erachtens ausreichend,

um zu zeigen, dass mit Hülfe der Boltzmann'schen Theorie bei Galvanometerbeobachtungen die Fehler zum grössten Theile sich vermeiden lassen, die aus der Nichtbeachtung der elastischen Nachwirkung hervorgehen können.

Erwähnt werden mögen noch Versuche anderer Art, die wir zur Prüfung der Theorie und des für η gefundenen Zahlenwerthes angestellt haben. Zur Zeit $t = 0$ wurde ein Magnet, dem Galvanometer plötzlich genähert, in der Stellung, die er dadurch erhalten hatte, bis zur Zeit $t = t_1$ gelassen und dann wieder an seinen ursprünglichen Ort gebracht. Ist M das in einer gewissen Einheit ausgedrückte, von dem Magneten auf den beweglichen Theil des Galvanometers ausgeübte Drehungsmoment und s_1 ein Näherungswerth für s während der Wirkung des Magnets, so ist, wenn t zwischen 0 und t_1 liegt:

$$M = s - s_0 - \varepsilon t - \eta (s_1 - s_0) \log t$$

und, wenn t grösser als t_1 ist:

$$0 = s - s_0 - \varepsilon t - \eta (s_1 - s_0) \log \frac{t}{t - t_1}.$$

Berechnet man mit Hülfe der letzten Gleichung ε, so gibt die erste für jeden Werth von t einen von M. Aus der Uebereinstimmung der Werthe, die so für M gefunden werden, ist die Richtigkeit der gemachten Annahmen zu beurtheilen. Bei einem Versuche dieser Art ergaben sich folgende Zahlen:

t	s	M	t	s	M
−120	499,00	—	120	874,40	369,85
− 60	499,00	—	150	874,60	369,80
0	Magnet genähert		180	Magnet entfernt	
60	873,60	369,85	210	501,00	—
90	874,10	369,89	270	500,20	—

Bei mehrfacher Wiederholung des Versuches zeigten sich keine grösseren Differenzen.

In ähnlicher Weise, wie hier das Drehungsmoment eines Magnets gemessen war, wurde bei den Versuchen, durch welche die Constanz der durch die Gleichung (18

eingeführten Grösse γ geprüft werden sollte, das Drehungsmoment von Strömen verschiedener Intensität im Galvanometerdrahte gemessen. Zur Erzeugung dieser Ströme diente die schon erwähnte Thermokette aus Kupfer und Eisen und ein System von bekannten Widerständen. Der Widerstand der Thermokette, des Galvanometergewindes und der nothwendigen Verbindungsdrähte war = 1,13 S.-E. gefunden worden; diesem wurde bei den einzelnen Versuchen hinzugefügt ein Widerstand von 30, 50, 100 und 200 S.-E. Auch hier wurden Ablesungen nur gemacht, wenn die Bewegung des Spiegels so langsam war, dass die mit den Factoren α^2 und β behafteten Glieder der Gleichung (18) vernachlässigt werden konnten, und auch hier durfte die Gleichung (20) in Anwendung gebracht werden. Es war daher zu setzen:

$$(23)\quad \gamma\frac{E}{W}=s-s_0-\varepsilon t-\eta\{(s_1-s_0)\log t+(s_2-s_1)\log(t-t_1)+\cdot\}\cdot$$

Die Werthe der rechten Seite dieser Gleichung, die bei aufeinander folgenden Versuchen sich ergaben, waren diese:

W	31,13	51,13	101,13	201,13	31,13 S.-E.
	341,34	207,64	105,05	52,87	341,60
	341,36	207,66	105,04	52,86	341,60
	341,31	207,65	105,01	52,87	341,64
	341,28	207,58	105,00	52,90	341,50
Mittel	341,32	207,63	105,02	52,88	341,57

Die Vergleichung der ersten und letzten der Mittelzahlen zeigte, dass die electromotorische Kraft der Thermokette E während der Dauer der Versuche ein wenig gewachsen war. Es wurde angenommen, dass ihre Veränderung proportional der Zeit vor sich gegangen wäre. Unter dieser Annahme fanden sich die Verhältnisse der Werthe der linken Seite der in Rede stehenden Gleichung für die einzelnen Versuche:

= 341,32 : 207,85 : 105,10 : 52,86 : 341,57.

Eine Veränderlichkeit von γ ist daher nicht zu bemerken.

Es war bei diesen Versuchen wünschenswerth erschienen, sie in so kurzer Zeit als möglich auszuführen, um Aenderungen der electromotorischen Kraft der Thermokette und der Temperatur der einzuschaltenden Widerstände so weit als möglich zu vermeiden. Es konnte deshalb der Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Versuchen nicht so gross gewählt werden, dass die bei dem frühern erzeugte elastische Nachwirkung bei dem spätern als eine lineare Function der Zeit hätte betrachtet werden dürfen; es musste daher eine grössere Zahl von Gliedern bei dem Factor von η in der Gleichung (23) in Rechnung gezogen werden, als es bei den Versuchen über die durch einen Magnet hervorgebrachten Ablenkungen nöthig gewesen war. Die Grösse ε musste für jeden der Versuche von neuem bestimmt werden. Es hätte am nächsten gelegen, zu diesem Zwecke zwischen den Ablenkungen zweier Ströme von verschiedener Intensität die Stellung des Spiegels bei geöffnetem Galvanometerkreise zu beobachten. Statt dessen schlugen wir ein anderes Verfahren ein, um zugleich eine andere Fehlerquelle, die sonst zu fürchten gewesen wäre, unschädlich zu machen. An dem Galvanometer befand sich ein Umschalter, von dem ein Messingstück von erheblicher Länge, das bei geschlossener Leitung vom Strome durchflossen wurde, einen Theil ausmachte. Hatten die Stellen desselben, die mit den kupfernen Zuleitungsdrähten im Contact waren, eine Temperaturdifferenz, so entstand eine störende electromotorische Kraft. Um den Einfluss dieser zu eliminiren, schalteten wir, statt den Galvanometerkreis zu öffnen, durch eine Wippe in ihr an Stelle der Thermokette einen Kupferdraht von demselben Widerstande ein und beobachteten dann die Stellung des Spiegels. Bei dieser Anordnung war die Veränderlichkeit der störenden electromotorischen Kraft nicht mehr zu fürchten als die Veränderlichkeit des magnetischen Meridians und wurde mit dieser zusammen eliminirt.

Es soll nun die Methode angegeben werden, deren wir uns bedient haben, um die in der Gleichung (18) vor-

kommenden Constanten α und β zu bestimmen. Es bedurfte diese Bestimmung nur einer mässigen Genauigkeit, da die Werthe von α und β nur dazu dienen sollten, kleine Correctionen zu berechnen. Es wurde eine Schliessung gebildet aus dem Galvanometerdraht und einem zweiten Multiplicatorgewinde, innerhalb dessen ein kräftiger, etwa 200 g schwerer Magnetstab seine Schwingungen ausführen konnte, die ebenfalls mit Spiegel, Scala und Fernrohr zu beobachten waren. Einmal erregt, bestanden solche Schwingungen längere Zeit mit langsam abnehmender Amplitude fort, und der Spiegel des Galvanometers führte Schwingungen von derselben Dauer aus. Diese Dauer konnte geändert werden durch Aenderung der bifilaren Aufhängung, mit der der Magnetstab versehen war. Bei einigen verschiedenen Werthen der Schwingungsdauer wurden die Amplituden des Magnets und des Galvanometers abwechselnd in gleichen, kleinen Zwischenräumen beobachtet und das Verhältniss der auf gleiche Zeitpuncte reducirten Amplituden berechnet. Die folgenden Ueberlegungen zeigen, wie aus den Werthen, die dieses Verhältniss bei bekannten Schwingungsdauern besitzt, α und β ermittelt werden konnten.

Die in Scalentheilen ausgedrückte Ablenkung des Magnetstabes aus seiner Gleichgewichtslage zur Zeit t kann:

$$= c \sin n t$$

gesetzt werden, wo c die in Scalentheilen ausgedrückte Amplitude und:

$$n = \frac{\pi}{T}$$

ist, wenn T die Dauer einer einfachen Schwingung bedeutet. Die Gleichung der Bewegung des Galvanometerspiegels ist dann, wenn u die in Scalentheilen ausgedrückte Ablenkung aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t bezeichnet, N eine von c und n unabhänge Constante ist, und man absieht von den inducirten Strömen höherer Ordnung:

$$\alpha^2 \frac{d^2 u}{d t^2} + 2 \beta \frac{d u}{d t} + u = c N n \cos n t.$$

Andererseits ist:

$$u = A \cos n t + B \sin n t,$$

wo A und B zwei unbekannte Constanten bedeuten. Die Differentialgleichung gibt für diese die Bedingungen:

$$c N n = A(1 - \alpha^2 n^2) + B 2 \beta n$$
$$0 = - \quad A 2 \beta n \quad + B(1 - \alpha^2 n^2).$$

Setzt man:

$$A^2 + B^2 = C^2 c^2,$$

bezeichnet also durch C das Verhältniss der Amplituden beider Schwingungen, so folgt hieraus:

$$C^2 = \frac{N^2 n^2}{(1 - \alpha^2 n^2)^2 + 4 \beta^2 n^2}.$$

Hat man drei Beobachtungen von C für verschiedene Werthe von n, so kann man aus den hiernach geltenden Gleichungen N eliminiren und α und β bestimmen. Wir hatten eine grössere Zahl von Beobachtungen und haben α und β so berechnet, dass:

$$\Sigma (dC)^2$$

ein Minimum wurde, wenn dC den sich ergebenden Fehler einer Beobachtung bezeichnet. Die für C^2 abgeleitete Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\alpha^4}{N^2} n^2 + \frac{4 \beta^2 - 2 \alpha^2}{N^2} + \frac{1}{N^2} \frac{1}{n^2},$$

oder, wenn man:

$$\frac{\alpha^4}{N^2} = x, \qquad \frac{4 \beta^2 - 2 \alpha^2}{N^2} = y, \qquad \frac{1}{N^2} = z$$

setzt:

$$\frac{1}{C^2} = x n^2 + y + z \frac{1}{n^2}.$$

Der Fehler von $\frac{1}{C^2}$ bei einer Beobachtung ist also:

$$\frac{1}{C^2} - x n^2 - y - \frac{z}{n^2};$$

betrachtet man ihn als unendlich klein, so ist er andererseits aber auch:

$$= -2 \frac{dC}{C^3}.$$

Aus dieser Gleichung kann man den Werth von dC nehmen und findet dann, dass die aufgestellte Bedingung übereinstimmt mit der, dass:

$$\sum \left(x C^3 n^2 + y C^3 + z \frac{C^3}{n^2} - C \right)^2$$

ein Minimum ist. Hieraus folgen die Gleichungen:

$$x \sum C^6 n^4 + y \sum C^6 n^2 + z \sum C^6 = \sum C^4 n^2$$

$$x \sum C^6 n^2 + y \sum C^6 \quad + z \sum \frac{C^6}{n^2} = \sum C^4$$

$$x \sum C^6 \quad + y \sum \frac{C^6}{n^2} \quad + z \sum \frac{C^6}{n^4} = \sum \frac{C^4}{n^2}$$

Sind diese Gleichungen nach x, y, z aufgelöst, so hat man:

$$\alpha^4 = \frac{x}{z}, \qquad 4\beta^2 - 2\alpha^2 = \frac{y}{z}.$$

Die Messungen ergaben die folgenden zusammengehörigen Werthe von T und C:

T	5,549	3,951	2,911	2,319	1,529 Sec.
C	0,676	0,889	1,042	1,042	0,849
	0,676	0,899	1,034	1,044	0,841
	0,672	0,891	1,035	1,040	0,828
	0,676	0,886	1,037	1,045	0,822
	0,678	0,887	1,033	1,037	0,820
	0,676	0,887	1,034	1,033	0,830
	—	0,886	1,031	1,039	0,827
	—	0,885	1,029	1,039	0,818
	—	—	1,031	—	0,815
	—	—	—	—	0,809
	—	—	—	—	0,823
	—	—	—	—	0,839
	—	—	—	—	0,823
Mittel	0,676	0,889	1,034	1,040	0,826

Hieraus folgt:

$$\alpha = 0{,}8228 \text{ Sec.} \qquad \beta = 0{,}5816 \text{ Sec.}$$

Berechnet man rückwärts mit diesen Werthen von α und β bei Benutzung des Werthes, den die Rechnung für N gegeben hat, die Werthe von C für die einzelnen Schwingungsdauern, so findet man:

0,676 0,893 1,035 1,038 0,829,

in guter Uebereinstimmung mit den Mittelzahlen der Beobachtungen.

Bei diesen Versuchen war der Widerstand des Galvanometerkreises 2,7 S.-E. Von diesem Widerstande muss, streng genommen, der Werth der Grösse β abhängig sein, weil ein Theil derselben von den Strömen herrührt, die in dem Galvanometerkreise durch die Magnete des Galvanometers inducirt werden. Es wurde der Widerstand auf 6,9 S.-E. gebracht und dann für einige Schwingungsdauern C beobachtet. Es zeigte sich, dass die gefundenen Werthe von C sich in genügender Weise darstellen liessen durch die alten Werthe von α und β und den Werth von N, der zu dem frühern im Verhältniss von 2,7 : 6,9 stand. Daraus folgt, dass β als unabhängig vom Widerstande des Galvanometerkreises anzusehen, die in diesem stattfindende Induction also unmerklich ist neben der Induction in den Kupferhülsen des Galvanometers und der Luftreibung.

Zur Berechnung unserer Versuche über die Wärmeleitung war noch nöthig die Kenntniss der Beziehung zwischen der electromotorischen Kraft der benutzten Thermoketten und den Temperaturen ihrer Löthstellen. Mit Hrn. Avenarius[1]) haben wir angenommen, dass, wenn E die electromotorische Kraft ist, und ϑ und ϑ_0 die Temperaturen sind, die Relation:

$$E = \mathfrak{a}(\vartheta - \vartheta_0)\big(1 + \mathfrak{b}(\vartheta + \vartheta_0)\big) \tag{24}$$

besteht, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Constanten bezeichnen; es handelte sich darum, diese für eine unserer aus Neusilber und Kupfer zusammengesetzten Thermoketten zu bestimmen. Bei jedem der hierzu ausgeführten Beobachtungssätze wurden drei Temperaturen benutzt, die des schmelzenden Eises, die der Dämpfe des siedenden Wassers und eine mittlere Temperatur, die mit Hülfe eines Jolly'schen Luftthermometers gemessen wurde. Die Kugel desselben war mit der einen Löthstelle der Thermokette in ein mit Petroleum gefülltes Gefäss getaucht, das in einer

1) Avenarius, Pogg. Ann. **119.** p. 406. 1863. u. **122.** p. 193. 1864.

grössern Wassermasse sich befand. Es wurde diese durch eine Lampe erwärmt, während das Petroleum durch eine Rührvorrichtung in Bewegung erhalten wurde. Die zweite Löthstelle war in ein langes und enges, unten geschlossenes Metallröhrchen geführt und wurde mit diesem abwechselnd in schmelzendes Eis und in die Dämpfe siedenden Wassers gebracht. Aus der Thermokette und dem Galvanometer war eine Schliessung gebildet, und der Widerstand derselben = 29,1 S.-E. gemacht, um Ablenkungen von der gewünschten Grösse zu erhalten. Durch eine Umschaltung wurde bewirkt, dass die Galvanometerablenkungen immer dieselbe Richtung hatten. Es wurden diese nach den Gleichungen (19) und (20) berechnet. Eine Beobachtungsreihe gab die folgenden Zahlen, wenn die Temperaturen ϑ und ϑ_0 nach den Graden der Celsius'schen Scala gerechnet werden:

$\frac{\gamma E}{W}$	$\vartheta - \vartheta_0$	$\vartheta + \vartheta_0$	$\frac{\gamma \mathfrak{a}}{W}$	$\mathfrak{b}$
230,74	46,85	46,85		
			4,636	0,00133
295,15	53,26	146,76		
			4,628	0,00135
229,96	46,74	46,74		
			4,625	0,00136
295,92	53,34	146,68		
			4,616	0,00138
229,08	46,63	46,63		
			4,616	0,00138
297,11	53,56	146,46		
		Mittel	4,624	0,00136

Die beiden letzten Columnen enthalten die Werthe, die die Gleichung (24) ergibt aus den Zahlen der ersten und zweiten, zweiten und dritten, . . Horizontalreihe der früheren Columnen. Zwei ähnliche Beobachtungsreihen, bei denen die mittlere Temperatur, die hier etwa 47° C. gewesen war, die Werthe von ungefähr 38° C. und 35° C. gehabt hat, ergaben:

$$\frac{\gamma \mathfrak{a}}{W} = 4{,}625 \qquad \mathfrak{b} = 0{,}00139$$

und:

$$= 4{,}587 \qquad = 0{,}00141.$$

Wir haben angenommen:

$$\frac{\gamma\mathfrak{a}}{W} = 4{,}612 \qquad \mathfrak{b} = 0{,}00139.$$[1])

Bei den Versuchen mit dem Eisenwürfel war der Widerstand der Schliessung, W, ein kleinerer als bei diesen Hülfsversuchen, nämlich bei Benutzung der mit I bezeichneten Thermokette = 3,10 S.-E. Hier war daher:

$$\frac{\gamma\mathfrak{a}}{W} = 43{,}3.$$

Für diese Anordnung soll $\frac{\gamma}{W} = 1$ gesetzt werden, was darauf hinaus kommt, dass eine gewisse Einheit für die electromotorische Kraft angenommen wird. Die linke Seite der Gleichung (18) oder (19) wird dann E, und zugleich wird:

$$\mathfrak{a} = 43{,}3.$$

Schreibt man die Gleichung (24):

$$\frac{E}{\mathfrak{a}(1 + 2\mathfrak{b}\vartheta_0)} = \vartheta - \vartheta_0 + \frac{\mathfrak{b}}{1 + 2\mathfrak{b}\vartheta_0}(\vartheta - \vartheta_0)^2,$$

so findet man aus ihr bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{\mathfrak{a}(1 + 2\mathfrak{b}\vartheta_0)}\left(E - \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}(1 + 2\mathfrak{b}\vartheta_0)^2}E^2\right).$$

Daraus folgt für die durch die Gleichung (14) eingeführte Grösse μ, wenn ϑ_0 die ursprüngliche Temperatur des Würfels und zugleich die Temperatur der nicht im Würfel befindlichen Löthstelle der Thermokette, in Graden der Celsius'schen Scala ausgedrückt, bezeichnet:

$$\mu = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}(1 + 2\mathfrak{b}\vartheta_0)^2}. \tag{25}$$

Für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind hier die eben angegebenen Zahlenwerthe zu setzen, ϑ_0 ist bei jedem Versuche zu ermitteln.

---

1) Bemerkt möge werden, dass aus den Messungen und der Theorie des Hrn. Avenarius (Pogg. Ann. **122.** p. 213. 1864) der Coëfficient $\mathfrak{b}$ für Kupfer und Neusilber sich viel kleiner ergibt, als er hier gefunden wurde, nämlich = 0,00084. Wahrscheinlich liegt der Grund dieses Unterschiedes hauptsächlich darin, dass das Neusilber des Hrn. Avenarius ein anderes war als das unsrige.

Es sollen nun die bei den Versuchen mit dem Würfel benutzten Vorrichtungen näher beschrieben werden.

Wie schon erwähnt, hatte der Würfel eine Kante von 140 mm Länge und war so aufgestellt, dass eine Kante vertical war. Er ruhte auf vier dünnen Holzklötzchen, die auf einem Holztische befestigt waren. In gleicher Ebene mit der zu bespritzenden, verticalen Vorderfläche des Würfels stand ein Schirm von Zinkblech, in welchem eine jene Fläche umgebende, quadratische Oeffnung sich befand, die nur sehr wenig grösser war als sie. Der zwischen beiden vorhandene Zwischenraum war mit Wachskitt geschlossen. Der Schirm hatte oben und an den beiden Seiten Ränder und endigte unten in einen flachen Trichter, sodass das aus der Brause gegen die Vorderfläche des Würfels spritzende Wasser abfliessen konnte, ohne direct die Temperatur der übrigen Würfelflächen zu beeinflussen.

Damit auch die bei dem Spritzen des Wassers oder durch andere Ursachen im Beobachtungsraum entstehenden Luftströmungen so wenig als möglich störend einwirkten, war der Tisch, auf dem der Würfel sich befand, ganz von hohen Pappschirmen umgeben.

Der Vorderfläche des Würfels gegenüber, in einem Abstande von 127 mm von derselben, war die Brause angebracht. Ihre Endfläche bildete ein Quadrat von 157 mm Seite und enthielt 264 runde Oeffnungen von etwa 0,5 mm Durchmesser.

Um zu prüfen, ob diese Zahl der Oeffnungen ausreichte, um der Vorderfläche des Würfels eine in allen ihren Punkten gleiche Temperatur zu ertheilen, wie die entwickelte Theorie sie voraussetzte, waren drei Versuche schon gemacht, als die Brause erst die Hälfte der genannten Zahl von Oeffnungen hatte. Der Werth von a, der sich im Mittel aus diesen drei Versuchen ergab, differirte von demjenigen, der aus drei späteren Versuchen folgte, bei denen die Zahl der Löcher verdoppelt war, im übrigen aber die gleichen Verhältnisse stattfanden, nur um 0,12 Proc.

Das Wasser wurde der Brause aus einem Reservoir zugeführt, welches aus der städtischen Wasserleitung oder mit erwärmtem Wasser gefüllt werden konnte.

Zwischen der Brause und dem erwähnten, feststehenden Zinkschirm war noch ein beweglicher Schirm aus gleichem Material vorhanden. Dieser konnte durch Verschieben in seiner Ebene in zwei Stellungen gebracht werden; bei der einen spritzte das aus der Brause kommende Wasser durch eine in dem Schirm befindliche quadratische Oeffnung gegen die Vorderfläche des Eisenwürfels, bei der andern traf es einen Theil des Schirmes und floss, geleitet durch Zinkstreifen, an ihm hinab in das Abflussrohr der Wasserleitung. Dieser Theil des Schirmes war gebildet aus drei, in kleinen Abständen voneinander befestigten Zinkplatten, welche mit den zwischenliegenden Luftschichten den Eisenwürfel vor jeder Einwirkung des aus der Brause strömenden Wassers schützen sollten. Nachdem der Schirm bei dieser Stellung 10 bis 15 Secunden die Wasserstrahlen aufgenommen hatte, wurde er rasch in die zuerst erwähnte gebracht. Dadurch wurde bewirkt, dass das Bespritzen des Würfels plötzlich begann und dann mit gleichbleibender Kraft und Wassertemperatur geschah. Der Augenblick, in dem es begann, wurde von dem Chronographen markirt mit Hülfe einer Vorrichtung, durch welche bei dem Verschieben des Schirmes ein electrischer Strom momentan geschlossen wurde. Dieses Verschieben setzte zugleich ein Uhrwerk in Thätigkeit, dessen Zweck später angegeben werden soll.

In den Eisenwürfel waren, wie bereits erwähnt, drei verticale Canäle gebohrt, die in der Nähe der geraden Linie endigten, die durch den Mittelpunkt der Vorderfläche geht und auf dieser senkrecht steht. Ihr Durchmesser war 1,4 mm, und ihre Enden bildeten rechtwinkelige Kegel. Die Abstände der Spitzen dieser Kegel von der Vorderfläche (also die entsprechenden Werthe von z) wurden mit Hülfe eines eigens hierzu construirten Apparates so genau als möglich gemessen. Der Haupttheil dieses Apparates

war ein mit einem Nonius versehener Maassstab, dessen eine Endfläche den Nullpunkt der Theilung bildete und an die ebene Fläche eines starken Messinglineals so angeschraubt werden konnte, dass der Maassstab senkrecht zu dieser Fläche stand. Die Verbindungsschraube ging durch einen in dem Lineale befindlichen Schlitz, sodass der Maassstab längs desselben verschiebbar war. An dem Ende des Lineals war ein Querstab angelöthet, parallel dem Maassstab und ungefähr von derselben Länge wie dieser.

Mit diesem Instrumente wurde in der folgenden Weise verfahren. Das Messinglineal war, ohne den Maassstab, an die vertical stehende Vorderfläche des Würfels fest angedrückt, sodass der Querstab sich über den Mündungen der Canäle befand. Dann wurde eine 100 mm lange und 0,9 mm dicke, unten zugespitzte Stahlnadel in den zu messenden Canal gesenkt, oben gegen den mit etwas Siegellack überzogenen Querstab so angelegt, dass sie mit der Spitze aufstiess, sonst aber in keiner Berührung mit der Wand des Canals war, und in dieser Stellung mit Hülfe einer Löthrohrflamme an den Querstab befestigt. Nach dem Erkalten des Siegellacks wurde das Messinglineal an der Fläche des Eisenwürfels aufwärts geschoben, sodass die Nadel aus dem Canale kam, ohne ihre Stellung gegen das Lineal zu ändern. Nun wurde der Maassstab angeschraubt, durch Verschiebung desselben längs des Lineals die Spitze der Nadel dicht an die Theilung des Nonius gebracht, und der Nonius so eingestellt, dass sein Nullpunkt mit der Nadelspitze coincidirte. Es konnte dann der Abstand der Spitze von der Fläche des Lineals, d. h. der Abstand des tiefsten Punktes des Canals von der Vorderfläche des Würfels an der Theilung des Maassstabes abgelesen werden.

Wir fanden so aus einer grossen Zahl von Messungen, die für denselben Canal höchstens um 0,15 mm voneinander differirten, für den

ersten,	zweiten,	dritten Canal
$z = 5{,}46$ mm,	$= 44{,}65$ mm,	$= 71{,}26$ mm.

Die beiden Thermoketten, die wir benutzten, bestanden, wie bereits erwähnt, aus Kupfer- und Neusilberdraht. Die einzelnen Drähte waren für sich, und die zusammengelötheten dann noch einmal zusammen mit Seide umsponnen. Die auf diese Weise fest verbundenen Drähte liessen sich noch leicht in die Canäle des Eisenwürfels einführen. Ihre von der Umhüllung befreiten Enden waren kegelförmig so zugeschliffen, dass sie in die Enden der Canäle genau hineinpassten. Nachdem sie in diese fest hineingedrückt waren, wurden die Drähte an der obern Fläche des Würfels mit Wachskitt befestigt und dadurch zugleich die Canäle geschlossen.

An dem ersten Canal befand sich bei allen Versuchen die eine Löthstelle der Thermokette I, während die eine Löthstelle der Thermokette II bei einigen Versuchen in den zweiten, bei anderen in den dritten Canal eingeführt war. Die beiden Thermoketten waren im übrigen ganz gleich, nur waren ihre Widerstände ein wenig verschieden. Der Widerstand des aus dem Galvanometer und einer der Thermoketten gebildeten Kreises war 1,0051 mal so gross, wenn die Thermokette II, als wenn die Thermokette I in dem Kreise sich befand.

Die beiden, nicht in den Würfel eingeführten Löthstellen der Thermoketten befanden sich, mit der Kugel eines Thermometers in Watte eingepackt und zusammengebunden, in einem Kasten mit doppelten Wänden, zwischen denen Wasser war. Die Temperatur im Innern dieses Kastens variirte ungemein langsam und konnte an der Scala des Thermometers abgelesen werden, die durch die Wandungen des Kastens hindurchtrat. In demselben Kasten war auch noch ein Quecksilbercommutator aufgestellt, der durch Schnüre von aussen umgelegt werden konnte und gestattete, nach Willkür die eine oder andere Thermokette mit dem Galvanometer zu verbinden. Das Umlegen des Commutators geschah während des Versuchs durch das oben erwähnte Uhrwerk, welches durch das Verschieben des Schirmes in Bewegung gesetzt wurde.

Das benutzte Galvanometer war ein Siemens'sches mit einem astatischen Paare von Glockenmagneten, Kupferdämpfung, Richtmagneten und Spiegelvorrichtung. Die in Millimeter eingetheilte Scala befand sich in einer Entfernung von etwa 2400 mm von dem Spiegel.

Neben dem Beobachtungsfernrohre stand der Chronograph. Derselbe war so eingerichtet, dass bei dem jedesmaligen Hin- und Hergang eines Secundenpendels ein electrischer Strom momentan geschlossen und dadurch ein Stich in den durch das Uhrwerk des Chronographen bewegten Papierstreifen gemacht wurde. Das Gleiche geschah, wenn der Beobachter durch Ziehen an einer Schnur den Schirm vor dem Eisenwürfel so verschob, dass das aus der Brause hervorströmende Wasser diesen zu bespritzen begann. Ueberdies befanden sich an dem Chronographen zwei mit Nadeln verbundene Knöpfe, durch deren Herabdrücken der Papierstreifen rechts und links von der Linie der Secundenmarken durchstochen wurde. Einer dieser Knöpfe diente dazu, die Zeiten zu markiren, die den einem Gehülfen dictirten Ablesungen der Galvanometerscale entsprachen; durch den zweiten wurden die Zeitpunkte registrirt, in denen die durch das erwähnte Uhrwerk bewirkten Wechsel der Thermoketten stattfanden.

Um die Beschreibung eines Versuchs zu vervollständigen, möge das folgende Protokoll eines solchen dienen:

Versuch 18. 19. October 1879 Abends 9 Uhr.
Temperatur im Kasten $\vartheta_0 = 18{,}1^0$ C.
Ablesung bei geöffnetem Galvanometerkreise 474,30.

1. Relative Zeit in Sec.	2. Ablesungen	3. Ablenkungen	1. Relative Zeit in Sec.	2. Ablesungen	3. Ablenkungen
−295	II eingeschaltet		−115	II eingeschaltet	
−265	478,35	—	− 85	478,25	—
−245	I eingeschaltet		− 65	I eingeschaltet	
−215	478,45	—	− 35	478,40	—

1. Relative Zeit in Sec.	2. Ab-lesungen	3. Ab-lenkungen	1. Relative Zeit in Sec.	2. Ab-lesungen	3. Ab-lenkungen
0,00	Schirm gezogen	0,0	64,78	710,0	231,6
3,34	500,0	21,6	77,98	715,0	236,6
4,40	520,0	41,6	87,56	718,0	239,6
5,56	540,0	61,6	95,14	720,0	241,6
6,72	560,0	81,6	103,56	722,0	243,6
7,96	580,0	101,6	113,78	724,0	245,6
9,68	600,0	121,6	125,82	726,0	247,6
11,84	620,0	141,6	139,48	728,0	249,6
14,96	640,0	161,6	154,20	II eingeschaltet	
16,98	650,0	171,6	171,16	624,0	146,6
19,70	660,0	181,6	173,96	625,0	147,6
23,52	670,0	191,6	176,84	626,0	148,6
28,72	680,0	201,6	179,80	627,0	149,7
36,26	690,0	211,6	182,84	628,0	150,7
41,10	695,0	216,6	186,16	I eingeschaltet	
47,56	700,0	221,6	211,52	735,0	256,7
55,08	705,0	226,6	223,60	736,0	257,7

Die Columne 1 gibt die Beobachtungszeiten t, gerechnet von dem Augenblicke, in dem der Würfel von dem Wasser getroffen wurde; die negativen Werthe derselben sind an der Uhr abgelesen, die positiven aus den vom Chronographen gemachten Marken abgeleitet. Die Columne 2 enthält die entsprechenden Scalenablesungen s, die Columne 3 die Werthe von $s - s_0 - \varepsilon t$, die aus diesen berechnet sind mit Hülfe der Werthe von s_0 und ε, die durch Anwendung der Gleichung:

$$s - s_0 - \varepsilon t = 0$$

auf die Zeiten -215 und -35 für die Kette I und die Zeiten -265 und -85 für die Kette II sich ergeben. Die auf die Thermokette II bezüglichen Werthe von $s - s_0 - \varepsilon t$ sind mit dem Factor 1,0051 multiplicirt, um sie mit den auf die Thermokette I bezüglichen gleichartig zu machen. Mit Hülfe der Zahlen der Columne 3 ist aus der Gleichung (18) unter der Annahme $\frac{\gamma}{W} = 1$ die electromotorische Kraft der Thermokette II berechnet bei einigen Versuchen für $t = 145$, bei anderen für $t = 175$ und die electromotorische Kraft der Thermokette I bei jenen Versuchen: für $t = 5, 20, 40, 65, 90, 115, 145,$

bei diesen ausserdem noch für $t = 175$. Dabei wurden für die genannten Zeiten $s - s_0 - \varepsilon t$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2 s}{dt^2}$ durch Interpolation ermittelt und das den Einfluss der elastischen Nachwirkung darstellende Glied der Gleichung (18) mit Hülfe der Gleichung (20) bestimmt. Die beiden in der Gleichung (15) vorkommenden Integrale konnten nun durch mechanische Quadratur berechnet und aus dieser Gleichung dann der genauere Werth von a gefunden werden.

Nach den durchgeführten Betrachtungen setzt diese Berechnungsweise der Beobachtungen zunächst voraus, dass die Anfangstemperatur des Würfels überall dieselbe und zwar die Temperatur ϑ_0 des Kastens ist. Diese Annahme aber war thatsächlich bei keinem der Versuche genau erfüllt; es zeigte sich das an den kleinen Unterschieden der Scalenablesungen bei geöffnetem Galvanometerkreise und nach Einschaltung der einen oder andern Thermokette vor der Zeit Null. Die Veränderung der Temperatur in irgend einem Punkte des Würfels, die eine Folge dieses Umstandes ist, wird näherungsweise eine lineare Function der Zeit und zwar dieselbe Function für positive, wie für negative Werthe der Zeit sein. Ist das richtig, so wird durch die Art, wie die Grössen s_0 und ε für jede Thermokette eingeführt und berechnet sind, der Fehler eliminirt, den sonst der genannte Umstand herbeiführen würde.

In der angegebenen Weise haben wir 24 Versuche mit demselben Eisenwürfel ausgeführt und berechnet. Die folgende Zusammenstellung gibt in der „a beobachtet“ überschriebenen Columne die Resultate derselben an:

Vers.-Nr.	Werthe von z und t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechn.	Differenz
1	$z = 44{,}65$ mm, $t = 145''$	17,0	10,1	13,5	16,87	16,99	−0,12
2		15,6	11,6	13,5	17,08	16,99	+0,09
3		17,7	11,9	14,7	16,96	16,95	+0,01
4		19,3	12,9	16,0	16,95	16,91	+0,04
5		16,6	11,8	14,1	16,84	16,97	−0,13
6		16,3	10,5	13,3	16,93	17,00	−0,07

Vers.-Nr.	Werthe von z und t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechn.	Differenz
7	$z = 44{,}65$ mm, $t = 145''$	15,6	21,5	18,6	16,77	16,82	−0,05
8		14,7	20,0	17,4	16,90	16,86	+0,04
9		15,9	20,9	18,5	16,88	16,82	+0,06
10		16,2	21,0	18,7	16,79	16,82	−0,03
11		17,9	22,4	20,2	16,70	16,77	−0,07
12		17,3	21,9	19,7	16,76	16,78	−0,02
13	$z = 44{,}65$ mm, $t = 175''$	18,3	13,1	15,5	16,94	16,92	+0,02
14		17,2	12,9	14,9	16,96	16,94	+0,02
15		17,2	12,7	14,8	17,07	16,95	+0,12
16		17,2	12,5	14,7	16,80	16,95	−0,15
17		17,4	12,2	14,6	16,89	16,95	−0,06
18		18,0	12,1	14,9	17,04	16,94	+0,10
19	$z = 71{,}26$ mm, $t = 145''$	16,8	11,3	14,6	16,95	16,95	0,00
20		17,3	11,5	15,0	16,95	16,94	+0,01
21		16,4	11,1	14,3	17,00	16,96	+0,04
22		16,0	10,4	13,8	16,97	16,98	−0,01
23		16,6	11,1	14,4	17,02	16,96	+0,06
24		16,2	10,2	13,8	16,96	16,98	−0,02

Nimmt man Rücksicht auf die Abhängigkeit der Grösse a von der Temperatur, so muss man bei dem aus jedem der Versuche gefundenen Werthe von a fragen, für welche Temperatur er gilt. Diese Temperatur in Graden der hunderttheiligen Scala ausgedrückt, ist durch ϑ bezeichnet. Sie ist gefunden mit Hülfe der Gleichung (17). Ist ϑ_0 die Anfangstemperatur des Würfels, ϑ_1 die Temperatur, die die Vorderfläche desselben durch das Bespritzen erhält, so ist:

$$\vartheta = \vartheta_0 + u_m (\vartheta_1 - \vartheta_0)\,. \tag{26}$$

Genau genug wäre es gewesen, dieses ϑ_0 der unmittelbar beobachteten Temperatur des Kastens gleich zu setzen; bei den angegebenen Werthen ist indessen die kleine Correction angebracht, die sich aus der Scalenablesung bei geöffnetem Galvanometerkreise und dem Mittel der Scalenablesungen berechnen lässt, die bei Einschaltung der einen oder der andern Thermokette vor der Zeit o gewonnen sind. $\vartheta_1 - \vartheta_0$ und daraus ϑ_1 liess sich berechnen aus der in der Gleichung (15) vorkommenden Grösse C. Wir setzten nun:

$$
(27) \qquad \begin{aligned} a &= a_{15} + a_1 (\vartheta - 15) \\ c &= c_{15} + c_1 (\vartheta - 15), \end{aligned}
$$

indem wir also durch a_{15} und c_{15} die Werthe von a und c bei der Temperatur von 15° C. bezeichneten und den Zeichen a_1 und c_1 die Bedeutung liessen, die sie in der Gleichung (17) haben.

In dieser Gleichung darf man $c_0 = c_{15}$ und für a_0 irgend einen Näherungswerth von a setzen. Aus der Angabe von Bède[1]) über die Aenderungen der specifischen Wärme des Eisens mit der Temperatur ergibt sich:

$$
\frac{c_1}{c_{15}} = 0{,}00129 .
$$

Durch Benutzung dieses Zahlenwerthes werden alle Grössen, die in dem Ausdrucke für u_m in Gleichung (17) vorkommen, bis auf a_1 bekannt, und die Gleichung:

$$
a = a_{15} + a_1 (\vartheta_0 - 15) + a_1 u_m (\vartheta_1 - \vartheta_0),
$$

die aus (26) und (27) folgt, ist eine Gleichung, und zwar eine lineare Gleichung, zwischen den beiden Unbekannten a_{15} und a_1. Ein jeder Versuch gibt eine solche Gleichung. Aus allen diesen Gleichungen haben wir a_{15} und a_1 so berechnet, dass die Summe der Quadrate der Fehler der beobachteten Werthe von a ein Minimum ist. So ergab sich:

$$
a_{15} = 16{,}94 \qquad a_1 = -0{,}034 .
$$

Mit Hülfe dieser Zahlen sind die Werthe von ϑ aus (26) und dann die von a aus (27) berechnet.

1) Bède, Fortschritte der Physik, p. 379. 1855.

II. *Ueber die Veränderung der Form und des Volumens dielectrischer Körper unter Einwirkung electrischer Kräfte;*
von D. J. Korteweg in Breda.

1. In der vorliegenden Abhandlung wollen wir versuchen zu beweisen, dass man nach der Theorie der dielectrischen Polarisation Volumenveränderungen eines dielectrischen Körpers unter Einwirkung einer electrischen Kraft voraus zu sehen und zu berechnen im Stande ist.

Wir gehen dabei von der auch durch Clausius[1]) zur Grundlage seiner Berechnungen erwählten Hypothese aus, dass sich im Innern des dielectrischen Stoffes leitende Körperchen, eingefügt in ein nichtleitendes Medium, befinden, deren Gestalt und gegenseitige Lage wir unbestimmt lassen können.

Es sei k die specifische inductive Capacität eines isotropen dielectrischen Stoffes. In einem solchen ist der Coëfficient k von der Richtung der electromotorischen Kraft unabhängig; wenn man den Stoff aber einseitig zusammendrückt, muss k für verschiedene Richtungen verschieden werden, ganz so, wie es durch Boltzmann[2]) für nicht isotrope Stoffe experimentell nachgewiesen ist. Bedeutet also α den relativen Werth der einseitigen Compression, so wollen wir mit $k+x_1\alpha$ die specifische inductive Capacität in der Richtung der Compression und mit $k+x_2\alpha$ die in der Richtung senkrecht zur Compression bezeichnen.

Es sei weiter $T\omega$ die Arbeit, deren man bedarf, um einem Volumenelemente ω des isotropen dielectrischen Stoffes die einseitige Compression α zu ertheilen. Auch diese Arbeit wird für alle Compressionsrichtungen dieselbe sein, wenn wenigstens der Stoff keiner electromotorischen Kraft ausgesetzt ist. Bei Anwesenheit einer solchen Kraft

---

1) Clausius, Die mechanische Wärmetheorie. **2.** p. 66. 1879.

2) Boltzmann, Pogg. Ann. **153.** p. 531. 1874.

F treten aber im Innern des Stoffes electrische Kräfte[1]) auf, wodurch sich die Compressionsarbeit ändert und dabei für verschiedene Richtungen verschieden ist. Mit $\omega\,(T + \Delta T_1)$ bezeichnen wir die Arbeit einer einseitigen, der electromotorischen Kraft F gleichgerichteten, mit $\omega\,(T + \Delta\, T_2)$ die einer zur Kraft F senkrecht gerichteten Compression.

2. Wir werden das folgende einfache electrostatische Princip benutzen:

Ein Conductor A werde wechselsweise mit einer bestimmten Quantität φ positiver Electricität geladen und wieder entladen. In seiner Nähe befinde sich eine gewisse Anzahl von isolirten leitenden Körpern B, ursprünglich im neutralen Zustande. Es sei V_1 der Werth des Potentials des geladenen Conductors A bei einer gewissen Stellung der Körper B. Wir verschieben diese Körper B, bis sie in eine neue Stellung angelangt sind, indem wir sie zugleich durch Druck- und Ziehkräfte beliebigen Formveränderungen unterwerfen. Der geladene Conductor möge dadurch schliesslich ein anderes Potential V_2 angenommen haben. Es ist dann $\frac{1}{2}\varphi\,(V_1 - V_2)$ der Werth der Arbeit, welche die electrischen Kräfte während der Verschiebung und Formveränderung der Körper B geleistet haben.

Die Richtigkeit dieses Princips ergibt sich leicht aus der Betrachtung des folgenden Kreisprocesses:

1) Man ladet den Conductor A, wozu eine Arbeit $\frac{1}{2}\,V_1\,\varphi$ erforderlich ist; 2) man verschiebt die vollkommen elastisch gedachten Körper B, indem man sie Formver-

1) Eigentlich bestehen diese Kräfte ausschliesslich aus den Druckwirkungen der in den leitenden Körperchen erregten Influenzelectricität gegen das nicht leitende Medium. Theilweise kann man zwar diese Druckwirkungen als gegenseitige Anziehungen und Abstossungen der leitenden Körperchen auffassen; sie aber gänzlich dadurch zu ersetzen, wäre nur dann erlaubt, wenn man von vorn herein die leitenden Körperchen dem nicht leitenden Medium gegenüber als incompressibel betrachten könnte. Wir werden aber sehen, dass man dadurch mit gewissen Thatsachen in Widerspruch kommen würde.

änderungen unterwirft; die dazu nothwendige Arbeit sei L_1; 3) man entladet A, wodurch eine Arbeit $\frac{1}{2} V_2 \varphi$ erzeugt wird; 4) man bringt die Körper B in die erste Stellung zurück, wobei man sie ihre frühere Gestalt wieder einnehmen lässt. Die dabei erzeugte elastische Arbeit sei L_2.

Da die Summe aller Arbeit am Ende des Kreisprocesses gleich Null sein muss, so ist:

$$\frac{1}{2} V_1 \varphi + L_1 = \frac{1}{2} V_2 \varphi + L_2$$

oder:

$$L_2 - L_1 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2) . \varphi .$$

Da aber die Körper B ihre frühere Gestalt wieder zurückbekommen haben, ist die Summe aller elastischen Arbeit gleich Null, und $L_2 - L_1$ stellt somit die electrische Arbeit während der Verschiebung und Formveränderung dar.

3. Ein rechtwinkliges Parallelepiped aus dielectrischem Stoffe, dessen Kanten und dessen Volumen wir resp. mit a, b, c und $\omega = abc$ bezeichnen, befinde sich in der Entfernung r vom Mittelpunkte eines sphärischen Conductors vom Radius R, welcher mit einer gewissen Quantität φ positiver Electricität geladen ist. Im Innern des Parallelepipeds wird dann eine electromotorische Kraft F wirken, die im allgemeinen vom Verhältnisse seiner Kanten a, b, c und von seiner Orientirung abhängig und in verschiedenen Punkten verschieden sein wird. Falls aber die Entfernung r im Vergleich mit den Kanten a, b, c und dem Radius R als sehr gross betrachtet werden kann, und falls ebenso die Längsdimension a die beiden anderen Dimensionen weit übertrifft und zugleich ihre Richtung mit der Richtung der Entfernung r zusammenfällt, dann ist:

$$F = \frac{\varphi}{r^2},$$

wobei wir die Definition der electromotorischen Kraft im Innern eines Dielectricums der polaren Definition Thomson's[1]) der magnetisirenden Kraft anschliessen.

1) Thomson, Papers on Electrostatics and Magnetism, § 479, 517. Maxwell, Electricity and Magnetism § 395 — 400. F ist also

Das electrische Moment des Parallelepipeds wird dann sein:

$$\frac{k-1}{4\pi} \cdot F \cdot abc;$$

das Potential des Conductors wird deshalb durch die Anwesenheit des Parallelepipeds um:

$$\frac{k-1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc$$

verringert werden. Für dieses Potential hat man also:

$$V_1 = \frac{\varphi}{R} - \frac{k-1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc.$$

Wird jetzt das Parallelepiped in der Richtung der Kante a um $a\alpha$ zusammengedrückt, so verwandelt sich das Volumen abc in $abc(1-\alpha)$, die specifische inductive Capacität für die Richtung der Längsdimension a in $k + x_1\,\alpha$, das Potential V_1 des Conductors also in:

$$V_2 = \frac{\varphi}{R} - \frac{k + x_1\,\alpha - 1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot (1-\alpha) \,.\, abc$$

oder mit Vernachlässigung der Quadrate und Producte sehr kleiner Grössen:

$$V_2 = \frac{\varphi}{R} - \frac{k-1}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc - \frac{x_1\,\alpha}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \cdot abc + \frac{(k-1)\,\alpha}{4\pi} \cdot \frac{F}{r^2} abc \cdot$$

4. Wir denken uns jetzt folgenden Kreisprocess:

1) Man ladet den Conductor, indem man jede Volumenveränderung des Parallelepipeds verhindert. Die dazu erforderliche Arbeit ist $\frac{1}{2} V_1 \varphi$; 2) man drückt das Parallelepiped in der Richtung der Längsdimension um $a\alpha$ zusammen. Die erforderliche Arbeit ist $(T + \varDelta T_1) \,.\, abc$; 3) man entladet den Conductor, indem man die Formveränderung des Parallelepipeds verhindert. Für die erzeugte Arbeit hat man: $\frac{1}{2} V_2 \varphi$; 4) man lässt das Parallelepiped sein früheres Volumen wieder einnehmen. Die erzeugte Arbeit ist $T\,abc$.

---

eigentlich die electromotorische Kraft im Innern einer im dielectrischen Stoffe befindlichen, unendlich kleinen cylindrischen Höhle, deren Länge im Sinne der dielectrischen Polarisation liegt und den Radius unendlich übertrifft.

Weil wieder nach Beendigung des Kreisprocesses die Summe aller Arbeiten gleich Null sein muss, so hat man:

$$\varDelta T_1 = \frac{\frac{1}{2}(V_2 - V_1)\varphi}{abc} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot \alpha . F \cdot \frac{\varphi}{r^2} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2 . \alpha,$$

welche Beziehung auch unmittelbar aus dem im § 2 entwickelten Principe zu folgern ist, wenn man nur beachtet, dass beim Zusammendrücken des Parallelepipeds unter Einwirkung der electromotorischen Kraft F neben der gewöhnlichen elastischen Arbeit auch noch eine elastische Arbeit gleich der Arbeit $\frac{1}{2}(V_1 - V_2)\varphi$ der electrischen Kräfte mit geändertem Vorzeichen geleistet werden muss.

Falls man das Parallelepiped in einer Richtung senkrecht zur Entfernung r einer relativen Compression β unterwirft, findet man auf gleichem Wege:

$$\varDelta T_2 = \frac{k - x_2 - 1}{8\pi} \cdot F^2 . \beta.$$

5. Wir haben also bewiesen, dass zum Zusammendrücken des Parallelepipeds ω um $a\alpha$ bei Einwirkung der electromotorischen Kraft F eine Mehrarbeit:

$$\varDelta T_1 . \omega = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2 . \omega\alpha = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2 . a\alpha . bc$$

erforderlich ist.

Diese Mehrarbeit kann einer Veränderung des Elasticitätscoëfficienten nicht zugeschrieben werden, denn sie müsste in diesem Falle mit α^2 statt mit α proportional sein. Sie kann also nur durch die Anwesenheit einer dem Drucke entgegenwirkenden constanten Kraft erklärt werden. Für den Werth dieser Kraft pro Flächeneinheit findet man:

$$p_1 = \frac{\varDelta T_1 . \omega}{bc . a\alpha} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi} \cdot F^2.$$

Sie ist also proportional mit F^2, wie es ihre Entstehungsweise aus den Kraftwirkungen der Influenzelectricität im Innern des dielectrischen Stoffes erwarten liess. Neben dieser der electromotorischen Kraft gleichgerichteten Kraft wirken zugleich senkrecht darauf pro Flächeneinheit die Kräfte:

$$p_2 = \frac{k - x_2 - 1}{8\pi} \cdot F^2.$$

Selbstverständlich treten die Kräfte p_1 und p_2 aber auch bei einem sich selbst überlassenen dielectrischen Körper auf, der sich unter der Einwirkung electromotorischer Kräfte befindet, und müssen dann Volumen- und Formveränderungen bedingen. So wird die Kraft p_1 z. B. dem Parallelepiped eine relative Verlängerung:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{k - x_1 - 1}{8\pi\varepsilon} \cdot F^2$$

mitzutheilen streben, wo ε den Elasticitätscoëfficienten, l die Länge des Parallelepipeds, λ seine absolute Verlängerung bedeutet. Solche Volumen- und Formveränderungen dielectrischer Körper durch electromotorische Kräfte sind bisher bei den Experimenten Duter's[1]) und Righi's[2]), nur noch complicirt mit den Druckwirkungen der Electricität, wahrgenommen.[3]) Es ist aber wenig zweifelhaft, wie es sich durch die Anwesenheit von x_1 und x_2 in der betreffenden Formel zeigen wird, dass sie bei den von Duter wahrgenommenen Volumenveränderungen eine Rolle mitspielen und unter günstigen Verhältnissen an und für sich zur Erscheinung zu bringen wären.[4])

6. Wir gehen jetzt dazu über, das Duter'sche Experiment zu berechnen. Hierbei wird bekanntlich eine dünnwandige gläserne Hohlkugel als Leydener Flasche verwendet

1) Compt. rend. **87.** p. 828, 960. 1878; **88.** p. 1260. 1879.

2) Compt. rend. **88.** p. 1262, 1879.

3) Sie sind auch bereits von Volpicelli, Arch. des sc. phys. et. nat. Nouv. Ser. **32.** p. 318. 1862. beobachtet. Die Red.

4) Aus den bekannten Versuchen Thomson's (Proc. R. S. 1860) ergab sich, dass eine electromotorische Kraft $F = 130$ (British. A. Unit.) zum Durchbrechen einer Luftschicht gewöhnlicher Dichte erforderlich war, und diese Kraft kann (Masson, Ann. de chim. et phys. (3) **30.** p. 49. 1850) in einigen isolirenden Flüssigkeiten bis zur zehn- und fünfzehnfachen Grösse gesteigert werden. Bei einem der Experimente Duter's würde die Glaswand einer electromotorischen Kraft 3000 widerstanden haben. Für $F = 2000$; $\varepsilon = 20\,000\,000$ (Elasticitätscoëfficient des Kautschuks) hat man aber $\frac{\lambda}{l} = \frac{k - x_1 - 1}{40\pi}$.

und ihre innere Volumenveränderung gemessen. In einem früheren Aufsatze[1]) haben wir dargethan, wie der innere und äussere electrische Druck auf die Kugelschale eine Volumenvergrösserung von derselben Grössenordnung, wie die von Duter wahrgenommene, verursachen muss, dass es sich also bei seinem Versuche wahrscheinlich nicht um eine fundamental neue Erscheinung handelt. Deutlich war es aber, dass zur vollständigen Berechnung der Erscheinung noch andere Kraftwirkungen herbeizuziehen sind, z.B. die durch Boltzmann a. a. O. experimentell bewiesene Anziehung dielectrischer Körper durch electrische Massen und die durch Righi a. a. O. wahrgenommene Anziehungen und Abstossungen dielectrischer Volumenelemente. Folgendes leichtverständliche Princip wird uns erlauben, alle auftretenden Kraftwirkungen mit in Rechnung zu bringen, ohne auf ihren Mechanismus tiefer einzugehen:

„Wenn ein System elastisch verbundener Körper unter der Einwirkung electrischer Kräfte im Gleichgewicht ist, so ist bei jeder verschwindend kleinen Verschiebung die Arbeit der electrischen Kräfte mit geändertem Vorzeichen gleich der Arbeit der elastischen“, weil nämlich ihre Summe gleich Null sein muss.

Die electrische Arbeit, welche bei einer Formveränderung der geladenen Glaskugel geleistet wird, ist zunächst durch Anwendung des im § 2 erwähnten Princips zu berechnen. Es bezeichne r den Radius, d die Wanddicke der Kugel, φ die Quantität positiver Electricität, womit sie geladen ist, k die specifische inductive Capacität. Wenn man dabei d als klein im Verhältniss zu r betrachtet, hat man für das innere Potential:

$$V_1 = \frac{\varphi}{kr} - \frac{\varphi}{k(r+d)} = \frac{\varphi d}{kr^2},$$

wobei das äussere Potential gleich Null genommen wird.

Verändert sich jetzt r in $r+\delta r$, d in $d+\delta d$, so findet man für das dann eintretende innere Potential:

1) Compt. rend. **88.** p. 338. 1879.

$$V_2 = \frac{\varphi(d+\delta d)}{(k+\delta k)(r+\delta r)^2} = \frac{\varphi d}{k r^2} - \frac{\varphi d}{k^2 r^2}\delta k - \frac{2\varphi d}{k r^3}\delta r + \frac{\varphi}{k r^2}\cdot\delta d,$$

weil aber nach § 1:

$$\delta k = -\frac{\delta d}{d}\cdot x_1 - 2\cdot\frac{\delta r}{r}\cdot x_2,$$

so hat man:

$$V_2 = \frac{\varphi d}{k r^2} + \frac{\varphi(k+x_1)}{k^2 r^2}\cdot\delta d - \frac{2\cdot\varphi\cdot(k-x_2)\cdot d}{k^2 r^3}\cdot\delta r.$$

Die während dieser Formveränderung durch die electrischen Kräfte geleistete Arbeit ist also nach § 2:

$$\tfrac{1}{2}\varphi(V_1 - V_2) = -\frac{\varphi^2(k+x_1)}{2k^2 r^2}\delta d + \frac{\varphi^2\cdot(k-x_2)\,d}{k^2 r^3}\cdot\delta r.$$

Bezeichnen wir deshalb mit r und d Radius und Wanddicke der ungeladenen, mit $r + \Delta r$ und $d + \Delta d$ der geladenen, im Zustande des Gleichgewichtes zwischen electrischen und elastischen Kräften befindlichen Kugel, mit $\delta\Delta r$ und $\delta\Delta d$ eine weitere Variation der Grössen $r + \Delta d$ und $d + \Delta d$, so wird bei der zu dieser weiteren Variation gehörigen Formveränderung durch die electrischen Kräfte eine Arbeit:

$$-\frac{\varphi^2(k+x_1)}{2k^2(r+\Delta r)^2}\delta\Delta d + \frac{\varphi^2(k-x_2)\,d}{k^2(r+\Delta r)^3}\delta\Delta r$$

geleistet. Dafür kann auch, wenn man, wie es gewiss erlaubt ist, Δr und Δd gegen r und d vernachlässigt, geschrieben werden:

$$-\frac{\varphi^2(k+x_1)}{2k^2 r^2}\delta\Delta d + \frac{\varphi^2(k-x_2)\,d}{k^2 r^3}\delta\Delta r,$$

und diese Arbeit muss also der zu denselben Veränderungen gehörigen negativen elastischen Arbeit gleich sein.

7. Zur Berechnung dieser elastischen Arbeit werden wir zweitens die Formeln und Bezeichnungen aus Lamé's[1]) Lehrbuch verwenden. Für die zur Ausdehnung eines Parallelepipeds erforderliche Arbeit hat man:

$$\left[\tfrac{1}{2}N_1\frac{\delta u}{\delta x} + \tfrac{1}{2}N_2\frac{\delta v}{\delta y} + \tfrac{1}{2}N_3\frac{\delta w}{\delta z}\right]\omega \qquad \text{wo:}$$

1) Lamé, Leçons sur la théorie math. de l'élasticité. 1866. Leç. VI et VII.

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\delta u}{\delta x};\quad N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\delta v}{\delta y};\quad N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\delta w}{\delta z};$$

$$\theta = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}.$$

Man kann also für diese Arbeit auch schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\lambda\theta^2 + 2\mu\left[\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta w}{\delta z}\right)^2\right]\right\}\omega.$$

Wenn aber der Radius der Kugel auf $r + \Delta r$, die Wanddicke auf $d + \Delta d$ gebracht wird, hat man für jedes parallelepipedische Volumenelement der Kugelschale:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\Delta d}{d};\quad \frac{\delta v}{\delta y} = \frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\Delta r}{r};\quad \theta = \frac{\Delta d}{d} + \frac{2\Delta r}{r};$$

also für die Arbeit zur Formveränderung eines solchen Elementes:

$$\tfrac{1}{2}\left[\lambda\left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{2\Delta r}{r}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\Delta d^2}{d^2} + \frac{2\Delta r^2}{r^2}\right)\right]\omega$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\Delta d^2}{d^2} + (\lambda + \mu)\frac{4\Delta r^2}{r^2} + \lambda\frac{4\Delta d\,.\,\Delta r}{dr}\right]\omega$$

und für die ganze Arbeit, die auf der Kugelschale, deren Volumen $\Sigma\omega = 4r^2 d\pi$ ist, verwendet wird:

$$2\pi(\lambda + 2\mu)\frac{r^2}{d}\,.\,\Delta d^2 + 8\pi(\lambda + \mu)\,.\,d\,.\,\Delta r^2 + 8\pi\lambda r\,.\,\Delta d\,.\,\Delta r;$$

Die Variation dieser negativen elastischen Arbeit ist, wenn Δd um $\delta\Delta d$, und Δr um $\delta\Delta r$ zunimmt:

$$\left\{4\pi(\lambda + 2\mu)\frac{r^2}{d}\,.\,\Delta d + 8\pi\lambda r\,\Delta r\right\}\delta\Delta d$$

$$+ \left\{16\pi(\lambda + \mu)\,d\,\Delta r + 8\pi\lambda r\,\Delta d\right\}\delta\Delta r;$$

und diese muss der früher berechneten positiven electrischen Arbeit gleich sein.

Daraus ergibt sich:

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\frac{r^2}{d}\,.\,\Delta d + 8\pi\lambda r\,.\,\Delta r = -\frac{\varphi^2(k + x_1)}{2k^2 r^2}$$

und:

$$16\pi(\lambda + \mu)\,d\,\Delta r + 8\pi\lambda r\,.\,\Delta d = \frac{\varphi^2(k - x_2)\,d}{k^2 r^3}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man:

$$\Delta r = \frac{(k + x_1)\lambda + (k - x_2)(\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{\varphi^2}{16\pi k^2 r^3},$$

oder, wenn ε den Elasticitätscoëfficienten:

$$\varepsilon = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$ bedeutet:

$$\Delta r = \left\{ k + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} x_1 - \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} x_2 \right\} \frac{\varphi^2}{8\pi\varepsilon k^2 r^3}.$$

Für die Volumenvergrösserung ΔD der Hohlkugel hat man also, wenn man:

$$k + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} x_1 - \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} x_2 = k'$$

setzt und die Formel:

$$V = \frac{\varphi d}{k r^2}$$

zur Elimination von φ benutzt:

$$\Delta D = 4\pi r^2 . \Delta r = \frac{k' V^2 r^3}{2\varepsilon d^2}.$$

Es muss also in der von uns a. a. O. in den Comptes rendus gegebenen Formel k in k' umgeändert werden, wobei dann k' wohl meistentheils als eine unbekannte Constante wird betrachtet werden müssen, die aber mit k doch immer von derselben Grössenordnung sein wird.

8. Betrachten wir jetzt die experimentellen Resultate Duter's.[1]) Bei den späteren Versuchen findet er in Uebereinstimmung mit unserer Theorie ΔD proportional mit V^2, dagegen umgekehrt proportional mit d statt mit d^2. Der experimentelle Beweis mit nur zwei, doch nur annähernd auf 0,5 und 0,8 mm angegebenen Wanddicken erscheint uns aber ungenügend. Auch ist es auffallend, dass Duter in der ersterwähnten Abhandlung sagt: „Bei Ausführung der Messungen habe ich bemerkt, dass die Volumenveränderungen wesentlich umgekehrt proportional den Quadraten der Dicken sind.“[2]) Diese Angabe bezieht sich

1) Duter, Compt. rend. **87.** p. 960. 1878 u. **88.** p. 1260. 1879.

2) Im Texte steht „raçines carrées“, was aber, wie aus allem übrigen hervorgeht, ein Druckfehler ist.

offenbar auf dieselben Gefässe von 0,5 und 0,8 mm Wanddicke, die er auch später verwendete. Bei einem dritten Gefässe von grösserer Wanddicke (4 mm) nahm er bei diesen ersten Versuchen keine Volumenveränderung wahr, ein Resultat, das wohl mit der citirten Proportionalität mit $\frac{1}{d^2}$, aber, wenn man beachtet, dass er beim Gefässe von 0,5 mm Wanddicke damals eine Volumenveränderung von 30 mm wahrnahm, durchaus nicht mit der später angenommenen in Uebereinstimmung gebracht werden kann. Diese spätere Annahme ist unserer Ansicht nach so sehr mit jeder theoretischen Betrachtung in Widerspruch, dass zu ihrer Erhärtung eine sehr genaue und mannichfaltige Experimentaluntersuchung nothwendig sein würde. Wenn sie sich dann unwahrscheinlicherweise bestätigen würde, so wäre man allerdings genöthigt, Erklärungsversuche mit Hülfe der dielectrischen Polarisation und überhaupt der bekannten electrischen Kräfte aufzugeben. Die Bemerkungen Righi's a. a. O. über die Anziehung und Abstossung dielectrischer Volumenelemente sind richtig. Bei weiterer mathematischer Berechnung würde sich aber ergeben, dass auch sie zur Proportionalität mit $\frac{1}{d^2}$ führen.

Unterwerfen wir eins der Duter'schen Experimente der Berechnung, so können wir z. B. nach seinen Angaben in B. A. U. (Centimeter, Secunde, Massengramm) in unserer Formel substituiren:

$$r = 4{,}3; \qquad d = 0{,}05; \qquad V = 165; \qquad \Delta D = 0{,}0015.$$

Nach seiner Angabe des Compressibilitätscoëfficienten des Glases $\frac{11}{10\,000\,000}$, die offenbar den bekannten Versuchen Colladon's und Sturm's entlehnt ist, würde:

$$\varepsilon = 900\,000\,000\,000$$

sein. Richtiger und jedenfalls in besserer Uebereinstimmung mit dem von Regnault gefundenen cubischen Compressibilitätscoëfficienten ist wahrscheinlich der von Wertheim angegebene Werth:

$$\varepsilon = 600\,000\,000\,000,$$

den wir deshalb anwenden werden.

Die Rechnung gibt dann $k' = 2{,}1$, was wenigstens nichts Unwahrscheinliches an sich hat.

9. Dass sich der directen experimentellen Bestimmung der Coëfficienten x_1 und x_2 bei leicht zusammendrückbaren dielectrischen Stoffen unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen werden, glauben wir nicht, ausserdem können wir mittelst der electromagnetischen Lichttheorie x_1 und x_2 aus den Aenderungen des Brechungsexponenten oder aus der beim einseitigen Zusammendrücken auftretenden Doppelbrechung berechnen. Abgesehen aber von allen experimentellen Schwierigkeiten ist selbstverständlich nur eine näherungsweise Uebereinstimmung zu erwarten, weil die absolute Constanz des Coëfficienten k und also auch von x_1 und x_2 unwahrscheinlich ist. Indem aber bei den Vibrationen des Lichtes äusserst kleine electrische Kräfte auftreten, werden die Volumenveränderungen dielectrischer Stoffe nur unter dem Einflusse grösserer electrischer Kräfte messbar. Da diese Schwierigkeit, wenn auch in geringerem Maasse, sich überall zeigt, wo es gilt, physische aus der Lichttheorie abgeleitete Grössen mit denen zu vergleichen, die durch electrische Versuche gefunden sind, so darf sie auch hier nicht von Berechnungen in dieser Richtung zurückhalten.

Nach § 1 ist für eine gleichförmige Compression θ:

$$\varDelta k = \tfrac{1}{3} . \theta . x_1 + \tfrac{2}{3} . \theta . x_2 .$$

Bedeutet aber n den Brechungsexponenten, so hat man:

$$k = n^2; \qquad \varDelta k = 2 n \varDelta n,$$

also:

$$x_1 + 2 x_2 = \frac{6 n \varDelta n}{\theta}.$$

Bei den meisten Gasen ist bekanntlich annäherungsweise:

$$n^2 = 1 + \alpha . d \qquad (\alpha \text{ eine Constante, } d \text{ Gasdichte}),$$

also auch:

$$2 n \varDelta n = \alpha . d . \theta ,$$

woraus sich ergibt:

$$x_1 + 2 x_2 = 3 (k - 1),$$

welche Relation aus der Gastheorie vorauszusehen war, wenn man beachtet, dass die einzelnen Gasmolecüle eine verschwindend kleine Wechselwirkung aufeinander ausüben, also ihr Moment von der Gasdichte unabhängig ist. Es muss dann nothwendig $(k-1)$ der Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Molecüle proportional sein, also:

$$k + \Delta k - 1 = (k-1)(1+\theta),$$

$$\Delta k = \tfrac{1}{3}\theta \,.\, x_1 + \tfrac{2}{3}\,.\,\theta \,.\, x_2 = (k-1)\theta,$$

woraus sich obige Relation ergibt.

Für CO und NO ist nach den Versuchen Mascart's[1])

$$x_1 + 2x_2 > 3(k-1).$$

Für Wasser sind Versuche von Jamin[2]) und Mascart[3]) angestellt. Nach den letzteren findet man:

$$x_1 + 2x_2 = 2{,}56.$$

Für Glas würde man die Versuche Neumann's[4]) und Wertheim's[5]) benutzen können. Jedenfalls ergeben sich aus diesen Versuchen negative Werthe für x_1 und x_2; auch für $x_1 + 2x_2$. Der Brechungsexponent des Glases verkleinert sich nämlich durch Druck. Dieses Resultat ist deshalb wichtig, weil es nöthigt, die Compressibilität auch der leitenden Körperchen im Dielectricum anzunehmen. Beim Glase muss man sogar voraussetzen, sie seien mehr compressibel, als das nichtleitende Medium. Sind beide gleich compressibel, so erleidet k bei gleichförmiger Compression keine Veränderung, und es ist also $x_1 + 2x_2 = 0$. Macht man nämlich alle Dimensionen, auch der leitenden Körperchen eines Dielectricums, k mal so klein, und lässt man dabei die electromotorische Kraft und die Flächendichtigkeit der auf den Körperchen inducirten Electricität ungeändert, so werden die electrischen Massen k^2-mal, die

1) Mascart, Pogg. Ann. **153.** p. 149. 1874. Beibl. **1.** p. 257—263. 1877.

2) Jamin, Ann. de chim. et phys. (3) **52.** p. 163. 1858.

3) Mascart, Pogg. Ann. **153.** p. 154. 1874.

4) Neumann, Pogg. Ann. **54.** p. 449. 1841.

5) Wertheim, Compt. rend. **32.** p. 289. 1851.

Entfernungen k-mal so klein; es bleiben also die electromotorischen Kräfte ungeändert und das Gleichgewicht ungestört. Das electrische Moment eines einzigen Körperchens ist dadurch k^3-mal verkleinert; da aber die Anzahl derselben in der Volumeneinheit k^3-mal so gross geworden ist, so bleibt das Gesammtmoment der Volumeneinheit, also auch die specifische inductive Capacität ungeändert.

Hieraus kann man folgern, dass für $x_1 + 2x_2 > 0$ die Compressibilität der Körperchen, für $x_1 + 2x_2 < 0$ die des Mediums die grössere ist.

Schliesslich ist es wohl kaum nothwendig zu bemerken, dass wir die angenommene Hypothese der comprimirbaren leitenden Körperchen keineswegs als eine endgültige betrachten. Sie ist aber am leichtesten einer mathematischen Behandlung fähig, und die mit ihrer Hülfe gefundenen Relationen zwischen den physischen Grössen x_1, x_2, p_1, p_2 und ΔD werden wahrscheinlich bei der Einführung anderer Hypothesen bestehen bleiben.

Breda, August 1879.

III. *Beobachtungen über die Unterschiede der beiden electrischen Zustände; von E. Mach und S. Doubrava.*

(Aus dem LXXX. Bd. der Sitzungsber. der k. Akad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth. Juliheft. Jahrg. 1879; mitgetheilt von den Herren Verf.)

Schon im Herbst 1876 hat Mach eine grosse Reihe von Versuchen begonnen und im laufenden Jahre in Gemeinschaft mit Doubrava fortgesetzt, welche zum Zwecke hatten, die einfachsten Grundthatsachen zu ermitteln, auf welche sich die sogenannten Artunterschiede der beiden electrischen Zustände zurückführen lassen. Die Verschiedenheit der Büschel in Gestalt, Länge und im zeitlichen

Verlauf, der ungleiche Charakter der beiden Lichtenberg'schen Figuren, das eigenthümliche Verhalten der Entladung beim Lullin'schen Versuch, die Ventilerscheinungen u. s. w. sind eben so viele scheinbar verschiedene Räthsel, welche sich der jetzt herrschenden abstracten mathematischen Theorie nicht fügen. Würde es gelingen, in einer Eigenschaft des electrischen Zustandes eine gemeinsame Quelle für alle diese Eigenthümlichkeiten zu finden, so wäre hiermit nothwendig ein bemerkenswerther theoretischer Fortschritt gegeben. Nicht nur Faraday[1]) hat dies deutlich gefühlt und ausgesprochen, sondern auch viele Forscher nach ihm.

Wir müssen nun gleich hier bemerken, dass wir von diesem Ziel noch weit entfernt sind. Wäre es uns erlaubt, einzelne Theile unserer Versuche gesondert zu behandeln, so würde es nicht schwer halten, für diese recht plausibel scheinende Theorien aufzustellen. Allein diese Partialtheorien würden sich nicht zu einem befriedigenden Ganzen vereinigen lassen. Wir enthalten uns deshalb dieses Verfahrens.

Kommt man in einem fast abgeschlossenen Gebiet auf eine neue Erscheinung, so ist es natürlich, dass man zunächst versucht, dieselbe auf eine bereits bekannte zurückzuführen, d. h. sie zu erklären. Auf unserm Gebiete würde sich in einem solchen Verfahren eine wohl ungerechtfertigte Ueberschätzung des schon Bekannten dem noch zu Findenden gegenüber aussprechen. In der That könnte hier wohl eine neue Erscheinung über schon bekannte Aufklärung geben. Wir wollen uns also des Theoretisirens enthalten und mehr descriptiv verfahren.

Die vielen angestellten Versuche werden wir vorläufig um so weniger einzeln beschreiben, als die Ergebnisse derselben grossentheils negativ waren. Wir werden die Art der Versuche nur kurz im allgemeinen angeben. Die Lücken unserer Einsicht wollen wir nicht verbergen, son-

---

1) Faraday, Experimental researches in electricity. I. p. 417—472.

dern objectiv und offen darlegen. Zur Vermeidung von Weitläufigkeiten setzen wir die im Folgenden erwähnten Vorarbeiten als bekannt voraus.

Die Lichtenberg'schen Figuren. Obgleich die Formverschiedenheit der positiven und negativen Lichtenberg'schen Figuren nunmehr ein volles Jahrhundert bekannt ist und sehr zahlreiche Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt worden sind, so gibt es dennoch keine haltbare Erklärung der Erscheinung.

Reitlinger[1]) hat zuerst auf den vollständigen Parallelismus der Eigenschaften der Lichtenberg'schen Figuren mit den von Faraday[2]) unter entsprechenden Umständen beobachteten Eigenschaften der Büschel hingewiesen. Er hat dadurch sehr wesentlich zur Klärung und Ordnung des Thatsächlichen beigetragen. Reitlinger's Erklärungsversuch auf Grund der Annahme einer Eigenbewegung der von der positiven Electrode ausgehenden electrisirten Lufttheilchen (Plücker) ist aber den Experimenten gegenüber nicht mehr haltbar.

Dasselbe gilt von der Theorie v. Bezold's.[3]) Was an den durch schöne und zahlreiche Versuche gestützten Auseinandersetzungen v. Bezold's haltbar ist, hat schon Reitlinger angegeben. Wo aber v. Bezold weiter zu gehen sucht, kommt er unserer Meinung nach mit dem Thatsächlichen in Collision.

Nach v. Bezold's Theorie sollte eine negative Entladung, welche von einem Stanniolring auf einer Ebonitplatte gegen das Centrum fortgeht, während die entgegengesetzte Seite im Centrum abgeleitet ist, eine strahlige Figur geben. Eine solche Figur findet v. Bezold wirklich. Wenn man aber den Versuch oft mit kleinen Veränderungen der Dimensionen anstellt, so kann man sich der Ueberzeugung nicht verschliessen, dass man es nur

1) Reitlinger, Wien. Ber. **41.** p. 358. 1860.
2) Faraday, Experimental researches. I. Ser. XII.
3) v. Bezold, Pogg. Ann. **144.** p. 337. 1871.

mit langgestreckten negativen Figuren zu thun hat, die von ausgezeichneten Punkten des Stanniolringes ausgehen, und welche nach der Beobachtung, die v. Bezold selbst an einer andern Stelle anführt, sich gegenseitig ausweichen und sich plattdrücken. Der Charakter der Entladung bleibt durchaus ungeändert.

Auch die Versuche mit Tragantschleim, welche v. Bezold beschreibt, dürften, so hübsch sie auch sind, auf einer sehr äusserlichen Aehnlichkeit beruhen. Würden nicht schon vorhandene Farbentropfen durch die hinzugethane Flüssigkeit plattgedrückt, sondern würde letztere, auf eine Fläche aufgespritzt, ihre eigene Spur hinterlassen, so wäre der Charakter der Figuren gerade umgekehrt.

Was die Plücker'sche Hypothese einer Bewegung der von der positiven Electrode ausgehenden electrisirten Theilchen betrifft, sowie die entgegengesetzte v. Bezold's, so ist zu bemerken, dass beide mit den Thatsachen schwer in Einklang zu bringen sind. Man kann die Bildung der Lichtenberg'schen Figuren mit Explosionen combiniren und dieselbe im Gegentheil in capillaren Räumen vor sich gehen lassen, ohne dass es gelingt, die Form der Figuren zu ändern. Wenn also Bewegungen bei der Bildung der Lichtenberg'schen Figuren eine Rolle spielen, so sind dieselben jedenfalls von anderer Ordnung als diejenigen, welche man auf mechanische Weise erzeugen kann.

Der Charakter der Lichtenberg'schen Figuren hängt wesentlich von dem Medium ab, in welchem die Bildung stattfindet. Das zeigen schon die Versuche von Faraday über die Büschel und die Parallelversuche von Reitlinger über die Lichtenberg'schen Figuren. Vor kurzem hat nun noch ein anderer hervorragender Experimentator, W. Holtz, Figuren in festen Isolatoren erhalten, welche nur durch die Grösse und nicht durch die Form sich unterschieden. Ebenso zeigten die Figuren nur einen Grössenunterschied, welche wir auf mit Magnesia beschlagenen und andererseits mit Stanniol belegten Glasplatten unter Terpentinöl erhielten.

Wir können sagen, dass wir trotz zahlreicher und mannichfaltiger Versuche über den von Reitlinger constatirten Parallelismus zwischen Büschel und Lichtenberg'scher Figur nicht hinausgekommen sind. Wir könnten etwa den Einfluss der Natur des Dielectricums noch mehr betonen.

Der Lullin'sche Versuch. Der Lullin'sche Versuch besteht bekanntlich darin, dass ein Kartenblatt, welches die beiden Ausladerspitzen an verschiedenen Seiten und Stellen berühren, constant an der negativen Spitze durchbrochen wird. Von den älteren Erklärungsversuchen wollen wir hier absehen. Reitlinger[1]) meinte auch diesen Vorgang auf die grössere Länge des positiven Büschels zurückführen zu können. In der That spricht die Erscheinung, welche man im Dunkeln bei blosser Büschelentladung erhält, sehr für diese Auffassung. und dieselbe würde wohl als die natürlichste erscheinen, wenn die Versuche mit Papier in Luft allein dastünden. Allein das Kartenblatt wird in Kohlensäure in derselben Weise durchbrochen, obgleich hier nach Faraday's Beobachtungen über die Büschel eine wesentliche Modification zu erwarten wäre. Noch schwieriger wird diese Auffassung durch die Versuche v. Waltenhofen's.[2])

Die Kenntniss des Thatsächlichen ist durch v. Waltenhofen sehr wesentlich gefördert worden, indem seine Versuche zeigen, dass andere Substanzen wie Papier (obgleich auf diesen, wie wir uns überzeugt haben, ebenfalls das positive Büschel länger ist) in anderer Weise, ja auch an der positiven Spitze durchbrochen werden können. Die Abhängigkeit des Vorganges von dem Stoffe ist hiermit nachgewiesen.

Nach v. Waltenhofen's Versuchen wäre es ferner wahrscheinlich, dass alle Stoffe, welche, mit feuchter Luft gerieben, negativ werden, an der negativen, diejenigen aber,

1) Reitlinger, Wien. Ber. **42.** p. 759. 1860.

2) v. Waltenhofen, Pogg. Ann. **128.** p. 589. 1866.

welche sich unter gleichen Umständen positiv zeigen, an der positiven Electrode durchbrochen werden. Hiermit gedachte v. Waltenhofen die ältere Riess'sche Theorie des Lullin'schen Versuches zu rehabilitiren. Dieser letztern Ansicht können wir uns aber nicht anschliessen, da wir gefunden haben, dass nicht nur die Oberflächenschicht, sondern auch innere Schichten auf den Verlauf des Versuches Einfluss haben. Auch gelingt es nicht, den Versuch durch vorläufige Electrisirung des Blattes oder durch Einleitung von Explosionen, bei welchen feuchte Luft herumgeschleudert wird, zu modificiren. In letzterem Falle konnten wir selbst auf Harzkuchen keine merkliche Electrisirung nachweisen. Da übrigens v. Waltenhofen die Riess'sche Theorie selbst wieder aufgegeben hat, so wollen wir bei diesem Punkte nicht weiter verweilen.

Der Lullin'sche Versuch zeigt bei mannichfaltigen Veränderungen, die man mit demselben vornehmen kann, eine grosse Starrheit. Man kann auf das Kartenblatt zugespitzte Stanniolstreifen aufkleben, welche die Rolle der Electroden übernehmen. Diese Stanniolelectroden können in lange parallele Streifen, in concentrische Ringe u. s. w. umgewandelt werden, ohne dass der Ausfall des Versuches geändert wird. Klebt man eine Reihe von kleinen Stanniolrhomben abwechselnd auf die eine und die andere Seite eines Kartenblattes so, dass die Diagonalen eine Gerade bilden, und die Spitzen zweier aufeinander folgender Rhomben durch Zwischenräume von einigen Millimetern getrennt sind, so wird bei Verbindung des ersten und letzten Rhombus mit den Ausladerenden das Kartenblatt mit derselben Regelmässigkeit an allen negativen Spitzen durchbrochen, mit welcher die Wasserstoffausscheidung an allen Austrittsstellen des positiven Stromes in einer Reihe von Voltametern stattfindet. Wenn man zwischen den Electrodenspitzen in dem Kartenblatte eine kleine Oeffnung oder eine zur Verbindungslinie der Spitzen senkrechte Spalte anbringt, so wird dieselbe vom Funken in der Regel nur dann benutzt, wenn sie hart an die negative Spitze fällt.

Man kann sich die Frage stellen, ob nicht der Lullin'sche Versuch darauf beruht, dass Papier auf einem negativen Potentialniveau eine grössere electrische Festigkeit hat, wie auf einem positiven Niveau.

In der That, da sich die beiden electrischen Zustände ähnlich wie Wärme und Kälte oder wie Zug und Druck verhalten müssen, empfiehlt es sich, eine solche Auffassung zu versuchen. Nimmt man hinzu, dass von zwei Körpern, welche aneinander gerieben werden, der eine (bei dieser electrischen Störung) leichter positiv, der andere leichter negativ wird, so deutet dies auf einen ungleichen Elasticitätscoëfficienten für die beiden electrischen Deformationen, wenn man so sagen darf. Die Differenzen zwischen den Erscheinungen des Zerdrückens und Zerreissens, zwischen der ungleichen Fortpflanzung der Druck- und Zugwellen, der Verdichtungs- und Verdünnungswellen würden ihre Analogien in den Lichtenberg'schen Figuren, im Lullin'schen Versuch und andern noch später zu erwähnenden Versuchen finden. Die ganze Auffassung schien, wenn auch noch sehr unbestimmt, doch einladend genug, um sich durch dieselbe zu neuen Versuchen leiten zu lassen.

Der Lullin'sche Versuch wurde nun so eingerichtet, dass an der negativen Electrode das Kartenblatt doppelt, an der positiven dagegen einfach lag. Es fanden dann eben so viele Durchbrechungen an der positiven wie an der negativen Electrode statt. Legte man nun das Kartenblatt an der negativen Electrode dreifach, an der positiven einfach, so entstanden alle Durchbrechungen an der positiven Spitze. Diese Versuche begünstigen nun zwar die Meinung, dass Papier an der negativen Electrode etwa die doppelte Festigkeit darbietet wie an der positiven, allein es ist zu bedenken, dass ein genügend grosses mechanisches Hinderniss an der negativen Electrode, mag dort die Durchbrechung aus was immer für einer Ursache stattfinden, schliesslich immer den Sieg davontragen muss. Hierzu kommt noch, dass ein Kartenblatt auch dann noch an der negativen Electrode durchbrochen wird, wenn die

positive am Rande des Blattes steht, also die Luft der Weg des kleinsten Widerstandes zu sein scheint.

Es gelingt auch nicht mit Hülfe des Riess'schen Luftthermometers, eine grössere Consumtion von electrischer Arbeit nachzuweisen, wenn in einer Funkenstrecke das Kartenblatt an der positiven statt an der negativen Electrode aufgestellt wird. Eben so wenig kann man mit dem Electrometer im erstern Falle eine grössere Potentialniveaudifferenz vor der Entladung finden.

Richtet man einen verzweigten Auslader mit vier Spitzen *abcd* Taf. I Fig. 1 so her, dass unter vielen Versuchen eben so viele Funken über *ac* wie über *bd* gehen, so finden allerdings beim Einsetzen der Kartenblätter *PP'* alle Entladungen über *ac* statt, sodass also nur das Kartenblatt an der negativen Electrode durchbrochen wird. Allein man kann sich auch vorstellen, dass man hier die Entladung von der positiven Spitze zur negativen Platte vor sich hat, die bekanntlich leichter eintritt wie die entgegengesetzte. Bringt man bei *abcd* Kugeln an, so wird *P* eben so oft durchbrochen, wie *P'*. Wir könnten also unsere oben erwähnte Anschauung nur in gezwungener Weise aufrecht halten. Wir kommen auch hier vorläufig nicht über die Einsicht hinaus, die wir hauptsächlich v. Waltenhofen verdanken, dass der Verlauf des Lullin'schen Versuches vom Stoff abhängt.

Analoga des Lullin'schen Versuches. Wenn man den Lullin'schen Versuch aufmerksam betrachtet, so findet man, dass die Anordnung an der einen Electrode in Bezug auf jene der andern (nach der Ausdrucksweise von Paulus[1]) centrisch symmetrisch ist, indem die Anordnung an einer Electrode aus jener der andern durch Drehung um 180° hervorgeht. Es liegt also nahe, andere Anordnungen von centrischer Symmetrie aufzusuchen und nachzusehen, ob auch in diesen Fällen von zwei Wegen,

1) Paulus, Zeichnende Geometrie. Metzler, Stuttgart, 1866.

welche sich nur durch die verkehrte Ordnung der Elemente unterscheiden, nur der eine gewählt wird. Theils ist dies an sich interessant, theils auch kann man hoffen, durch Variation dem Wesen des Lullin'schen Versuches näher zu kommen.

Indem wir diesen Weg verfolgten, verfielen wir zuerst auf den bekannten, schon von Belli und Faraday[1]) angestellten Versuch und dann auf eine ganze Reihe anderer, von welchen wir nachher fanden, dass sie grossentheils schon von Righi[2]) angestellt worden waren. Gleichwohl bedauern wir unsere Unkenntniss der Versuche Righi's nicht, da wir durch unsere Versuche auch neue Thatsachen kennen gelernt haben.

Fast bei jeder Electrodenanordnung von centrischer Symmetrie wird von den beiden gleichen Wegen nur der eine von dem Funken eingeschlagen. Wir wollen vorläufig blos ein einziges Beispiel beschreiben, welches seiner Einfachheit wegen sehr lehrreich ist.

In der Taf. I Fig. 2 gehören alle dick ausgezogenen Theile zur positiven, alle dünn ausgezogenen zur negativen Electrode. Die kleinen Kugeln ab sind isolirt durch die grossen Hohlkugeln AB hindurchgesteckt und mit denselben concentrisch. Bei den angegebenen Zeichen findet die Entladung einer Flasche immer zwischen b und B und nie zwischen a und A statt. Ist das Paar aA allein vorhanden, so kommt es nur zu einer Büschel- und nicht zu einer Funkenentladung.

Die natürliche Auffassung, die man von der electrischen Durchbrechung eines Isolators haben kann, ist folgende. An derjenigen Stelle, an welcher die electrische Scheidungskraft (das Potentialgefälle parallel der Kraftlinie) am grössten ist, beginnt das Zerreissen des Isolators (durch Electrolyse oder einen analogen Process). Damit erreicht das Potentialgefälle an anderen Stellen den nöthigen Werth und das Reissen schreitet fort. Obiger That-

1) Faraday, Experimental researches. Vol. I. Ser. XIII.
2) Righi, Nuovo Cimento. Ser. II. Tom. XVI.

sache gegenüber ist nun diese Anschauung ungenügend. Nennen wir die Potentialfunction V, so hat dieselbe in dem kugelschalenförmigen Luftraume die Laplace'sche Gleichung:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

zu erfüllen, welche wir mit Rücksicht auf den gegebenen Fall, da V eine Function von r, der Entfernung von dem gemeinschaftlichen Kugelmittelpunkt ist, durch:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0$$

ersetzen können. Das Integral der letztern ist:

$$V = \frac{A}{r} + B,$$

worin A und B die Integrationsconstanten sind. Geben wir der Potentialfunction an der einen Electrode den Werth M, an der andern den Werth N, nennen wir den Radius der kleinen Kugel a, jenen der grossen b, so finden wir für die Potentialfunction in den beiden Kugelschalenräumen:

$$V_1 = (M - N)\frac{ab}{b-a}\frac{1}{r} + \frac{Nb - Ma}{b-a}$$

$$V_2 = -(M - N)\frac{ab}{b-a}\frac{1}{r} + \frac{Mb - Na}{b-a}.$$

Für die Gefälle hätten wir nun $\frac{dV_1}{dr} = -\frac{dV_2}{dr}$. Dieselben würden für homologe Punkte der beiden Kugelschalenräume nur durch das Zeichen verschieden sein. Käme es auf die Gefälle allein an, so könnte die obige Thatsache nicht bestehen. Wir müssen hieraus schliessen, dass entweder der Werth $\frac{dV}{dr}$ für die Entladung nicht allein massgebend ist, oder dass in den Systemen Aa, bB an den Grenzflächen die Werthe der Potentialfunction nicht vertauscht werden können, ohne das Gesetz des Verlaufes von V (auch abgesehen vom Zeichen) zu ändern. Beide Folgerungen bieten Schwierigkeiten.

Wir wollen uns mit diesem Beispiel begnügen, obwohl

wir aus Righi's Versuchen und aus den unserigen sehr viele ganz analoge Fälle anführen könnten, die uns nicht so leicht erklärbar erscheinen, als sie Righi erschienen sind.

Nicht unbemerkt darf bleiben, dass Righi auch eine centrisch symmetrische Electrodenanordnung $\begin{matrix} A B \\ B A \end{matrix}$ aus zwei Metallen A und B versucht und gefunden hat, dass die Entladung z. B. immer nur zwischen $+A$ und $-B$, nicht zwischen $-A$ und $+B$ stattfindet. Bewährt sich dieser Fund, so tritt also auch hier die Beziehung der electrischen Zustände zum Stoff hervor.

Die sogenannte ungleiche Schlagweite der beiden Electricitäten. Es ist schon von Faraday[1]) und neuerdings wieder von G. Wiedemann und Rühlmann[2]) beobachtet worden, dass unter übrigens gleichen Umständen auf einer Electrode (bei Ableitung der andern zur Erde) die zur Entladung nöthige Electricitätsmenge etwas grösser ist, wenn sie das positive, als wenn sie das negative Zeichen hat. In dem zuvor erwähnten Versuch (Taf. I Fig. 2) scheint nun auch die Schlagweite zu variiren, je nachdem die innere Kugel positiv oder negativ ist. Wir kamen also naturgemäss auf die im Folgenden beschriebenen Versuche.

Die beiden Belegungen einer Flasche waren durch ein Funkenmikrometer verbunden, die innere Belegung communicirte mit einem Spiegelelectrometer, welches demjenigen ähnlich war, das Gruss und Biermann[3]) verwendet haben, und die äussere Belegung war zur Erde abgeleitet. Bei einer gegebenen Distanz der Ausladerkugeln zeigte nun unmittelbar vor der Entladung das Electrometer regelmässig einen grössern Ausschlag, wenn die innere Belegung positiv, als wenn sie negativ war. Die Ausschläge

1) Faraday, Experiment. researches. § 1470, 1501.

2) G. Wiedemann und R. Rühlmann, Pogg. Ann. **145.** p. 235. 1872. Die Theorie der Verfasser, in welcher ein ganz ungewöhnlicher Gebrauch vom Potentialbegriff gemacht wird, ist uns unverständlich geblieben.

3) Gruss und Biermann, Wien. Ber. **77.** p. 463. 1878.

verhielten sich wie 6:5, ja zuweilen sogar wie 5:4. Es schien hiernach eine grössere Potentialniveaudifferenz zur Entladung nöthig, wenn die Flasche positiv geladen war.

Der Satz ist so auffallend, dass man sich die Frage stellen muss, was er für einen Sinn hat, und ob er überhaupt einen hat.

Denkt man sich eine symmetrische Franklin'sche Tafel mit einem symmetrischen Auslader versehen (Taf. I Fig. 3) und die beiden Belegungen zu dem Niveau $+\frac{V}{2}$ und $-\frac{V}{2}$ geladen, so ist hier ohne Zweifel ein Zeichentausch der Ladungen auf A und B ohne Belang. Hebt man aber eine den ganzen Apparat umschliessende Fläche auf $+\frac{V}{2}$ oder $-\frac{V}{2}$, so erhält man auf den Belegungen AB die Niveauwerthe $+V$, o oder o, $-V$. Diesen beiden Fällen entspricht aber nach unserem Experimente eine ungleiche Schlagweite, obgleich sie von dem symmetrischen Fall nur unwesentlich verschieden zu sein scheinen.

Die Differenzen zwischen dem symmetrischen Fall und den unsymmetrischen Fällen, wie wir kurz sagen wollen, können nur in folgenden Umständen liegen:

1. Im symmetrischen Fall sind die Niveauflächen in Bezug auf die Symmetrieebene der Ausladerkugeln ebenfalls symmetrisch, in den unsymmetrischen Fällen hingegen gibt es bekanntlich eine Niveaufläche, welche um die Kugel mit dem Nullniveau eine Schlinge bildet und eine zweite Schlinge, welche beide Kugeln umfasst, weil die Erde nicht $\pm\frac{V}{2}$, sondern das Niveau Null hat.

2. In den unsymmetrischen Fällen wird das Nullniveau praktisch durch Ableitung zur Erde hergestellt, welche Ableitung irgend eine Symmetriestörung einführen könnte.

3. Die symmetrischen und die unsymmetrischen Fälle unterscheiden sich durch das absolute Niveau.

Das Experiment lehrt, dass alle drei Punkte nicht von Belang sind. Wir construirten einen Auslader (Taf. I

Fig. 4). Beide Ausladerkugeln sind isolirt durch eine leitende Hülle *H* hindurchgesteckt und die eine *B* kann mit derselben, wie es in der Figur angedeutet ist, in leitende Verbindung gesetzt werden. Verbindet man zuerst *A* mit der innern Belegung der positiv geladenen Flaschen und leitet *B* zur Erde ab und setzt dann *B* mit der negativen innern Belegung in Verbindung, während man *A* ableitet, so gibt doch in dem ersten Fall das Electroskop einen grössern Ausschlag, obgleich in beiden Fällen die positive Electricität an den Ausladerkugeln sich in denselben Verhältnissen befindet. Nur das Zeichen der innern Belegung, nicht die Ausladerform und Ausladerstellung beeinflusst den Electroskopausschlag.

Es wurde ein verschiebbarer Auslader construirt, an welchem bei rascher Annäherung der Ausladerkugeln der bei einer gewissen Distanz überspringende Funke eine Marke machte, die zur Bestimmung der Funkenlänge diente. Bei Bewegung des Ausladers wurde die Verbindung der äussern Flaschenbelegung mit der Erde unterbrochen, Bei gleichen Electroskopausschlägen waren nun die Funken der negativ geladenen Flasche länger wie bei positiver Ladung (etwa im Verhältniss 6 : 5). Die Ableitung zur Erde als solche ist also nicht massgebend.

Die Unabhängigkeit der Erscheinung vom absoluten Niveau constatirten wir dadurch, dass wir den ganzen Apparat sammt dem Experimentator in einen isolirten leitenden Kasten einschlossen, welcher selbst beliebig geladen werden konnte. Obwohl eine solche Abhängigkeit von vornherein unwahrscheinlich war, so konnte sie a priori doch nicht ausgeschlossen werden, da ja im Gebiete der Electricität möglicherweise etwas der absoluten Temperatur Analoges existirt.[1])

Entladet man eine Flasche durch eine Funkenstrecke

1) Wir können hier auf die vielen schönen Vorlesungsversuche, welche sich mit unserem Apparate ausser den schon von Faraday erwähnten anstellen lassen, nicht eingehen.

von constanter Grösse und ein Riess'sches Luftthermometer, so erhält man bei positiver Ladung einen grössern Electroskopausschlag, aber denselben Thermometerausschlag. Entladet man durch den verschiebbaren Auslader und das Thermometer bei gleichen Electroskopausschlägen, so ist bei negativer Ladung die Funkenlänge und die Wärmeentwicklung beträchtlich grösser. Die entwickelte Wärme geht proportional dem Potential der Flaschenladung und bei constanter Flaschenbelegung proportional dem Quadrate der Potentialniveaudifferenz. Das Thermometer zeigt also variable Niveaudifferenzen, wo das Electroskop constante zeigt und umgekehrt. Das eine der beiden Instrumente muss also unverlässlich sein.

Um die Niveaudifferenzen der innern und äussern Flaschenbelegung mit Sicherheit zu erhalten, wurde bei späteren Versuchen der ausschlagende Theil des Electroskopes mit einer leitenden Hülle umgeben. Man konnte nun den ausschlagenden Theil mit der innern, die Hülle mit der äussern Flaschenbelegung verbinden oder umgekehrt. Hierbei zeigte sich nun bei Einschaltung eines Funkenmikrometers von constanter Funkenstrecke der Ausschlag vor der Entladung immer grösser, wenn der ausschlagende Theil mit der positiven Belegung verbunden war, mochte diese Belegung eine innere oder äussere, eine isolirte oder abgeleitete sein.

In Bezug auf die Flasche war also die vermeintliche ungleiche Schlagweite der beiden Electricitäten eine Täuschung, welche dadurch hervorgerufen war, dass das Electroskop bei derselben Niveaudifferenz zwischen Hülle und ausschlagendem Theil grössere Anschläge gibt, wenn letzterer positiv ist. Diese Thatsache ist übrigens für sich bemerkenswerth.

Denken wir uns eine leitende geschlossene Fläche A, umgeben von einer zweiten leitenden geschlossenen Fläche B und zwischen beiden ein Dielectricum. Geben wir A und B bestimmte Niveauwerthe, so ist nach der allgemein angenommenen Ansicht bei unveränderter Lage und Form

von A und B der electrische Druck auf ein Element von A durch die Niveaudifferenz von A und B bestimmt. Dieser Druck könnte sich also nicht ändern, wenn die Niveauwerthe von A und B vertauscht werden. Gleichwohl zeigen unsere Experimente das Gegentheil. Man kann die Erscheinung dadurch zu erklären suchen, dass man bei derselben Niveaudifferenz zwischen A und B an A ein grösseres Potentialgefälle annimmt, wenn es den positiven Niveauwerth hat. Letzteres deutet wieder darauf, dass bei einer gewissen Grösse der Niveaudifferenz das Dielectricum aufhört, ein vollkommener Isolator zu sein, und electrische Strömungen beginnen, welche den normalen Verlauf der Niveauflächen stören und zwar (analog den electrolytischen Vorgängen) an beiden Polen in verschiedener Weise.

Denken wir uns A und B auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, so können wir den Verlauf der Potentialfunction durch $C + V = f(x, y, z)$ ausdrücken, wobei C eine willkürliche Constante ist, weil es auf den absoluten Niveauwerth nicht ankommt. Bei Vertauschung der Niveauwerthe auf A und B würden wir nach der herrschenden Ansicht erhalten $C - V = f(x, y, z)$. Diese einfache Umkehrung kann aber praktisch nicht hergestellt werden oder scheint sich wenigstens (weil sie in Bezug auf die Entladungsvorgänge nicht gleichwerthig ist) nicht halten zu können.

Die Asymmetrie der Niveauflächen zwischen den beiden Electroden. Im Anschlusse an die beschriebenen, von Mach und Doubrava gemeinschaftlich angestellten Versuche hat Doubrava noch allein eine Versuchsreihe ausgeführt, deren Ergebnisse folgende waren.

Wenn die Electroden der Holtz'schen Maschine, an welcher sich die inneren Belegungen von zwei grossen Flaschen befinden, durch eine Wasserröhre von 6,8 m Länge und 3 mm Weite verbunden waren, so zeigte die Röhre in der Mitte, wo sie unterbrochen war, beim Gang der Maschine immer eine negative Ladung. Dieselbe konnte

an einem durch einen abgeleiteten Schirm geschützten Electroskrop nachgewiesen werden.

Wurden 26 Wasserröhren von der Gesammtlänge von 8 m (Weite 2 mm) angewendet, so konnte man den Punkt, der dem Nullniveau entsprach, aufsuchen. Derselbe lag stets der positiven Electrode beträchtlich näher und wurde beim Polwechsel der Maschine um etwa einen Meter verschoben.

Eine Metallplatte in die Mitte zwischen zwei spitze Electroden (Nähnadeln) gestellt und sammt den Electroden in Terpentinöl getaucht, zeigte nur unregelmässige kleine Schwankungen der Ladung; sie war neutral. In Olivenöl hingegen (welches den Lullin'schen Versuch umkehrte) war die Platte stets positiv geladen.

Es wurde ein Electroskop, ähnlich demjenigen, welches zu den früheren Versuchen diente, in eine leitende Hülle eingeschlossen und dieselbe einmal mit Terpentinöl, dann mit Olivenöl gefüllt, sodass der ausschlagende Theil ganz in diese Flüssigkeit eingetaucht war. Nun brachte man die Hülle und den ausschlagenden Theil auf eine gewisse Niveaudifferenz, wobei der ausschlagende Theil abwechselnd positiv und negativ war. Für Terpentinöl trat mit dem Zeichenwechsel keine Aenderung des Ausschlages ein. In Olivenöl aber standen bei positiver und negativer Ladung des ausschlagenden Theiles die Ausschläge im Verhältniss 3:4.

Sämmtliche in diesem Abschnitte erwähnte Erscheinungen lassen sich in einen Ausdruck zusammenfassen, wenn man sagt, dass das Niveau, welches den Mittelwerth zwischen den beiden Electroden darstellt, in Wasser gegen die positive, in Olivenöl gegen die negative Electrode verschoben wird, statt denjenigen Platz einnehmen, den es nach der Theorie in einem vollkommenen Isolator einnehmen sollte. Die Ursache dieser Verschiebung bleibt noch zu ermitteln, doch zeigt sich auch hier der Einfluss des Stoffes.

IV. *Bemerkung über die electrische Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes; von Hermann Herwig.*

In der kürzlich veröffentlichten, an interessanten Resultaten im übrigen reichen Abhandlung des Hrn. Hittorf[1]), „über die Electricitätsleitung der Gase", ist ein gegen mich gerichteter Punkt enthalten, dessen Richtigkeit ich jedoch nicht anerkennen kann. Derselbe betrifft die von mir behauptete[2]) electrische Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes. Hr. Hittorf hat in dieser Beziehung einen Versuch ausgeführt[3]), dessen negatives Resultat indessen nichts über die Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes, vielmehr nur die Nichtleitungsfähigkeit des Wasserstoffgases für schwache Kräfte beweist. Alle Versuche, in denen fremde Gase, die nicht leiten, zum Druckausüben neben dem Quecksilberdampfe verwendet werden, sind zur Entscheidung der Frage nach der Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes offenbar unbrauchbar. Der Druck im Untersuchungsgefässe darf nur vom Quecksilberdampfe selbst ausgeübt werden und muss so gross sein, dass die zugehörige Dichtigkeit des Dampfes eine am empfindlichen Galvanometer bereits bemerkbare Leitungsfähigkeit desselben bedingt. Aus letzterem Grunde sind auch Versuche mit einem langgestreckten Barometerraume, dessen eines Ende, worin etwa ein langer, fast bis zum andern Ende reichender Platindraht eingeschmolzen ist, gekühlt wird, während das andere, die Quecksilberkuppe enthaltende Ende erhitzt wird, natürlich aussichtslos.

Ich habe deshalb in meiner frühern Arbeit die dort näher beschriebene Untersuchungsmethode angewandt. Dem dabei störenden Einflusse der Glaswände habe ich von

1) Hittorf, Wied. Ann. **7.** p. 553. 1879.
2) Herwig, Pogg. Ann. **151.** p. 350. 1874.
3) l. c. p. 593.

vornherein eine sorgfältige Aufmerksamkeit gewidmet. Hr. Hittorf ist dennoch der Ansicht, dass dieser Einfluss alle meine Versuchsresultate bedingt habe, und führt speciell an, dass die Abschwächung der Dampfleitung, die ich wesentlich durch Oxydirung der Quecksilberkuppen zu erklären suchte, weiter nichts als die sich ausbildende Polarisation des Glases sei. Schon dieser Punkt ist mit meiner damaligen Angabe nicht vereinbar, wonach die Abschwächung der behaupteten Dampfleitung durchaus nicht von dem fortgesetzten Einschalten derselben Glasstrecke abhängt, sondern von ganz anderen Umständen.

Dann aber müsste doch eine solche Auffassung meiner Versuche auch die übrigen Seiten derselben, die sicher beobachtete Thatsachen enthalten, irgendwie zu erklären im Stande sein. Und in dieser Beziehung dürften, um nur einiges beispielsweise anzuführen, die folgenden Thatsachen kaum überwindliche Schwierigkeiten darbieten: entschiedener Einfluss des Stromes auf die Verdampfung der positiven Quecksilberkuppe[1]); bessere Leitung eines von grosser zu kleiner Kuppe, als eines umgekehrt fliessenden positiven Stromes, welchen Unterschied man für die zugehörigen Glasquerschnitte leicht als nicht existirend nachweisen kann.

Ich kann deshalb die Erklärung des Hrn. Hittorf schon insoweit für keine glückliche halten.

Den Hauptwerth legt übrigens Hr. Hittorf offenbar darauf, dass meine Bemühungen, den Einfluss des Glases zu ermitteln und in Anrechnung zu bringen, wegen mangelhafter Contacte zu falschen Resultaten geführt haben sollen; und darin kann ich ihm am wenigsten beistimmen. Eine einfache Rechnung kann hier Anhaltspunkte geben.

---

1) Bei einer spätern Gelegenheit (Wied. Ann. **1.** p. 73. 1877) habe ich das analoge Verhalten stärkerer electrischer Kräfte hiermit in Parallele gestellt. Hr. Gernez hat ganz kürzlich gleichfalls Beobachtungen über den Einfluss positiver electrischer Ladungen auf die Verdampfung gemacht (Compt. rend. **89.** p. 303. 1879), ohne, wie es scheint, meine Versuche am Quecksilber gekannt zu haben.

Ich habe angeführt, dass im günstigsten Falle meiner Beobachtungen, bei 4 Grove's, etwa 400° C. und 4 mm Röhrendurchmesser, der Dampf gegen 50 000 S.-E. Widerstand dargeboten habe. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung der sonstigen Zahlenangaben, dass die mangelhaften Contacte bei meinen Versuchen fast durchweg Widerstände von mindestens mehreren Millionen S.-E. ins Spiel gebracht haben müssten, eine doch wohl etwas gewagte Behauptung. Die Contacte zur Untersuchung der Glasleitung waren damals in zweierlei Art hergestellt, einmal durch Hineinpressen von aufgerollten Platinblechen vermittelst Messingdrahtbündel in eine Parallelglasröhre, dann durch äussere Umwickelung der eigentlichen Versuchsröhre mit einem Platindrahte an der einen Grenze des Dampfraumes. Im letztern Falle war der Draht so scharf angezogen beim Wickeln, dass mehrmals in meinem Beobachtungsjournale verzeichnet steht, dass er bei beginnendem Weichwerden des Glases rings herum laufende schwache Rinnen demselben eingedrückt hatte.

Für beide Contactarten habe ich trotzdem jetzt noch einige weitere Versuche ausgeführt und zwar folgendermassen. Um die erste Contactart zu prüfen, zerschnitt ich ein einziges Röhrenstück (mit demselben Querschnitte, wie er damals meistens benutzt war) in zwei Röhren, schmolz sie an einem Ende zu, füllte die eine auf eine längere Streke mit Quecksilber und führte in die andere ein aufgerolltes Platinblech, dieselbe Längsstrecke ausfüllend, ein, aber absichtlich mit weniger sorgfältig durchgeführter Hineinpressung wie bei meinen früheren Versuchen. Beide Röhren stellte ich nebeneinander in ein Quecksilberbad, welches auf etwas über 350° C. gehalten wurde, und verglich ihre Glasleitung, wobei also die eine Röhre beiderseits Quecksilbercontact, die andere dagegen auf der einen Seite den Contact mit dem Platinbleche hatte.

Für Untersuchung der zweiten Contactart presste ich möglichst sorgfältig ein Platinblech in eine Glasröhre und

legte ihm gegenüber aussen einen ziemlich dünnen Platindraht herum, der, über eine Rolle führend, durch Gewichte scharf angezogen werden konnte. Ich führte dann abwechselnd Messungen der Glasleitung durch, wenn einmal der Draht nur bei dem einfachen Herumlegen um die Röhre mit der Hand mässig angezogen war und dann nicht weiter belastet wurde, und wenn zweitens eine Belastung stattfand, die nur wenig unter dem Zerreissen des Drahtes blieb.

Die so durchgeführte Untersuchung beider Contactarten hat ergeben, dass durch die mangelhafteren Contacte nur geringe Unterschiede hervorgerufen werden, die absolut nicht im Stande sind, die früheren Versuchsresultate auch nur annähernd zu erklären.

Um noch eine weitere Probe zu machen, liess ich einige Glasröhren anfertigen von der in Fig. 5 Taf. I dargestellten Form. In *a* ist ein Platindraht in die geschlossene Röhre eingeschmolzen, bei *b* ist das weitere Rohr ringsum an das engere angeschmolzen. Das innere Rohr wurde bis etwa *c*, das äussere höher bis *d* mit Quecksilber gefüllt. In die Oeffnung des Heizapparates (gerade wie in der frühern Abhandlung beschaffen) wurde dann die Umgebung von *b* gebracht und möglichst an *b* die das Quecksilber des offenen, innern Röhrenendes abgrenzende Kuppe im Falle der Dampfentwickelung hergestellt. Leider besass das Glas, welches der Glaskünstler verwandt hatte, eine verhältnissmässig ziemlich gute Leitungsfähigkeit, sodass der Stromdurchgang durch das Glas vom innern zum äussern Quecksilber auf der weithin sehr heissen Strecke von *b* aus links zu wenig erschwert war, wie Versuche ohne Dampfschicht bei *b* zeigten. Die Unterschiede in der Leitung von *a* nach *c* und von *a* nach *d*, falls bei *b* in der innern Röhre eine Dampfschicht vorlag, konnten deshalb nicht gross ausfallen. Ich habe indessen in mehreren Versuchen mässige Unterschiede und zwar in dem Sinne, dass die Leitung von *a* nach *c* leichter vor sich ging, deutlich beobachtet. Dabei sprach auch die über-

haupt vorhandene Intensität der Ströme sehr für eine Dampfleitung.

Nach all dem glaube ich keinen hinreichenden Grund zu haben, an der Richtigkeit meiner früheren Versuchsresultate zu zweifeln. Wenn man bei Untersuchung der fraglichen Leitungsfähigkeit einer Substanz zu wählen hat zwischen zwei Anordnungen, bei deren einer neben der fraglichen Substanz noch ein entschiedener Nichtleiter ins Spiel tritt, und bei deren anderer neben der fraglichen Substanz ein anderer Leiter, dessen Einfluss auf die Gesammtleitung man jedoch angenähert beurtheilen kann, eintritt, so meine ich, könnte es nicht zweifelhaft sein, dass man die zweite Anordnung für die richtigere Versuchsanordnung erklären und ihren Resultaten die grössere Beachtung schenken muss. Uebrigens sehe ich es sehr wohl ein, wie wünschenswerth es wäre, wenn man die Leitungsfähigkeit des Quecksilberdampfes ganz für sich, ohne alle störenden Nachbarkörper untersuchen könnte, vermag jedoch hierfür keine passende einfache Vorrichtung anzugeben.

Darmstadt, den 11. November 1879.

V. *Ueber eine directe Messung der Inductionsarbeit und eine daraus abgeleitete Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme; von A. von Waltenhofen.*

(Aus dem LXXX. Bd. der Sitzungsber. der k. Akad. d. Wiss. II. Abth. Juliheft. Jahrg. 1879; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Aus dem Gesetze der Erhaltung der Energie folgt unmittelbar, dass die Arbeit, welche ein electrischer Strom in einem Leiter zu leisten vermag, der Arbeit gleich kommen müsse, welche man aufzuwenden hätte, um denselben Strom in demselben Leiter durch Induction hervorzurufen.

Einige auf die Theorie der electromagnetischen Maschinen bezügliche Versuche, mit welchen ich in letzter

Zeit beschäftigt war, haben mir den Gedanken nahe gelegt und zugleich die Mittel an die Hand gegeben, den oben ausgesprochenen Satz experimentell zu constatiren.

Mit Rücksicht auf die Umkehrbarkeit der Functionen eines electromagnetischen Motors und eines magnetoelectrischen Inductors hat meine Aufgabe eine gewisse Aehnlichkeit mit dem von Favre gelösten Probleme: direct mit Hülfe des Calorimeters die Wärmemenge nachzuweisen, welche zum Betriebe einer im Schliessungskreise einer hydroelectrischen Säule befindlichen electromagnetischen Maschine verbraucht wird. Es sollte nämlich ebenso unmittelbar mit Hülfe eines Federdynamometers die Anzahl der Meterkilogramme bestimmt werden, welche als Arbeit aufgewendet werden müssen, um durch eine magnetoelectrische Inductionsmaschine in einem gegebenen Schliessungskreise einen electrischen Strom von bestimmter Stärke zu erzeugen, beziehungsweise zu unterhalten.

Als Versuchsobject diente mir die im 12. Bande von Carl's Repertorium von mir beschriebene „magnetoelectrische Maschine für constanten Strom“ von Siemens und Halske[1]), bei welcher der zwischen den Polen von 50 Stahlmagneten rotirende v. Hefner-Alteneck'sche Inductor die Ströme liefert.

Als Federdynamometer benutzte ich auf Anrathen meines Collegen Hrn. H. Gollner, Professors des Maschinenbaues, eine dynamometrische Kurbel neuester Construction von E. Kraft und Sohn in Wien, zu deren Anbringung das in der citirten Abhandlung mit *F* bezeichnete Zahnrad (nach Entfernung der gewöhnlichen Kurbel) mit einer passenden Hohlwelle versehen worden ist. Es scheint mir nicht nöthig, die Einrichtung dieser Kurbel im Detail zu beschreiben. Im Principe ist dieselbe aus der auf Taf. I Fig. 6 befindlichen schematischen Zeichnung ersichtlich.

Auf die vorhin erwähnte Hohlwelle *b*, welche auf der

1) Im Titel der citirten Abhandlung ist der störende Druckfehler Siemnes statt Siemens übersehen worden.

feststehenden Axe C läuft, wird das Dynamometer mittelst der Büchse B, welche dem sogenannten Sechsschraubenfutter einer Drehbank ähnlich ist, festgeschraubt. An dieser Büchse ist die Feder f befestigt, welche eigentlich als Kurbelarm dient und durch die dabei erlittene Biegung auf die später zu besprechende Art den zur Bewegung des Apparates aufgewendeten Druck angibt. Die bewegende Kraft greift aber nicht unmittelbar an der Feder f an, sondern an der Handhabe H des auf die Axe a lose aufgesteckten einarmigen Hebels h. Dieser ist nämlich mit zwei Zapfen z versehen, welche die dazwischen befindliche Feder f sowohl beim Rechts- als auch beim Linksdrehen mitnehmen und dadurch die Büchse B und was mit derselben fest verbunden ist, in Drehung versetzen.

Die Kurbel ist zugleich so eingerichtet, dass sie den in jedem Augenblicke wirksamen Druck graphisch verzeichnet. Dazu dient ein Räderwerk w, welches mittelst eines Fadens g einen Schreibstift s bewegt, der auf einer Schreibfläche S seine Spur zurücklässt. Bei jeder Tour verschiebt sich der Stift längs der Kurbel gegen die Axe zu um 1,3 mm, während die transversalen Verschiebungen des Stiftes die Drucke angeben. Auf diese Art entstehen Diagramme, wie an der Taf. I Fig. 7 gezeichneten Schreibfläche ersichtlich ist. Damit das Räderwerk bei der Drehung der Kurbel in der beschriebenen Weise functionire, ist nothwendig, dass das unterste (auf die Büchse B aufgeschobene) Rad r festgehalten werde. Dies geschieht mittelst einer gespannten Schnur, die man in die an der Trommel t dieses Rades angebrachte Oehse n einhängt. Zwei Laufgewichte m_1 und m_2 dienen zum Aequilibriren der Kurbel. Zur Aufnahme der Diagramme dienen Papierblätter, welche auf eine messingene Platte aufgespannt und mit derselben am Plattenhalter e befestigt werden.

Die besagte messingene Platte S (Taf. I Fig. 7), welche der Form nach ein Stück eines vom Kurbelarm beschriebenen Kreisausschnittes vorstellt, ist am äussern Rande $R_1 R_1$, der einem vom Kurbelradius = 33 cm beschriebenen

Kreisbogen entspricht, mit einer Theilung versehen, welche in ähnlicher Weise wie die empirische Scala einer Federwage hergestellt ist. Die den Theilstrichen beigefügten Zahlen geben nämlich den Druck in Kilogrammen an, welcher bei festgehaltener Büchse *B* am Kurbelarm (bei *H*) tangentiell ausgeübt werden muss, um eine Biegung der Feder (deren Ruhelage dem Nullpunkte der Theilung entspricht) bis zu dem betreffenden Theilstriche zu bewirken. Verlängert man durch Ausziehen mit Bleistift[1]) diese (etwa 2,3 mm voneinander abstehenden) Theilstriche über die aufgespannte Papierfläche *P* hin, so erhält man ein System von radial convergenten Linien, deren Intervalle für jeden der jeweiligen Stellung des Schreibstiftes *s* entsprechenden Radius die den Druckdifferenzen von je 1 kg zukommenden Elongationen des federnden Kurbelarmes angeben. Die als Diagramme erhaltenen (zickzackförmigen) Curven erscheinen demnach auf Polarcoordinaten bezogen und zwar in der Art, dass eine Kurbelumdrehung einer radialen Bewegung des Schreibstiftes um 1,3 mm, hingegen eine Druckdifferenz von 1 kg einem Linienintervall (als Bogen gedacht) entspricht. Die Ausdehnung der Schreibfläche (beziehungsweise der Scala) ist bis auf einen mittlern Druck von 20 kg sowohl nach rechts als auch nach links anwendbar und auf beiläufig 70 Touren bemessen.

Die Breite der Diagramme, d. h. die Amplituden der Transversalbewegungen des Schreibstiftes fallen (nach Massgabe der während einer Kurbelumdrehung vorkommenden Druckvariationen) nach Umständen sehr verschieden aus, doch findet man auch bei grossen Amplituden die (durch Punkte leicht übersichtlich zu machenden) Mittellagen bei geschickter Handhabung der Kurbel so wenig voneinander abweichend, dass man mit ziemlicher Sicherheit den bei der Auswerthung der aufgewendeten Arbeit in Rechnung zu bringenden mittlern Druck p daraus entnehmen kann. Für die in einer Secunde geleistete Arbeit l gilt dann die Formel:

1) Dazu dient ein eigenes kleines Lineal mit einer der Krümmung der Scala angepassten kreisbogenförmigen Anschlagleiste.

$$(1) \qquad l = T.2\pi R.p,$$

wenn T die Tourenzahl per Secunde und R den Kurbelradius bedeutet. Es ist also für die beschriebene Kurbel sehr nahe:

$$(2) \qquad l = 2{,}07\, T.p \text{ Meterkilogr}.$$

Bei unterbrochenem Schliessungskreise (also dem Widerstande $= \infty$ entsprechend) erhält man das sogenannte „Leergangsdiagramm“, welches die Arbeit („Leergangsarbeit“) angibt, welche bei ausgeschlossener Induction lediglich zur Ueberwindung der bei der betreffenden Drehungsgeschwindigkeit wirksamen Reibungswiderstände („Leergangsreibung“) erforderlich ist. Bei nicht unterbrochenem Schliessungskreise erhält man das dem vorhandenen endlichen Leitungswiderstande entsprechende „Vollgangsdiagramm“, welches die bei stattfindender Induction nach Massgabe der Tourenzahl aufgewendete Gesammtarbeit angibt. Der Ueberschuss dieser sogenannten Vollgangsarbeit über die bei gleicher Tourenzahl (Drehungsgeschwindigkeit) ermittelte Leergangsarbeit habe ich als die derselben Tourenzahl entsprechende „Inductionsarbeit“ (alle Arbeiten stets auf die Secunde bezogen) betrachtet.[1])

Zur Regulirung der bei der Bewegung des Apparates einzuhaltenden Tourenzahl diente ein Secundenpendel mit lautem Schlage.

Zur Messung der inducirten Ströme benutzte ich eine Gangain'sche Tangentenbussole von Siemens und Halske, welche zur möglichsten Vermeidung magnetischer Störungen von Seite der Stahlmagnete der Inductionsmaschine in beträchtlicher Entfernung von derselben in einem andern Zimmer aufgestellt war.

Der Widerstand der im ganzen 32 m langen und 2 mm

---

1) Auf eine mögliche Verschiedenheit der Reibungswiderstände bei ausgeschlossener und bei stattfindender Induction habe ich also keine Rücksicht genommen. In der That hat sich in den Resultaten die Zulässigkeit der Annahme bestätigt, dass eine solche Verschiedenheit jedenfalls nicht von Belang ist.

dicken Verbindungsdrähte betrug 0,22 S.-E., und der Widerstand des Apparates, von welchem später noch die Rede sein wird, etwa 0,46 S.-E. — Im Schliessungskreise befand sich endlich noch eine aus dicken Neusilberdrähten hergestellte (also auch bei starken Strömen anwendbare) Widerstandsscala von Siemens und Halske, mittelst welcher 0,5 S.-E. eingeschaltet waren. Der Gesammtwiderstand des Schliessungskreises war also 1,18 oder, in runder Zahl, 1,2 S.-E.

Um die Einführung des Widerstandes in die Rechnung (aus später erwähnten Gründen) zu vermeiden, wurde die theoretische Inductionsarbeit l'_i (zum Vergleiche mit der dynamometrisch bestimmten l_i) aus electromotorischer Kraft und Stromstärke berechnet, und zwar mittelst der Formel:

$$l'_i = K \, . \, T\eta \, . \, k \operatorname{tg} \omega \, . \tag{3}$$

Dabei bedeutet T, wie oben, die Tourenzahl per Secunde; η die bei $T = 1$ vom Inductionsapparate gelieferte electromotorische Kraft, bezogen auf die Jacobi'sche Stromeinheit und die Siemens'sche Widerstandseinheit, und ω den an der Tangentenbussole abgelesenen Ablenkungswinkel; k ist der Reductionsfactor eben dieser Tangentenbussole für die Jacobi'sche Stromeinheit und K ein von der Wahl der Einheiten abhängiger Coëfficient zur Berechnung der Arbeit in Meterkilogrammen.

Zur Feststellung dieser Grössen waren folgende Vorarbeiten nöthig:

a) Der Reductionsfactor k der Tangentenbussole wurde zum Zwecke dieser Untersuchung neuerdings sorgfältig bestimmt. Es geschah diesmal in der Art, dass das Instrument nebst einer Widerstandsscala in den Schliessungskreis eines oder mehrerer Daniell'scher Elemente eingeschaltet und die bei verschiedenen Widerständen abgelesenen Ablenkungen notirt wurden. Der Batteriewiderstand wurde jedesmal gemessen (was auch ohne Kenntniss von k geschehen konnte) und die übrigen Widerstände waren bekannt. Mit Rücksicht auf die gleichfalls bekannte electro-

motorische Kraft eines Daniell'schen Elementes[1]) ergab sich aus jedem Versuche sofort ein Werth für k. Die so erhaltenen Zahlen stimmten sehr gut miteinander und zeigten auch nur geringe Abweichungen vom Tangentengesetze. Auf Grundlage dieser Bestimmungen ist $\log k = 1{,}57952$ angenommen worden.

b) Der Gang des beim Tourenzählen benutzten Secundenpendels wurde mit einer Pendeluhr verglichen und hinreichend genau befunden.

c) Der Widerstand des Inductionsapparates wurde mittelst einer (aus drei Widerstandsscalen zusammengestellten) Messbrücke von Siemens und Halske mit empfindlichem Galvanometer wiederholt und genau gemessen, und zwar bei verschiedenen Stellungen des ruhenden Inductors. Als Mittelwerth ergab sich der Widerstand 0,457 S.-E. — Wenig davon abweichende Zahlen wurden auch gefunden, wenn der Widerstand des in Thätigkeit gesetzten Apparates bei verschiedenen Geschwindigkeiten nach der Ohm'schen Methode aus Stromintensität und Schliessungswiderstand abgeleitet wurde. Immerhin unterliegt jedoch derselbe gewissen Variationen, weshalb er auch bei der Berechnung der theoretischen Inductionsarbeit nicht in die Formel eingeführt worden ist.

d) Zur Ermittelung der electromotorischen Kraft der Inductionsmaschine wurde eine mit besonderer Sorgfalt ausgeführte Versuchsreihe unternommen, deren Resultate

---

1) Auf Jacobi-Siemens'sche Einheiten bezogen $D = 12{,}04$. Vgl. meine diesbezügliche Abhandlung in Pogg. Ann. **133.** p. 462. 1868. — Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die in jener Abhandlung angeführte Umrechnung auf die Weber'schen Einheiten nach den seither geschehenen genaueren Maassvergleichungen einer Correction bedarf. Meine Bestimmung von D entspricht vielmehr der Zahl $111 \times 10^9 \frac{\text{mm}}{\text{sec.}}$, oder 1,11 Volt, nach der in England üblichen Benennung der Einheiten. Vgl. Latimer Clark und Robert Sabine, Electrical Tables and Formulae; Fleeming Jenkin, Electricity and Magnetism; F. Kohlrausch, Practische Physik.

in der nachstehenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt sind.

Bei jedem Versuche wurde der Apparat, in dessen Schliessungskreise sich die bereits erwähnte Tangentenbussole und zwei Widerstandsscalen[1]) befanden, nach dem Tacte des Secundenpendels so lange in gleichförmiger Bewegung[2]) erhalten, bis die dem nahezu stationären Inductionsstrome entsprechende Ablenkung ω an der Tangentenbussole mit Sicherheit abgelesen werden konnte, was bei allen Tourenzahlen von $T = 1/4$ bis $T = 3$ mit sehr befriedigender Präcision gelungen ist. In den Ueberschriften der Tabelle haben T und ω die bereits angegebene Bedeutung; e bezeichnet die jedesmal ermittelte electromotorische Kraft des Apparates und w den Gesammtwiderstand des Schliessungskreises, wobei der Widerstand des Inductionsapparates (siehe c) = 0,457 angenommen worden ist.

	T	w	ω	e
I.	1/4	1,684	18,6	21,5
II.	1/2	1,684	34,5	43,9
III.	1	1,684	53,5	86,4
IV.	2	7,284	32,4	175,6
V.	3	7,284	43,5	262,5

Ausserdem ist die electromotorische Kraft des Apparates auch noch nach der Fechner'schen Methode durch directe Vergleichung mit Daniell'schen und Bunsen'schen Elementen bei Einschaltung eines sehr grossen Widerstandes (bis 10,000 S.-E.) untersucht worden, wobei die Stromstärken an einer Siemens'schen Sinustangentenbussole gemessen wurden.

Aus diesen Versuchen ist zunächst eine so genaue

1) Dieselben, welche in meiner Abhandlung „Ueber das magnetische Verhalten des pulverförmigen Eisens" (fünfte Anmerkung) näher besprochen sind.

2) Die nachstehend angeführten Tourenzahlen sind durchweg auf Kurbeltouren zu beziehen.

Proportionalität der electromotorischen Kraft mit der Tourenzahl hervorgegangen, dass ohne weiteres:

(4) $$e = T\eta$$

gesetzt werden kann. Als electromotorische Kraft für $T = 1$ ist aus den vorstehenden Versuchen der Mittelwerth $\eta = 87{,}78$ abgeleitet worden.[1])

e) Der Coëfficient K wurde auf folgende Art ermittelt: Bezieht man die Formel für die Stromarbeit $L = I^2 \lambda$ auf die Weber'schen absoluten Einheiten, hingegen die Formel $l' = K . s^2 w$ auf die Jacobi-Siemens'schen Einheiten und auf Meterkilogramme, so gelten bekanntlich folgende Zahlenverhältnisse: $L = 1000 . 1000 . 9810 . 1000\, l'$, $I = 0{,}9579\, s$ und $\lambda = 9\,717\,000\,000\, w$, folglich $K = \frac{(0{,}9579)^2 \times 9717}{981 \times 10^4} = 0{,}000\,908\,8$.

f) Die dynamometrische Kurbel habe ich in Bezug auf die Richtigkeit der Scala geprüft. Zu dem Ende wurde dieselbe, nachdem sie an der Welle der Inductionsmaschine festgeschraubt war, in eine horizontale Lage gebracht und in derselben dadurch erhalten, dass die den Schreibstift führende Schiene u mittelst eines passenden Statives unterstützt war. Hierauf wurde an der Befestigungsstelle der Handhabe H des Kurbelhebels ein Gehänge angebracht und auf dasselbe Gewichte in der Art aufgelegt, dass successive die Gesammtbelastungen von 1, 2, 3 u. s. w. kg

---

1) Nimmt man nach meinen Bestimmungen (Pogg. Ann. **133.** p. 478. 1868) die electromotorische Kraft eines Bunsen'schen Elementes = 21 an, so kann man demnach annähernd sagen: die electromotorische Kraft der Siemens'schen 50-Magnet-Maschine beträgt bei:

1 Tour	in 1 Secunde	etwas über	4 Bunsen,
2 Touren	„ 1 „	„ „	8 „
3 „	„ 1 „	„ „	12 „

wobei 1 Tour der Kurbel 7 Touren des Inductors entspricht.

Meine diesbezüglichen Angaben in der oben citirten Abhandlung in Carl's Repertorium waren also zu niedrig. Wahrscheinlich war bei jenen ersten Versuchen mit der beschriebenen Maschine (bei welchen es sich übrigens auch nicht um genaue Messungen handelte) der Rollenträger („Commutator") nicht in der vortheilhaftesten Stellung.

erzielt wurden. Die jeder dieser Belastungen entsprechende Stellung des Schreibstiftes gegenüber der Schreibfläche wurde dadurch ersichtlich gemacht, dass man durch Verschiebung des Stiftes die ganze Schreibfläche entlang eine Linie auszog. Nach Abnahme der Schreibfläche erschienen diese Linien, wenn die Anfangsstellung der Schreibstiftspitze dem Nullpunkte der Theilung entsprach, in der That als die Verlängerungen der die gleichen Druckkräfte anzeigenden Theilstriche der Scala, die demnach richtig befunden worden ist. Ausserdem hatte Hr. Prof. H. Gollner die Güte, mich auf die Einzelheiten aufmerksam zu machen, welche beim Gebrauche der Kurbel zu beachten sind, um sichere Resultate zu erzielen.

Nach diesen Vorarbeiten wurden fünf Versuche unternommen, deren Ergebnisse in der folgenden Tabelle übersichtlich gemacht sind. Die Bewegung der Inductionsmaschine wurde jedesmal während 65 Touren möglichst gleichförmig[1]) und zwar in der Art unterhalten, dass bei den drei ersten Versuchen 1 Tour in 1 Secunde, beim vierten Versuche 1 Tour in 2 Secunden und beim fünften Versuche 1 Tour in 4 Secunden stattfand. Die den angegebenen Zeitmaassen entsprechenden je 65 Touren wurden bei jedem dieser Versuche zweimal gemacht, das eine Mal bei offenem Schliessungskreise, um das Leergangsdiagramm zu bekommen, und das zweite Mal bei geschlossenem Stromkreise, wobei der Strom gemessen und das Vollgangs-

1) Der damit betraute Gehülfe bewerkstelligte dies nach einiger Uebung in der Art, dass die Ablesungen an der Tangentenbussole nur mit sehr geringen Fehlern behaftet sein können, indem die Nadel meist nur innerhalb weniger Grade schwankte und häufig sogar secundenlang fast unbeweglich blieb. Dabei wurden während eines jeden Versuches etwa 20 Ablesungen notirt und aus denselben das Mittel genommen. Um nicht abwarten zu müssen, bis die ersten Schwingungen der Nadel so weit abgenommen haben, dass man mit den Ablesungen beginnen kann, ist es vortheilhaft, dieselben in der Art zu dämpfen, dass man die Nadel in der Nähe ihrer voraussichtlichen Gleichgewichtslage mit der Arretirung fängt und wieder frei lässt.

diagramm erhalten wurde.[1]) Die Differenz $p - p_0$ der aus beiden Diagrammen entnommenen mittleren Drucke lieferte den der Inductionsarbeit:

$$(5) \qquad l_i = T \,.\, 2\pi R\,(p - p_0) = 2{,}07\; T(p - p_0)$$

(siehe Formel 1 und 2) entsprechenden mittlern Druck.

Die mit l'_i und ω überschriebenen Rubriken enthalten endlich noch die nach Formel 3 berechneten Inductionsarbeiten und die Ablesungen an der Tangentenbussole.

	T	p_0	p	$p - p_0$	ω	l'_i (berechn.)	l_i (beobacht.)
1	1	1,4	4,2	2,8	62,5	5,82	5,80
2	1	1,2	3,9	2,7	62,8	5,89	5,59
3	1	2,15	4,85	2,7	62,0	5,70	5,59
4	$^1/_2$	1,0	2,4	1,4	43,8	1,45	1,44
5	$^1/_4$	0,6	1,3	0,7	24,2	0,34	0,36

Hinsichtlich der Werthe von p und p_0 ist zu bemerken, dass in denselben die Abhängigkeit von der Tourenzahl nicht regelmässig hervortritt, wohl aber in den Differenzen $p - p_0$, welche der Tourenzahl mit grosser Genauigkeit proportional sind. Dieser Umstand kann nicht befremden, wenn man erwägt, dass schon die Reibungswiderstände selbst[2]) bei den einzelnen Versuchen etwas verschieden ausfallen können, je nachdem die Lager mehr oder weniger geölt sind u. dgl. Ganz besonders aber kommt die mehr oder weniger centrirte Stellung der Spitze des Schreibstiftes und die mehr oder weniger richtige Lage der auf der Schreibfläche vorgezeichneten Nullpunktslinie in Betracht, durch welche von einem Versuche zum andern con-

1) Beim dritten Versuche sind beide Diagramme auf derselben Blattseite, bei den übrigen aber auf beiden Seiten eines Blattes getrennt aufgenommen worden.

2) Die mit der gewöhnlichen Kurbel versehene Inductionsmaschine hat natürlich geringere Reibungswiderstände als die bei diesen Versuchen beobachteten. Durch die zur Anbringung des Dynamometers erforderlich gewesenen Adaptirungen und durch den Druck des 12 kg schweren Dynamometers selbst ist die Reibung an der Axe des Zahnrades unvermeidlich vermehrt worden.

stante Differenzen bedingt werden können, die bei der Subtraction $p - p_0$ fortfallen.[1])

Entsprechend der beobachteten Proportionalität der Drucke $p - p_0$ mit der Tourenzahl prägt sich in den Werthen l_i für die Inductionsarbeit die Proportionalität mit dem Quadrate der Tourenzahl aus; beides ganz in Uebereinstimmung mit der Theorie, nach welcher der Druck $p - p_0$ proportional mit der Stromstärke $s = \frac{T\eta}{w}$ und die Stromarbeit $l'_i = K.s^2 w = K.\frac{T^2 \eta^2}{w}$ sein muss, wobei w den Widerstand des Schliessungskreises bedeutet.

Auch hinsichtlich der absoluten Zahlenwerthe für die Inductionsarbeit lässt die Uebereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung kaum etwas zu wünschen übrig.[2]) Ich habe dies um so weniger erwartet, nachdem mir frühere freilich noch sehr unvollkommene, vorläufige Versuche wenig Hoffnung gemacht hatten, eine leidliche Uebereinstimmung nicht nur in einzelnen Fällen, sondern regelmässig anzutreffen. Ich war daher überrascht, als ich aus den nach Abschluss der Versuche durchgeführten Rechnungen fast dieselben Zahlen hervorgehen sah, welche die Diagramme ergeben hatten.

Eine Ausdehnung auf eine grössere Tourenzahl ist bis jetzt nicht versucht worden; auch dürfte es wegen der Länge der Kurbel kaum gelingen, die Tourenzahl bis auf 2 in 1 Secunde zu steigern. Uebrigens ist die Rotations-

---

1) Um solche einer Verschiebung des Coordinatensystemes entsprechende Differenzen zu vermeiden, hätte man die auf der Schreibfläche vorzuzeichnenden Radiallinien, anstatt dieselben mittelst des oben erwähnten Anschlaglineales auszuziehen, jedesmal durch Wiederholung des unter *f*) beschriebenen Verfahrens herstellen können; da es aber zum Zwecke der Ermittelung der Inductionsarbeit nur auf die richtige Ermittelung der Differenz $p - p_0$, nicht aber der Einzelwerthe p_0 und p angekommen ist, wurde von diesem umständlichen Verfahren abgesehen.

2) Diese Uebereinstimmung lässt zugleich erkennen, dass bei der untersuchten Maschine die Foucault'schen Ströme in dem mitrotirenden Eisenkerne des Inductors keinen erheblichen Kraftverlust verursachen.

geschwindigkeit des Inductors auch schon bei $T = 1$ eine ziemlich bedeutende, indem, wie bereits bemerkt worden ist, 7 Touren des Inductors auf eine Kurbelumdrehung kommen.

Dividirt man die Werthe von l_i durch das Product $T\eta . k \operatorname{tg} \omega$, so erhält man die auf die electromotorische Kraft $e = 1$ und die Stromstärke $s = 1$ entfallende Inductionsarbeit, im Mittel aus obigen Versuchen = 0,000 904 3. Diese Zahl (welche dieselbe Bedeutung hat, wie der im Absatze e) auf einem andern Wege abgeleitete Coëfficient der Formel (3)) vermittelt in einfachster Weise die Berechnung der Inductionsarbeit, welche nach meinen Versuchen für beliebige gegebene Werthe von e, s und w erforderlich erscheint. Zu diesem Zwecke hat man, nach den bekannten Formeln für die Stromarbeit, jene Zahl nur mit $s^2 w$ oder se oder endlich mit $\frac{e^2}{w}$ zu multipliciren. Setzt man im letztern Ausdrucke $e = 12{,}04$ (= der electromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes) und $w = 1$, so erhält man in runder Zahl:

$$0{,}000\,904\,3 \times (12{,}04)^2 = 0{,}13 \text{ mkg}$$

als Betrag der Inductionsarbeit, welche nach meinen Versuchen per Secunde erforderlich wäre, um in einem Schliessungskreise vom Widerstande = 1 S.-E. die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes zu unterhalten. Der electromotorischen Kraft eines Bunsen'schen Elementes würde ungefähr der $\left(\frac{21}{12}\right)^2$-fache Betrag, also in runder Zahl die Arbeit von 0,4 mkg entsprechen. In Pferdekräften (à 75 mkg) ausgedrückt, würde z. B.:

$$0{,}0053 \frac{n^2}{w}$$

die zum Betriebe einer Lichtmaschine von der electromotorischen Kraft n Bunsen und beim Widerstande w S.-E. erforderliche Inductionsarbeit sein, nebst welcher dann noch die Leergangsarbeit zu bestreiten wäre.

Man kann aus den für die Inductionsarbeit gefunde-

nen Zahlen auch das mechanische Aequivalent der Wärme berechnen, indem man dieselben mit den Wärmemengen vergleicht, welche den chemischen Processen in einer dieselbe Stromarbeit leistenden hydroelectrischen (z. B. Daniell'schen) Kette entsprechen. Freilich ist diese Rechnung insofern etwas unsicher, als die von verschiedenen Autoren für die dabei in Betracht kommenden Aequivalentwärmen gefundenen Zahlen nicht unerheblich voneinander abweichen.

Nimmt man nach W. Thomson und Jenkin[1]) 788,4 Calorien als die Wärmemenge an, welche für die Daniell'sche Kette der Consumtion der Gewichtseinheit Zink entspricht, also auf ein Aequivalent (32,5) Zink reducirt 25623, so entfällt auf den Strom (12,04) einer Daniell'schen Kette in einem Schliessungskreise vom Widerstande 1 für jede Secunde die Wärmemenge:

$$\frac{25623 \times 12{,}04}{60 \,.\, 1865 \,.\, 1000 \,.\, 9} = 0{,}000\,306\,33.$$ [2])

Vergleicht man dieselbe mit der nach meinen Versuchen zur Erzeugung derselben Stromarbeit erforderlichen Inductionsarbeit per Secunde, nämlich 0,13 oder genauer 0,13109 mkg, so erhält man für das mechanische Aequivalent der Wärme die dem Joule'schen Aequivalente (423,55) nahekommende Zahl:

$$0{,}13109 : 0{,}000\,306\,33 = 427{,}94.$$

Schliesst man den fünften Versuch aus, bei welchem die gemessene Inductionsarbeit (von nur 0,36 mkg) wohl schon zu klein erscheint, um einer solchen Rechnung mit Sicherheit als Grundlage dienen zu können, so erhält man den der gewöhnlich angenommenen Zahl noch näher kommenden Betrag:

$$0{,}12903 : 0{,}000\,306\,33 = 421{,}21.$$

1) Jenkin, Electricity and Magnetism. 4. Aufl. p. 172. 1878.

2) Dabei ist das Volumen der Gewichtseinheit Knallgas = 1865 angenommen worden. (Vgl. F. Kohlrausch, practische Physik, und O. Fröhlich, die Lehre von der Electricität und dem Magnetismus. p. 451. 1878.

Fast genau dieselbe Zahl (420,6) erhält man auch aus den drei ersten Versuchen, bei welchen die mit dem Dynamometer gemessenen Arbeiten am grössten (beinahe 6 mkg) waren.

Schliesslich erfülle ich noch die angenehme Pflicht, meinem hochgeehrten Collegen Hrn. Prof. H. Gollner für die mit eingehendem Interesse an meiner Arbeit erzielte Förderung derselben durch seinen bewährten Rath herzlich zu danken.

VI. *Ueber die Ursache der electrischen Ströme, die beim Strömen von Flüssigkeiten durch Röhren entstehen; von E. Edlund.*

Mehrere der Forscher, die den bei der Bewegung der Flüssigkeiten in Röhren entstehenden electrischen Strömen einige Aufmerksamkeit widmeten, haben die Ansicht ausgesprochen, dass die Ursache dieser Erscheinungen in der Berührung der Flüssigkeit mit der Glaswand oder in ihrer Reibung gegen dieselbe zu suchen sei; indess hat erst Helmholtz[1]) vor kurzem den Versuch gemacht, mit Hülfe dieser Annahme die für diese Erscheinungen geltenden Gesetze zu erklären. Die Entstehung der electrischen Ströme geht nach ihm folgendermassen vor sich: Die Flüssigkeit befindet sich durch die Berührung mit der Röhrenwand in galvanischem Gegensatze zu derselben, und beide bilden längs ihrer Grenzfläche eine electrische Doppelschicht. Der innerhalb der Flüssigkeit liegende Theil dieser Doppelschicht ist der Regel nach positiv, die Röhrenwand dagegen negativ electrisch. Die fragliche positive electrische Schicht der Flüssigkeit besitzt eine ausserordentlich geringe, obgleich nicht verschwindende Dicke. Die gegen die Grenzfläche gekehrte

---

1) Helmholtz, Wied. Ann. **7.** p. 337—382. 1879.

Seite dieser Schicht ist (wenigstens wenn die Röhre aus Glas besteht, und die Flüssigkeit Wasser ist) an der Röhrenwand unveränderlich befestigt, während der übrige Theil derselben verschiebbar ist. Wenn nun die Flüssigkeitssäule in der Röhre durch einen äussern Druck in Bewegung gesetzt wird, so wird die letztere, mit positiver Electricität geladene Flüssigkeitsschicht in der Richtung der Bewegung mitgeschleppt. Solange sich diese mit constanter Geschwindigkeit der Röhrenwand parallel verschiebt und daher beständig von der negativen Electricität der letztern beeinflusst wird, wird das electrische Gleichgewicht in derselben nicht gestört, sondern ihre positive Electricität ist fortwährend vollständig gebunden. Am untern Ende der Röhre wird die erwähnte Flüssigkeitsschicht von der Röhrenwand getrennt, ihre bisher gebundene Electricität wird daselbst frei. Während des Fortganges der Ausströmung legen sich am obern Ende der Röhre neue Flüssigkeitsschichten an die Röhrenwand; und da diese schon vordem negativ electrisch ist, wird die positive Electricität der Flüssigkeit gebunden, und ihre negative wird frei; infolge dessen sammelt sich freie negative Electricität an dem obern Ende der Röhre.

Die an den beiden Enden der Röhre gesammelten Electricitätsmengen vereinigen sich theils durch die Flüssigkeitssäule in der Röhre, theils auch durch andere Leitungen, durch welche eine Wiedervereinigung stattfinden kann. Auf diese Weise entsteht ein Strom J vom untern Ende der Röhre nach dem obern, und es ist klar, dass die Potentialdifferenz zwischen den beiden Enden der Röhre steigen muss, bis der Strom J so stark wird, dass die durch denselben in einer gewissen Zeit wieder vereinigten Electricitätsmengen ebenso gross werden wie diejenigen, welche auf die angegebene Art in derselben Zeit an den beiden Enden der Röhre gesammelt werden. Setzt man nun zwei Electroden in die Röhre ein und verbindet sie mit einem Galvanometer, so geht ein Theil des Stromes J zu diesem Instrumente, und nach der Erklärung des

Hrn. Helmholtz ist es der von diesem Theile verursachte Ausschlag, der beobachtet wird.

Gegen obige Annahme kann zuerst bemerkt werden, dass es nicht sehr wahrscheinlich ist, dass die ausserordentlich dünne Wasserschicht, in der die positive Electricität gebunden ist, während der Ausströmung sich wirklich in der Richtung des Flüssigkeitsstromes fortbewegt. Die folgende Erfahrung spricht wenigstens dagegen.[1]) Wenn man in demselben Querschnitte einer Glasröhre zwei Electroden einander diametral gegenüber einsetzt und sie dadurch polarisirt, dass man einen galvanischen Strom durch die zwischen beiden befindliche Wasserschicht gehen lässt, so kann man beweisen, dass die Polarisation nicht die geringste Veränderung erleidet, wenn das Wasser eine Geschwindigkeit von sogar 10 m in der Secunde erreicht und dabei gegen die Enden der Electroden reibt. Nur wenn der polarisirende Strom stark ist und eine längere Zeit hindurch wirkt, wird die Polarisation verringert, wenn das Wasser in Bewegung kommt. Dies kann wohl schwerlich auf eine andere Weise erklärt werden als durch die Annahme, dass die Wasserschicht, in der die polarisirenden Gase sich befinden, an der Fläche der Electroden unbeweglich befestigt ist und von dem Wasserstrome nicht losgerissen und weggeführt werden kann. Will man mit Hrn. Helmholtz annehmen, dass die Wasserschicht, in der die gebundene positive Electricität sich befindet, wirklich vom Strome weggeführt wird, so muss man wohl auch annehmen, dass diese Schicht dicker ist als die, welche in dem erwähnten Versuche die polarisirenden Gase enthielt; was schwer zu begründen sein dürfte.

Nehmen wir indess doch einmal an, dass die dünne Flüssigkeitsschicht, in der die gebundene positive Electricität sich befindet, in der Richtung des Stromes fortbewegt wird.

Dann muss die Menge der positiven Electricität, die

1) Edlund, Wied. Ann. **1.** p. 167. 1877.

sich während der Zeiteinheit am Ausflussende der Röhre ansammelt, unter sonst unveränderten Verhältnissen, der Anzahl der in derselben Zeiteinheit dort anlangenden, mit positiver Electricität geladenen Flüssigkeitsmolecüle, d. h. dem Producte aus der Peripherie der Röhre in die Geschwindigkeit der Molecüle proportional sein. Die Wasserstrahlen aber, die der Axe der Röhre näher liegen, strömen mit grösserer Geschwindigkeit als diejenigen, die von derselben weiter entfernt sind; es gilt also zuerst, einen Ausdruck zu finden für die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsschicht, in der die gebundene Electricität sich befindet. In einer Capillarröhre, für welche das Poiseuille'sche Gesetz gilt, ist der Erfahrung gemäss die während der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge $U = A\pi r^4$, wo A eine Constante, und r der Halbmesser der Röhre ist. Zu demselben Ausdrucke für U gelangt man, wenn man annimmt, dass die Geschwindigkeit v eines Wasserstrahles in der Entfernung ϱ von der Röhrenaxe durch den Ausdruck $v = 2A(r^2 - \varrho^2)$ dargestellt wird. Nimmt man diese Relation zwischen v, ϱ und r als richtig an, was auch von der Theorie bestätigt wird, so folgt daraus, dass die Geschwindigkeit w der Wasserschicht, in der die positive Electricität gebunden ist, der Grösse $\frac{u}{r}$ proportional ist und folglich durch die Formel $w = \frac{ku}{r}$ ausgedrückt werden kann, in der k eine Constante, und u die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit beim Ausströmen bedeuten. Die am Ausflussende der Röhre während der Zeiteinheit angesammelte positive Electricitätsmenge ist also dem Ausdrucke $2\pi r . \frac{ku}{r}$ oder $2k\pi u$ proportional. Dieser Ausdruck muss aber auch dem Strome J proportional sein. Man kann also $J = pu$ setzen, wenn p eine Constante bezeichnet. Setzt man zwei in der Röhre befindliche Electroden in leitende Verbindung mit dem Galvanometer, bezeichnet man ferner mit m den Widerstand der Flüssigkeitssäule zwischen den Electroden, und mit m_1 den Widerstand in

der Galvanometerleitung, so vertheilt sich der Strom J zwischen dieser Leitung und der Flüssigkeitssäule dergestalt, dass der Theil s desselben, der zum Galvanometer geht, durch die Formel $s = \frac{mpu}{m + m_1}$ bestimmt wird; ein Resultat, das für Röhren von der fraglichen Beschaffenheit mit der Erfahrung übereinstimmt.

Weiter erstreckt sich aber auch nicht die Uebereinstimmung zwischen der aufgestellten Theorie und der Erfahrung. In weiteren Röhren und bei grösserer Ausflussgeschwindigkeit bewegt sich, nach Hrn. Helmholtz, jeder einzelne, mit der Röhrenaxe parallele Wasserstrahl nicht wie in einer Röhre von unendlicher Länge. Infolge der Reibung erhält der Strahl eine rotirende Bewegung, die sich mehr oder weniger tief in die Röhre hineinstreckt, und die ausserdem davon abhängt, ob die Röhre mit einer scharfen Kante endigt oder eine trompetenförmige Erweiterung hat. In dem letztern Falle soll die Geschwindigkeit der an der Röhrenwand liegenden Flüssigkeitsmolecüle im obern Theile der Röhre grösser sein als nach untenhin. Aus diesen und ähnlichen Gründen ist Hr. Helmholtz der Ansicht, dass man keine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung erwarten könne ausser bei Capillarröhren, für welche das Poiseuille'sche Gesetz gültig ist.

Die Electricitätsentwickelung ist von der Bewegungsart der Flüssigkeitsmolecüle, die mit der Röhrenwand in Berührung kommen, abhängig; denn nur diese können auf die oben angegebene Weise electrisch werden. Wenn ein Molecül sich bei einer rotatorischen Bewegung von der Röhrenwand in die Flüssigkeitssäule hinein begibt, wird die positive Electricität, die während der Berührung mit der Wand gebunden war, frei, und wenn sich ein Molecül von dem Innern der Flüssigkeitssäule zu der Röhrenwand fortbewegt, wird dagegen ebenso viel negative Electricität frei, weil die positive Electricität des Molecüls gebunden wird, sobald es in die Wirkungssphäre der Röhrenwand kommt. Daraus folgt, dass die Summe der dadurch hervorgebrachten

Electricitätsentwickelung gleich Null wird. Denkt man sich, dass die Molecüle, die am obern Ende der Röhre mit der Wand in Berührung gekommen, sich längs derselben mit verzögerter Geschwindigkeit fortbewegen, d. h. dass die Geschwindigkeit der nachfolgenden grösser als die der vorhergehenden ist, so müssen nothwendig Molecüle von der Wand in das Innere der Röhre gedrängt werden, wodurch in dieser freie positive Electricität entsteht. Wenn nun eine Anzahl von Electroden, α, β, γ, δ, in gleichen Entfernungen voneinander und in der angedeuteten Ordnung von dem obern Ende der Röhre gezählt, in die Röhre eingesetzt ist, so müssen die erhaltenen Ausschläge der Reihe nach kleiner sein, wenn man die Electrodenpaare $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ oder $\gamma\delta$ mit dem Galvanometer verbindet. Dies erhellt aus dem Umstande, dass die von β nach α sich bewegende positive Electricitätsmenge dieselbe ist, wie die Summe aller Electricität, die in der Röhre unterhalb β entwickelt wird, weil diese Summe grösser ist als die unterhalb γ oder δ entstehende. Wenn sich dagegen die Molecüle längs der Röhrenwand mit beschleunigter Geschwindigkeit fortbewegen, so müssen sich neue Molecüle aus dem Innern der Flüssigkeitssäule an die Wand anlegen, wodurch freie negative Electricität der Röhre entlang entsteht. In diesem Falle müssen aus ähnlichen Gründen die Ausschläge der Reihe nach abnehmen bei Verbindung der Electrodenpaare $\gamma\delta$, $\beta\gamma$ und $\alpha\beta$ mit dem Galvanometer. Würden aber bei angestellten Versuchen diese Ausschläge sich einander gleich gross zeigen, so würde das beweisen, dass die Bewegung der Molecüle längs der Röhrenwand von α bis δ constant sein müsse.

Schon während meiner früheren Untersuchungen habe ich mich mehrmals davon überzeugt, dass die Ausschläge des Galvanometers von der Lage der in der Röhre eingesetzten Electroden unabhängig ist. Einige neue Versuche bestätigen diese Erfahrung.

In eine cylindrische Glasröhre von 308 mm Länge und 3 mm Durchmesser wurden in gegenseitigen Entfernungen

von 60 mm vier vollkommen gleiche Goldelectroden, α, β, γ, δ, eingesetzt. Die Entfernung vom obern Ende der Röhre zur Electrode α war 60 mm, von δ zum untern Ende 68 mm. Man darf wohl annehmen, dass die entstandene Polarisation bei allen Versuchen denselben Bruchtheil der Stromstärke verursachte und daher nicht berücksichtigt zu werden brauchte. Dieselbe erwies sich ausserdem bei directen Messungen als unbedeutend. Destillirtes Wasser wurde unter einem Quecksilberdrucke von 750 mm durch die Röhre gepresst. Um den Einfluss der durch den fortgesetzten Gebrauch des Wassers gewöhnlich entstehenden Veränderung der electromotorischen Kraft so viel als möglich unschädlich zu machen, wurden erst zwei (aus je zwei Beobachtungen bestehende) Bestimmungen gemacht, indem die Galvanometerleitung mit dem Electrodenpaare $\alpha\beta$ vereinigt war, dann zwei mit $\beta\gamma$, darauf vier mit $\gamma\delta$ und schliesslich wieder zwei mit $\beta\gamma$ und zuletzt zwei mit $\alpha\beta$. Hierbei erhielt ich folgende Ausschläge in Scalentheilen, wo jede Zahl das Mittel aus zwei Beobachtungen ist:

$\alpha\beta$	18,25	17,30	16,85	17,05	Mittel	17,36
$\beta\gamma$	18,30	17,50	16,85	16,45	„	17,28
$\gamma\delta$	18,50	17,15	16,95	16,90	„	17,38

Eine andere cylindrische Glasröhre, von einer Länge von 0,5 m und einem Durchmesser von 4 mm, in welche vier Electroden in gegenseitigen Entfernungen von 140 mm eingesetzt waren, sodass die Entfernung von α zum obern und von δ zum untern Ende der Röhre 40 mm betrug, gab unter demselben Drucke folgende Werthe:

$\alpha\beta$	21,2	21,2	20,0	20,0	Mittel	20,60
$\beta\gamma$	21,4	21,0	19,2	19,0	„	20,15
$\gamma\delta$	19,0	18,6	18,4	18,3	„	18,58

Eine nach fünf Stunden mit derselben Röhre angestellte neue Versuchsreihe ergab:

$\alpha\beta$	14,8	15,0	16,5	16,5	Mittel	15,70
$\beta\gamma$	15,7	15,9	16,5	16,7	„	16,20
$\gamma\delta$	15,9	15,8	15,9	15,8	„	15,85

Die Unterschiede der drei Ausschläge sind nicht grösser, als sie aus den Beobachtungsfehlern erklärt werden können. Unter Voraussetzung der Richtigkeit der Helmholtz'schen Theorie folgt also aus diesen Beobachtungen, dass diejenigen Flüssigkeitsmolecüle, die zwischen den beiden äussersten Electroden an der Röhrenwand liegen, sich mit einer constanten Geschwindigkeit längs derselben bewegen müssen.

Ist die Röhre überall gleich weit, so muss also auch die während der Zeiteinheit durch einen Querschnitt bei α und einen solchen bei δ hindurchgehende Zahl c der an der Röhrenwand liegenden Flüssigkeitsmolecüle die gleiche sein. Bezeichnet ferner a die Anzahl der Molecüle, die am Anfange der Röhre oberhalb α mit der Röhrenwand in Berührung kommen, und b die Anzahl derjenigen, die sich infolge der hier möglicher Weise stattfindenden unregelmässigen Bewegung von derselben trennen, so muss $a - b = c$ sein. Die Differenz $a - b$ repräsentirt aber die Menge negativer Electricität, die am Anfange der Röhre entwickelt wird. Bezeichnet man andererseits mit a_1 die Anzahl der Molecüle, die sich am untern Ende der Röhre in derselben Zeit von der Wand trennen, und mit b_1 die Anzahl derjenigen, die sich an dieselben anlegen, so muss auch die Differenz $a_1 - b_1$, welche die hier entwickelte positive Electricitätsmenge repräsentirt, gleich c sein. Wenn also die Geschwindigkeit zwischen α und δ wirklich constant ist, so müssen infolge dessen die an den beiden Enden der Röhre entwickelten Electricitätsmengen gleich gross sein. Um dies experimentell zu prüfen, wurden folgende Versuche angestellt.

Mittelst der Wasserleitung im Laboratorium konnte man nach Belieben entweder das obere oder das untere Ende der Röhre mit der Erde leitend verbinden. Eine besondere Untersuchung zeigte, dass der Widerstand in dieser Leitung zur Erde nicht mehr als 4 Ohmads betrug. Da der Widerstand in der mit destillirtem Wasser gefüllten Glasröhre und sogar in den Galvanometerwindungen

ausserordentlich viel grösser war, so darf man annehmen, dass von dem mit der Erde verbundenen Ende der Röhre alle Electricität zur letztern abgeleitet wurde, und dass also der Strom J, von dem ein Theil zum Galvanometer ging, ausschliesslich von der am isolirten Ende der Röhre angesammelten Electricitätsmenge herrührte. Man konnte folglich mit Hülfe des Galvanometers diese beiden Electricitätsmengen jede für sich besonders messen. Auf diese Weise erhielt man die folgenden Ausschläge, je nachdem die Leitung mit dem einen oder andern Ende der Röhre vereinigt war:

Mit dem obern Ende	23,3 — 25,9 — 26,5 — 26,7 — 26,2	Mittel	25,7
„ „ untern „	25,0 — 25,2 — 24,5 — 25,5	„	25,1

Eine andere Beobachtungsreihe gab im Mittel 27,8 Scalentheile, wenn das obere Ende mit der Erde verbunden war, und 28,8, wenn dies mit dem untern Ende geschah. Diese Ausschläge können folglich in beiden Fällen als gleich gross betrachtet werden, und diese Beobachtungen bestätigen also die vorher angeführten.

Die mittlere Geschwindigkeit u der Flüssigkeit ist in jedem Querschnitte der cylindrischen Röhre gleich gross, und unter der Voraussetzung, dass die Helmholtz'sche Erklärung die richtige sei, muss dies infolge der oben mitgetheilten Beobachtungen auch für die Geschwindigkeit w der an der Röhrenwand zwischen den Electroden α und δ liegenden Molecüle der Fall sein. Alle Beobachtungen haben zu dem Ergebnisse geführt, dass in weiteren Röhren und bei grösserer Geschwindigkeit die electrische Stromstärke dem Quadrate von u proportional ist.[1] Hieraus folgt also, dass die genannte Relation $w = pu^2$ sein müsste, wo p eine Constante bezeichnet.[2] Dieses Resultat

1) Edlund, Wied. Ann. **1.** p. 161. 1877); **5.** p. 20. 1878; **8.** p. 119. 1879.

2) Dass der numerische Werth der Constante p nicht besonders klein sein kann, geht aus den Beobachtungen selbst hervor. Wenn man das obere Ende der Röhre mit der Erde verbindet, so wird der entstehende galvanische Strom ausschliesslich von der am untern Ende

ist aber ungereimt, weil jedenfalls w immer $< u$ sein muss; was indess nach der genannten Formel nicht unbedingt stattfindet, wenn u einen hinreichend grossen Werth erreicht. Die aufgestellte Theorie führt also zu einem Widerspruche.

Bei der Bestimmung von w kann man, wenn von weiteren Röhren und grösserer Geschwindigkeit die Rede ist, die oben für Capillarröhren angenommene Relation $w = \frac{ku}{r}$ nicht benutzen, weil diese Relation aus der Gleichung $v = 2A(r^2 - \varrho^2)$ abgeleitet ist, aus welcher wiederum folgt, dass die während der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge der vierten Potenz des Halbmessers der Röhre proportional sein muss — ein Verhältniss, dass nur bei Capillarröhren, für welche das Poiseuille'sche Gesetz gültig ist, aber keineswegs bei weiteren Röhren stattfindet. Für Röhren letzterer Art hat Darcy[1]) auf experimentalem Wege theils das Gesetz der mittlern Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers, theils auch mit Hülfe der Pitot'schen Röhre die relative Geschwindigkeit der in verschiedenen Entfernungen von der Röhrenaxe liegenden Wasserstrahlen bestimmt. Wenn u die mittlere Geschwindigkeit, r den Halbmesser der Röhre und i die Druckhöhe, durch die Länge l der Röhre dividirt, bezeichnet, so fand Darcy, dass:

$$bu^2 = ri, \tag{1}$$

sich ansammelnden Electricität erzeugt. Diese Electricität muss aber in gebundener Form vom obern nach dem untern Ende der Röhre geführt werden, wozu eine gewisse Zeit erforderlich ist. Der galvanische Strom kann also erst einige Zeit nach dem Augenblicke, in welchem das Wasser in Bewegung gesetzt wird, zu circuliren anfangen. Wird aber das untere Ende der Röhre mit der Erde in Verbindung gesetzt, so muss natürlich der galvanische Strom vollkommen gleichzeitig mit dem Wasserstrome beginnen. Da man nun mit dem Galvanometer in der fraglichen Beziehung nicht den geringsten Unterschied zwischen diesen beiden Fällen voraussetzen kann, so folgt hieraus, dass die Geschwindigkeit w verhältnissmässig recht bedeutend sein muss.

1) Darcy, Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences. T. XV. Paris 1858.

wo b eine Constante bezeichnet, die jedoch bei grossen Aenderungen von r abnimmt, wenn r wächst. Diese Formel stützt sich auf Versuche mit Eisen-, Blei- und Asphaltröhren, deren Länge mehr als 100 m betrug, und deren Durchmesser zwischen 0,0122 und 0,5 m wechselte, und mit einer Glasröhre, deren Durchmesser 0,04968 und Länge etwa 45 m war. Die grösste Ausflussgeschwindigkeit belief sich auf etwas mehr als 6 m in der Secunde. Bezeichnet man die Geschwindigkeit in der Röhrenaxe mit V, in der Entfernung ϱ von derselben mit v und an der Röhrenwand mit w, so zeigten die Beobachtungen mit der Pitot'schen Röhre, dass $V - v = 11{,}30 \frac{\varrho^{\frac{3}{2}}}{r} \sqrt{i}$ und $u = \frac{3V + 4w}{7}$, woraus man erhält:

$$w = (1 - 4{,}84 \sqrt{b})\, u. \tag{2}$$

Die Versuche, auf welche diese Resultate sich stützen, wurden mit Röhren angestellt, deren Durchmesser zwischen 0,188 und 0,5 m wechselten, wobei u von 0,355 bis auf nahe 4,5 m in der Secunde stieg.

Dass man berechtigt ist, die zuletzt angeführte Relation (2) zwischen w und u auch für kürzere Röhren mit einem Durchmesser von einigen Millimetern als gültig anzunehmen, erhellt aus den folgenden Betrachtungen:

Die Formel (1) kann folgendermassen theoretisch deducirt werden[1]): Ein Theil h_0 der ganzen Druckhöhe H wird zur Ueberwindung der Reibung des Wassers gegen die Röhrenwand verbraucht, und nur der übrige Theil h_1 derselben gibt dem Wasser seine Geschwindigkeit. Die Reibung gegen die Röhrenwand ist eine Function $f(w)$ der Geschwindigkeit und muss ausserdem der Wandfläche proportional sein. Wenn $\frac{c}{4}$ der Reibungscoëfficient ist, so kann also die Reibung durch den Ausdruck $\frac{c}{4} . 2\pi r l f(w)$ dargestellt werden, welcher Ausdruck dem Gewichte einer Wassersäule mit der Grundfläche πr^2 und Höhe h_0 gleich

1) Vergl. Darcy, l. c. p. 156.

sein muss. Man hat also $\frac{clf(w)}{2gr} = h_0$. Da nun aber $\frac{u^2}{2g} = h_1$, und w nach der Formel (2) gegen u vertauscht werden kann, so erhält man, weil der Erfahrung gemäss die Reibung dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional anzunehmen ist, $\frac{u^2}{2g} + \frac{clu^2}{2gr} = h_1 + h_0$, oder:

$$u^2 = \frac{2gH}{1 + \frac{cl}{r}}. \tag{3}$$

Wenn der Quotient $\frac{r}{l}$ sehr gross ist, wie dies bei den Untersuchungen Darcy's der Fall war, so kann das erste Glied des Nenners im Verhältnisse zu dem zweiten vernachlässigt werden. Bezeichnet man nun $\frac{H}{l}$ mit i und $\frac{c}{2g}$ mit b, so erhält man die Formel von Darcy. Hat dagegen $\frac{l}{r}$ einen geringeren Werth, so muss das erste Glied beibehalten werden. Um zu prüfen, ob wirklich die Formel (3) die Werthe der Ausflussgeschwindigkeit darstellt, die man mit Röhren von der Länge und Weite erhält, wie sie bei den Versuchen über die electromotorische Kraft bei der Ausströmung angewandt worden sind, wurden die folgenden Versuche angestellt. Bei allen wurde ein Quecksilberdruck von 600 mm benutzt. Dass die Geschwindigkeit unter sonst unveränderten Verhältnissen der Quadratwurzel aus dem Drucke proportional wächst, war schon früher öfters dargethan und brauchte daher jetzt nicht besonders untersucht zu werden. Die Geschwindigkeiten sind unter der Voraussetzung, dass $c = 0{,}01555$ ist, berechnet.

Länge	Durchmesser	Beobacht.	Berechn.	Differenz
der Röhren		Ausflussgeschwindigkeit		
250 mm	3,236 mm	6,945 m	6,845 m	+0,100
500	3,204	5,437	5,219	+0,218
500	5,436	6,142	6,426	—0,284
300	4,025	6,850	6,930	—0,080
500	3,987	5,764	5,705	+0,059

Aus dieser Tafel geht hervor, dass die mittlere Geschwindigkeit beim Strömen des Wassers aus kürzeren Röhren mit Durchmessern von einigen Millimetern sich nach der Formel (3), die unter der Voraussetzung, dass w und u einander proportional seien, gebildet ist, berechnen lässt. Hieraus kann man folgern, dass auch für solche Röhren diese Voraussetzung richtig ist.

Gegen jegliche Erfahrung fordert also die aufgestellte Theorie, dass auch bei weiteren Röhren und grösseren Geschwindigkeiten die electrische Stromstärke der Ausflussgeschwindigkeit proportional sein soll.

Der Erfahrung gemäss ist bei gleicher Ausflussgeschwindigkeit die electrische Stromstärke vom Halbmesser der Röhre unabhängig.[1] Nach der fraglichen Theorie müsste sie dagegen der Grösse $2\pi r w$ proportional sein. Aus schon angeführten Gründen darf man hierbei keineswegs die für Capillarröhren geltende Beziehung zwischen u und w benutzen, sondern man muss die durch die Formel (2) angegebene Relation anwenden. Da bei geringen Veränderungen des Halbmessers b als beinahe constant anzusehen ist, so zeigt sich also, dass nach der Theorie die electrische Stromstärke, wenn u denselben Werth behält, dem Halbmesser der Röhre nahezu proportional sein müsste. Auch in dieser Beziehung unterscheiden sich also die Erfahrung und die Theorie von einander.

Aus dem Angeführten dürfte man mit Sicherheit folgern können, dass die aufgestellte Theorie nicht die rechte sein kann.

Stockholm, den 10. November 1879.

---

1) Edlund, Wied. Ann. **1.** p. 161. 1877; **8.** p. 119. 1879.

VII. *Ueber die Erscheinungen, welche eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platte von Magnesiumplatincyanür im polarisirten Lichte zeigt; von E. Lommel.*

1. Betrachtet man eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platte von Magnesiumplatincyanür, welche so dünn ist, dass sie die blauen Strahlen noch mit erheblicher Lichtstärke durchlässt, im convergenten polarisirten Lichte, etwa durch Nörremberg's mikroskopischen Polarisationsapparat, so gewahrt man, wenn die Schwingungsebenen des Polarisators und des Polariskops (Analyseurs) zueinander genau rechtwinkelig stehen, das bekannte, von einem schwarzen Kreuze durchschnittene Ringsystem der einaxigen Krystalle, die ganze Erscheinung natürlich vorherrschend in der rothen Färbung, welche dem Krystall vermöge seiner Absorptionsverhältnisse eigenthümlich ist. Die Platte bietet sonach bei dieser Stellung des Polariskops nichts Ungewöhnliches dar.

Dreht man nun das Polariskop (Nicol'sches Prisma) um ein geringes aus der gekreuzten Stellung heraus, so nehmen die beiden Quadranten der Figur, welche von der Schwingungsrichtung des Polariskops (dem Hauptschnitte des Nicols) durchsetzt werden, eine mehr orangerothe, die beiden anderen Quadranten eine mehr purpurrothe Färbung an (Taf. I Fig. 8). (Die Schwingungsrichtung des Polariskops ist in dieser wie in den folgenden Figuren durch einen Pfeil angedeutet.)

Beim Weiterdrehen des Polariskops wird dieser Farbenunterschied der abwechselnden Quadranten immer auffallender. Steht endlich die Schwingungsrichtung des Polariskops parallel zu derjenigen des Polarisators, so erscheint der verticale (zur feststehenden Schwingungsrichtung des Polarisators, welche in den Figuren horizontal angenommen ist, senkrechte) Balken des nunmehr auf-

tretenden hellen Kreuzes purpurroth und durchsetzt ununterbrochen den Mittelpunkt der Figur; durch ihn wird der horizontale Balken in zwei getrennte Sectoren zerschnitten, welche lebhaft orangeroth gefärbt sind (Taf. I Fig. 9).

2. Beobachtet man im rothen Lichte, indem man das vom Polarisator kommende Strahlenbündel, bevor es die Krystallplatte trifft, durch ein rothes Glas gehen lässt, oder indem man die Erscheinung durch ein rothes Glas betrachtet, so zeigt sich nichts Ungewöhnliches. Die Erscheinungen bleiben, wie man auch das Polariskop drehen mag, die nämlichen, welche jeder einaxig-doppelbrechende Krystall unter den gleichen Umständen darbieten würde. Dasselbe gilt, wenn man bei weisser Beleuchtung eine dickere Platte von Magnesiumplatincyanür betrachtet, welche vermöge ihrer eigenen Absorption nur rothes Licht durchlässt. Auch im gelben Lichte der Natriumflamme zeigt die dünne Platte nur das gewöhnliche Ringsystem und dessen wohlbekannte Wandelungen. Die Untersuchung im kreisförmig polarisirten Lichte lehrt, dass das Magnesiumplatincyanür für rothe und gelbe Strahlen einaxig positiv ist.

3. Besonders bemerkenswerth sind dagegen die Erscheinungen, welche die Krystallplatte im blauen Lichte zeigt.

Schaltet man nämlich ein dunkelblaues Glas ein, oder lässt man das einfallende Licht durch eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak gehen, so sieht man bei gekreuzten Schwingungsebenen ein rechtwinkeliges schwarzes Kreuz ohne Interferenzringe (Taf. I Fig. 10).

Dreht man nun das Polariskop, so bleibt der mit der Schwingungsrichtung des Polarisators parallele (in der Figur wagerechte) Balken des Kreuzes unverändert stehen, während der andere Balken sich mit dem Polariskop dreht, indem er der Schwingungsebene desselben stets parallel bleibt. Man erhält also ein schiefwinkeliges Kreuz (Taf. I Fig. 11), dessen Arme wie vorher

vollkommen dunkel sind. Zugleich erscheinen die spitzwinkeligen Quadranten dunkler als die stumpfwinkeligen.

Stellt man endlich die Schwingungsebene des Polariskops parallel zu derjenigen des Polarisators, so bleiben nur noch die mit dieser gemeinsamen Richtung parallelen Kreuzarme übrig als zwei dunkele Sectoren, welche durch einen schmalen, gegen die Sectoren scharfbegrenzten hellen Zwischenraum voneinander getrennt sind (Taf. I Fig. 12).

4. Aus diesen Erscheinungen geht hervor, dass die zur optischen Axe senkrecht geschnittene Platte von Magnesiumplatincyanür blaue Strahlen, deren Schwingungen im Hauptschnitte erfolgen, nicht durchlässt, sobald ihr Einfallswinkel, d. i. der Winkel, den sie ausserhalb des Krystalls mit der Richtung der optischen Axe bilden, einen gewissen kleinen Werth überschreitet. Dieser Grenzwinkel ist gleich der halben Winkelbreite des hellen Zwischenraumes, der in dem letztbeschriebenen Versuch die beiden dunkeln Sectoren trennt. Mittelst eines zu dem Polarisationsapparat gehörigen kleinen Axenwinkelinstruments fand ich diese Winkelbreite $= 4^0$, den Grenzwinkel also $= 2^0$. In der Einfallsebene oder, was hier dasselbe ist, im Hauptschnitt des Krystalls schwingende blaue Strahlen werden, wenn ihr Einfallswinkel jenen Grenzwinkel übertrifft, in der oberflächlichen Molecülschicht total reflectirt und constituiren die blaue Oberflächenfarbe der Basis, deren Schwingungen stets in der Einfallsebene, d. i. im Hauptschnitt des Krystalls liegen.

Dagegen werden diejenigen Schwingungen des blauen Lichts, welche senkrecht zum Hauptschnitt erfolgen, von der Platte durchgelassen.

Bringt man daher die Platte in den Polarisationsapparat, so werden die Schwingungen des Lichtkegels, nachdem er durch die Platte gegangen ist, für blaues Licht nach dem in Taf. I Fig. 13 dargestellten Schema vor sich gehen. In dieser Figur sind durch die Strichelchen die Amplituden

der Schwingungen ihrer Richtung und Grösse nach in leicht verständlicher Weise angedeutet. Längs dem zur Schwingungsebene des Polarisators parallelen (in der Figur horizontalen) Hauptschnitt sind gar keine Schwingungen vorhanden, ausgenommen in der Mitte, soweit der diesen Hauptschnitt darstellende Durchmesser eine Unterbrechung zeigt. Ueberhaupt finden innerhalb des kleinen, um den Mittelpunkt der Figur weissgelassenen Kreises die Schwingungen in derselben Weise statt, wie bei einem gewöhnlichen einaxigen Krystall, d. h. es sind hier sowohl die zum Hauptschnitt parallelen als die zu ihm senkrechten Schwingungen vorhanden, während von den übrigen Theilen der Platte nur die letzteren durchgelassen werden.

Dass bei dieser Anordnung (Taf. I Fig. 13) der durchgelassenen Schwingungen des blauen Lichts für die verschiedenen Stellungen des Polariskops die oben (3) beschriebenen Erscheinungen eintreten müssen, ergibt sich hiernach von selbst und bedarf keiner weitern Erörterung.

5. Die im weissen Lichte wahrgenommenen Erscheinungen (Taf. I Fig. 8 und 9) erklären sich nun ebenfalls von selbst. Man sieht ein, dass in den beiden Quadranten der Taf. I Fig. 8, welche von der Schwingungsrichtung des Polariskops durchsetzt werden, indem hier das Blau verdunkelt wird, eine mehr orangerothe Färbung hervortreten muss. Den beiden dunkeln Sectoren der Taf. I Fig. 12 entsprechen die orangerothen Sectoren Taf. I Fig. 9, in welchen das blaue Licht ausgelöscht ist.

6. Lässt man einen Strahlenkegel unpolarisirten Lichts durch die Platte gehen, indem man den Polarisationsspiegel des Nörremberg'schen Apparats durch einen gewöhnlichen Spiegel ersetzt, so gewahrt man im blauen Licht, bei jeder Stellung des Polariskops und stets parallel zu dessen Schwingungsebene zwei dunkle Büschel (Sectoren) wie in Taf. I Fig. 12, bei weisser Beleuchtung dagegen die entsprechenden orangefarbenen Büschel auf purpurfarbigem Grunde, selbstverständlich ohne Interferenzringe. Die Erklärung ergibt sich nach dem Obigen von selbst.

7. Untersucht man das von unserer dünnen Platte durchgelassene Licht mittelst der dichroskopischen Lupe, so erscheinen die beiden Bilder in derselben rothen Nuance, wenn die Platte zur Axe der Lupe senkrecht steht. Dreht man aber die Platte ein wenig um eine zum Hauptschnitt des Kalkspaths senkrechte Axe, sodass die Strahlen schief in einer zum Hauptschnitt der Lupe parallelen Einfallsebene auf die Platte treffen, so erscheint das gewöhnliche Bild purpurn, das aussergewöhnliche orangeroth gefärbt, dreht man dagegen die Platte um eine zur Verbindungslinie der beiden Bilder parallele Axe, sodass die Einfallsebene senkrecht zum Hauptschnitt der Lupe zu stehen kommt, so nimmt das gewöhnliche Bild eine orangerothe, das aussergewöhnliche eine purpurne Färbung an. In beiden Fällen wird nämlich das in der Einfallsebene schwingende blaue Licht beseitigt, und dadurch diese eigenthümliche Art von Dichroismus hervorgebracht.

8. Ein paralleles Bündel blauen Lichts wird von der Platte, wenn es unter einem Einfallswinkel von mehr als 2° auf dieselbe trifft, in der Einfallsebene vollständig polarisirt durchgelassen. Für blaues Licht kann daher die Platte als Polarisator dienen.

9. Die beschriebenen Erscheinungen habe ich zuerst auf theoretischem Wege aufgefunden, als Consequenzen der Theorie des Lichts, deren Umrisse ich in mehreren Abhandlungen[1]) mitgetheilt habe. Die Fläche zweiten Grades, welche ich „Absorptionsfläche"[2]) genannt habe, und welche für die bisher allein bekannte normale Doppelbrechung ein Ellipsoid ist, wird nämlich für Strahlen, deren Schwingungszahl grösser ist als diejenige des Absorptionsstreifens, ein Hyperboloid. Aus dieser Gestalt der Absorptionsfläche folgt, im Zusammenhange mit der anomalen Dispersion und den Oberflächenfarben[3]), die anomale Doppelbrech-

1) Lommel, Wied. Ann. **3.** p. 251; **3.** p. 339; **4.** p. 55. 1878.
2) Lommel, Wied. Ann. **4.** p. 61. 1878.
3) Lommel, Wied. Ann. **4.** p. 63. 1878.

ung, deren Effecte in den oben beschriebenen Erscheinungen zu Tage treten. Von Krystallen, welche dieselbe zu zeigen geeignet wären, bot sich mir bis jetzt nur das Magnesiumplatincyanür, welches, als sehr dünne Platte angewendet, die aus der Theorie gezogenen Folgerungen vollkommen bestätigt.

Erlangen, im September 1879.

VIII. *Chemische Monographie der Glimmergruppe; von C. Rammelsberg.*

Unter den grossen Silicatgruppen des Mineralreiches bietet die Glimmergruppe in physikalischer und chemischer Hinsicht ein hervorragendes Interesse dar, und es sind die Krystallform, das optische Verhalten und die chemische Zusammensetzung ihrer Glieder der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen, welche auch heute ihren Abschluss noch nicht erreicht haben.

Die Krystallform gab schon zwischen Hauy und Bournon Anlass zu einem Streit über die Grundform, und die Differenz der Ansichten über das Krystallsystem blieb auch dann noch, als man die Flächensymmetrie und die Resultate von Winkelmessungen zur Entscheidung der Frage benutzte. Denn diese Hülfsmittel lassen sich nur für wenige Glimmer in Anwendung bringen, unter welchen die Krystalle vom Vesuv alle anderen weit übertreffen. Winkelmessungen an diesem Glimmer führten Phillips (1837) und G. Rose (1844) zur Annahme des zwei- und eingliedrigen, Marignac (1847) zu der des sechsgliedrigen Systems, während Kokscharow (1854) aus zahlreichen Beobachtungen schloss, das System sei das zweigliedrige, und das zwei- und eingliedrige Ansehen der Krystalle sei Folge einer Partialität der Rhombenoktaeder und der Querprismen.

Kokscharow's Arbeit bewies aber schon, dass das Krystallsystem des Glimmers durch Messungen allein nicht sicher festzustellen ist. Denn indem er die Basis der Krystalle als ein reguläres Sechseck erkannte, liessen sich die Glimmerkrystalle auch als sechsgliedrig-rhomboëdrisch betrachten, und diese zuerst von Marignac gemachte Annahme, der Kenngott (1853) für den Glimmer von Greenwood furnace beitrat, wurde namentlich von Hessenberg (1866) vertheidigt, der an vesuvischen Krystallen eine rhomboëdrische Symmetrie zu erkennen glaubte, wobei er sich insbesondere auf drei gegen die Basis unter 100° geneigte Flächen stützte, welche er als ein Rhomboëder betrachtete. Dieser Ansicht traten G. vom Rath (1874) und auch Kokscharow (1875) bei, wiewohl ersterer darauf aufmerksam machte, dass bei rhomboëdrischer Deutung des Systems alle übrigen Formen (Dihexaëder zweiter Ordnung, Prisma) unvollzählig, partialflächig erscheinen.

Zwei Jahre später (1877) sehen wir Kokscharow zu seiner frühern Ansicht zurückkehren und lernen gleichzeitig eine Arbeit von Tschermak kennen, welcher die rhomboëdrische Symmetrie des Vesuvglimmers und die physikalische Gleichheit der drei sogenannten Rhomboëderflächen leugnet und, wesentlich gestützt auf optische Kennzeichen, für alle Glimmer das zwei- und eingliedrige System mit nahe rechtwinkligen Axen fordert.

In dieser ganzen Zeit war auch das optische Verhalten der Glimmer Gegenstand vieler Untersuchungen. Biot und Brewster unterschieden optisch ein- und zweiaxige Glimmer, sodass manche Mineralogen auch zwei verschiedene Krystallsysteme voraussetzten. Sénarmont's schöne Arbeiten (1851) lehrten, dass die Winkel zweiaxiger Glimmer von fast 0° bis 77° variiren, und dass die Axenebene bei manchen Glimmern der grossen, bei anderen der kleinen Diagonale der rhombischen Basis parallel geht. Aber Sénarmont erklärte zugleich, es gebe keine einaxigen Glimmer; scheinbar einaxige seien zweiaxige mit sehr kleinem Winkel.

In der That wissen wir jetzt, dass die gesetzmässigen Beziehungen zwischen der geometrischen Form der Krystalle und ihrem optischen Verhalten nur dann durch die Beobachtung bestimmt zu erkennen sind, wenn die Masse homogen ist, wenn keine innere Spannung stattfindet; wir wissen, dass Glimmerplatten, abwechselnd so geschichtet, dass die Axenebenen sich rechtwinklig kreuzen, die Interferenzbilder einaxiger Krystalle geben. Und wenn M. Bauer an einzelnen Glimmern ohne Dichroismus durch das Stauroskop oder die Dove'sche Probe die optisch einaxige Natur erkannt hat, so darf man daraus nicht ohne weiteres auf die Nothwendigkeit der sechsgliedrigen Form für diese Glimmer schliessen.

Anerkannte Autoritäten im Gebiete der krystallographischen Optik, wie Sénarmont und Des Cloizeaux, haben sich für das zweigliedrige System erklärt, obgleich die zwei- und eingliedrige Symmetrie der besten Krystalle in diesem Fall zur Annahme einer Partialflächigkeit zwingt. Aber jene Forscher haben ihre Ansicht vorzüglich auf der Voraussetzung begründet, dass die Mittellinie der optischen Axen mit der Normale zur Basis zusammenfalle. Da war es in der That eine wichtige, von Hintze im Jahre 1874 an einem schönen Krystall von Vesuvglimmer gemachte Beobachtung, dass dies nicht der Fall ist, und seitdem haben Bauer und Tschermak diese Thatsache an vielen Glimmern bestätigt.

Die Arbeiten von Reusch und von Bauer haben durch das Studium der Schlag- und Drucklinien unsere Kenntnisse von der Structur der Glimmer wesentlich gefördert, und wir dürfen heute mit Sicherheit behaupten das Krystallsystem der Glimmer ist ein zwei- und eingliedriges, dadurch ausgezeichnet, dass $a:b$ im Verhältniss $1:\sqrt{3}$ und die Axenwinkel ac einem rechten höchst nahe kommen. Die Ansicht von Phillips und von G. Rose bezüglich des Systems, die älteste, hat schliesslich den Sieg davongetragen.

Der vorliegende Aufsatz bezweckt, darzulegen, wieweit die Kenntniss der chemischen Zusammensetzung der Glimmer gediehen ist. Was bis zum Jahre 1875 hierüber zu sagen war, hat der Verfasser damals zusammengestellt[1]), und er durfte für die Ansicht, der Wasserstoff des erst beim Glühen entweichenden Wassers sei ein Element des chemischen Molecüls, welches die einwerthigen (Kalium, Natrium, Lithium), wie man zu sagen pflegt, ersetze, in der so gewonnenen Uebereinstimmung einer Anzahl von Kaliglimmern eine Stütze erblicken. In letzter Zeit hat das untersuchte Material einen dankenswerthen Zuwachs erhalten durch Analysen, deren Stoff zuvor durch Tschermak physikalisch geprüft worden war.

Unter diesen neuen Analysen befanden sich auch solche von Lithionglimmern, deren ungewöhnlich hoher Lithiongehalt den Verfasser bewog, diese Abtheilung selbst zu untersuchen und seine Resultate vorzulegen.[2]) An diese hat er neue Analysen von 16 Glimmern angereiht und sich bemüht, auch die Zersetzung fluor- (und wasser-) haltiger Glimmer in hoher Temperatur kennen zu lernen.[3])

Wenn es richtig ist, dass alle Glimmer dieselbe Krystallform haben, die einzelnen also isomorphe Glieder sind, so gibt die Form kein Mittel zu ihrer Unterscheidung ab. Ebenso wenig können die optischen Unterschiede dazu dienen, und wenn sich wirklich zeigen sollte, dass die Lage der optischen Axen oder ihre Neigung irgend eine Beziehung zu ihrer Zusammensetzung haben, so sind Unterschiede dieser Art doch erst die Folge materieller Verschiedenheit, und somit basirt jede Eintheilung der Gruppe auf der chemischen Zusammensetzung ihrer Glieder.

1) Rammelsberg, Handbuch der Mineralchemie. 2. p. 511. 1875.
2) Rammelsberg, Wied. Ann. 7. p. 136. 1879.
3) a. a. O. p. 146.

Ausser dem Sauerstoff sind nur Silicium, Aluminium und Kalium in *allen* Glimmern vorhanden; selten tritt Natrium statt des Kalium herrschend auf. Andere einwerthige Elemente, wie Lithium und Wasserstoff, sind jenen gleichwerthig, gleichwie Eisen und Mangan als Fe und Mn dem Aluminium. Die einfachste Glimmerzusammensetzung ist also die eines Silicats von $\overset{I}{R}$ und R.

In einer grossen Zahl von Glimmern finden wir aber ausserdem auch sogenannte zweiwerthige Elemente, namentlich Magnesium und Eisen, seltener Baryum, während Calcium fast ganz fehlt, wenn die Margarite nicht als Glimmer betrachtet werden dürfen.

Dem Sauerstoff ist das Fluor gleichwerthig (O = 2 Fl).

Die Zahlen einer Glimmeranalyse können immer nur bis zu einem gewissen Grade richtig sein, auch wenn das Material ganz rein, und die Ausführung möglichst sorgfältig war, weil die Bestimmung der Kieselsäure bei Gegenwart von Fluor, die des Fluors selbst, die Trennung der Alkalien, die Ermittelung der beiden Oxyde des Eisens etc. ihre Schwierigkeiten auch für geübte Analytiker haben. Auch lässt sich fragen, ob verschiedene Proben desselben Vorkommens nicht Unterschiede zeigen können, wie dies an einem in seinen einzelnen Theilen verschieden gefärbten Turmalinkrystall der Fall ist. Doch lassen die bisherigen Erfahrungen in dieser Beziehung keine wesentlichen Abweichungen erkennen.

Mit voller Sicherheit darf behauptet werden, *die verschiedenen Glimmer sind nicht sämmtlich analog zusammengesetzt*, die sie bildenden Silicate stehen nicht durchgängig auf gleicher Sättigungsstufe, *es sind theils Singulosilicate, theils Verbindungen von Singulo- und Bisilicaten.*

Eine noch weiter gehende stöchiometrische Differenz haben wir in der Feldspathgruppe, aber während hier zahlreiche Mittelglieder aus isomorpher Mischung zweier differenten Endglieder, welche wir für sich kennen, hervor-

gehen, fehlt uns die Kenntniss solcher Grundverbindungen unter den Glimmern, und es würde gar keinen Werth haben, derartige Endglieder hypothetisch anzunehmen.

Eine Eintheilung der Glimmer nach ihrer stöchiometrischen Analogie ist auch nicht möglich, weil es Glimmer gibt, welche qualitativ gleich oder fast gleich und doch nicht analog zusammengesetzt sind.

In qualitativer Hinsicht sind zwei grosse Abtheilungen in der Glimmergruppe zu unterscheiden:

1) Glimmer, welche aus Silicaten von Aluminium und von einwerthigen Elementen (Alkalimetallen), d. h. Kalium, Natrium, Lithium etc. bestehen, zu welchen letzteren häufig auch Wasserstoff tritt. Alkaliglimmer.

2) Glimmer, welche neben den genannten auch Silicate zweiwerthiger Elemente enthalten, d. h. Magnesium, Eisen (Baryum, Mangan). Magnesia-, Eisen- und Barytglimmer.

Allein es gibt kaum einen Alkaliglimmer, welcher frei von Eisen und Magnesium wäre; indem die Menge beider zunimmt, entstehen Glieder, welche den Anschluss an die zweite Gruppe vermitteln.

Um die Sättigungsstufe eines Glimmers zu erfahren, verwandelt man die $\overset{II}{R}$ und $\overset{VI}{R}$ in ihre Aequivalente von $\overset{I}{R}$ und berechnet das Verhältniss $\overset{I}{R}:Si$, welches für Singulosilicate $= 4:1$, für Bisilicate $= 2:1$ ist. Die Berechnung der vorhandenen Analysen in diesem Sinne lehrt, dass viele Glimmer Singulosilicate, nicht wenige aber auch Verbindungen beider Sättigungsstufen sind. Dass viele Analysen das Resultat zweifelhaft lassen, kann am Material und den Methoden liegen, bei älteren sind H, Fe und Fe nicht sicher oder letzteres überhaupt nicht bestimmt. Es wurden jedoch auch ältere Analysen von bewährten Forschern aufgenommen, denn man darf in keinem Fall glauben, dass spätere Mineralanalysen überhaupt und nothwendig mehr Vertrauen verdienten als frühere.

I. Alkaliglimmer.

Sie zerfallen in Natronglimmer, Kaliglimmer und Lithionglimmer. Nur jene beiden enthalten Wasserstoff; Fluor ist in den beiden ersten in geringer Menge vorhanden, während die Lithionglimmer reich daran sind.

A. Natronglimmer. Die bekannten sind Lepidolithe (Paragonit). Ihre Analysen lassen sie als Singulosilicate erkennen, in welchen H:Na = 2:1 ist. Sie sind:

$$\overset{\text{I}}{R}_2 \, \text{Al} \, Si_2 \, O_8 = \left\{ \begin{array}{l} 2\, H_4 \, Si \, O_4 \\ \;\; Na_4 Si \, O_4 \\ 3\, Al_2 \, Si_3 \, O_{12} \end{array} \right\}.$$

In dem von Pregratten ist K:Na = 1:6.

B. Kaliglimmer. Nur unter den Lepidolithen dieser Abtheilung (Damourit) ist die reine Verbindung der Singulosilicate:

$$\overset{\text{I}}{R}_2 \, \text{Al} \, Si_2 \, O_8$$

anzutreffen, denn fast immer ist $\overset{\text{II}}{R}_2 \, Si \, O_4$ gleichzeitig vorhanden, wobei R = Mg, Fe (Mn, Ca) ist.

Erste Abtheilung. Dass die grosse Mehrzahl der Kaliglimmer aus Singulosilicaten bestehe, kann nicht zweifelhaft sein, auch wenn manche Analysen es an R fehlen lassen (Utö, Lane's mine, Bengalen Rg), denn es mag zuweilen des Wassers zu wenig, der Kieselsäure zu viel angegeben sein.

Die Atomverhältnisse der einzelnen sind aus beistehender Tabelle zu ersehen.

		$\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : \overset{VI}{R} : Si$	$\overset{I}{R} : \overset{VI}{R} : Si$ ($\overset{II}{R} = 2\overset{I}{R}$)	$\overset{I}{R} : Si$ ($\overset{II}{R} = 2\overset{I}{R}$; $\overset{VI}{R} = 6\overset{I}{R}$)	H : K, Na
Natronglimmer.					
Gotthardt	Rammelsberg . .	0 $\overset{II}{R}$	1,8 : 1 : 2,0	3,9 : 1	2,3 : 1
Pregratten	Oellacher (Rg.) . .	45 : 1 : 22 : 45	2,1 : 1 : 2,0	4,0 : 1	2 : 1
Kaliglimmer (I. Abtheilung).					
Pontivy (Damourit) .	Delesse	0 $\overset{II}{R}$	2,2 : 1 : 2,0	4,1 : 1	2,5 : 1
Unionville (Damourit) .	König	111 : 1 : 52 : 96	2,2 : 1 : 1,85	4,4 : 1	2 : 1
Lichfield (Damourit) .	Smith	47 : 1 : 20 : 41	2,4 : 1 : 2,0	4,1 : 1	2,6 : 1
Tamsweg (Dam.; Onkos.)	Schwarz	44 : 1 : 22 : 45	2,1 : 1 : 2,0	3,9 : 1	2,2 : 1
Utö	Rammelsberg . .	39 : 1 : 21 : 45	2,1 : 1 : 2,0	3,8 : 1	1,6 : 1
Goshen, Mass. . . .	„ „ . .	33,5 : 1 : 19,5 : 39	1,8 : 1 : 2,0	3,9 : 1	2 : 1
Lane's mine	Brush	33,5 : 1 : 16 : 34	2,3 : 1 : 2,2	3,7 : 1	2,1 : 1
Lisens, Tyrol	Roth	29 : 1 : 13 : 27	2,3 : 1 : 2,0	4.1 : 1	3,3 : 1
Bengalen	Blau	24,4 : 1 : 11,4 : 24	2,3 : 1 : 2,1	4,0 : 1	2,5 : 1
„	Rammelsberg . .	22 : 1 : 11,8 : 25,5	2,0 : 1 : 2,1	3,7 : 1	2,0 : 1
Horrsjöberg (Damourit)	Igelström	21 : 1 : 10,7 : 20,7	2,1 : 1 : 1,9	4,2 : 1	2,1 : 1
Ostindien	Sipöcz	18,5 : 1 : 9 : 18,6	2,3 : 1 : 2,1	3.9 : 1	2,4 : 1
Ballygihen	Haughton	17 : 1 : 9 : 19	2,1 : 1 : 2,1	3,9 : 1	1,9 : 1
Grindelwald	Fellenberg . . .	16,7 : 1 : 7,3 : 16,3	2,5 : 1 : 2,2	3,85 : 1	2,6 : 1
Easton, Pennsylvanien	Rammelsberg . .	14,4 : 1 : 9,2 : 19,5	1,8 : 1 : 2,1	3,7 : 1	1,9 : 1
Ceux, Vogesen . . .	Delesse	13,4 : 1 : 6,6 : 13	2,3 : 1 : 2,2	3,7 : 1	2 : 1
Leinsterberg	Haughton	47,4 : 1 : 18,6 : 41	2,6 : 1 : 2,2	3,9 : 1	2,2 : 1
Glendalough	„	22,4 : 1 : 7,7 : 17,8	3,2 : 1 : 2,3	4,0 : 1	2,8 : 1
Dreifelsengebirge . .	„	16,5 : 1 : 6,3 : 13,7	3 : 1 : 2,2	4,1 : 1	2,2 : 1

Im allgemeinen ist $\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}} : \mathrm{Al} = 2:1$, also die Formel:

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_2\,\mathrm{Al}\,\mathrm{Si}_2\mathrm{O}_8 \left\{ \begin{array}{l} \overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ \mathrm{Al}_2\,\mathrm{Si}_3\,\mathrm{O}_{12} \end{array} \right\}$$

gültig.

Das Verhältniss $\mathrm{H:K}$ (Na) ist in den meisten Fällen $= 2:1$ wie bei den Natronglimmern, d. h. das Ganze ist:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2\,\mathrm{H}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ \mathrm{K}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ 3\,\mathrm{Al}_2\,\mathrm{Si}_3\,\mathrm{O}_{12} \end{array} \right\}.$$

Auch in Utö ist wohl 2:1 anzunehmen, obwohl ich neuerdings nur 3,58 Proc. Wasser erhielt.

Allein es findet sich auch $= 2{,}5:1$ (Pontivy, Bengalen Blau, Ostindien), selbst $= 3:1$ (Lisens, Glendalough); sodass diese Glimmer:

$$\left\{ \begin{array}{r} 5\,\mathrm{H}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ 2\,\mathrm{K}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ 7\,\mathrm{Al}_2\,\mathrm{Si}_3\,\mathrm{O}_{12} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{r} 3\,\mathrm{H}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ \mathrm{K}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ 4\,\mathrm{Al}_2\,\mathrm{Si}_3\,\mathrm{O}_{12} \end{array} \right\}$$

sind.

Der Damourit von Lichfield enthält je 1 At. K und Na. Auch in anderen ist Natron in erheblicher Menge enthalten (Lane's mine, Ceux, Dreifelsengebirge, Glendalough).

Nicht immer aber ist $\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}} : \mathrm{R} = 2:1$. Drei irländische, von Haughton untersuchte Glimmer (Leinsterberg, Dreifelsengebirge, Glendalough) ergaben 2,6:1 und 3:1.[1]) Bestätigt sich dies, so sind diese Glimmer (das erste Verhältniss $= 8:3$ angenommen):

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{16}\,\mathrm{R}_6\,\mathrm{Si}_{13}\,\mathrm{O}_{52} = \left\{ \begin{array}{l} 4\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ 3\,\mathrm{Al}_2\,\mathrm{Si}_3\,\mathrm{O}_{12} \end{array} \right\}$$

und

$$\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_{12}\,\mathrm{R}_4\,\mathrm{Si}_9\,\mathrm{O}_{36} = \left\{ \begin{array}{l} 3\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}_4\ \mathrm{Si}\ \mathrm{O}_4 \\ 2\,\mathrm{Al}_2\,\mathrm{Si}_3\,\mathrm{O}_{12} \end{array} \right\}.$$

Stets ist eine gewisse Menge eines Singulosilicats von zweiwerthigen Elementen (Mg, Fe etc.) vorhanden. Das-

1) Auch Grindelwald kommt ihnen nahe.

selbe ist als solches beigemischt, nicht aber in Form von $\overset{II}{R}AlSi_2O_8$ vorhanden. Dies sieht man schon daraus, dass (s. d. Tabelle) das Verhältniss $\overset{I}{R} : R : Si$, wenn $\overset{II}{R} = 2\overset{I}{R}$ gesetzt ist, von 2:1:2 oft merklich abweicht; man kann aber auch direct aus den Analysen Aufschluss erhalten. Es ist nämlich ein solcher Glimmer:

entweder (A) oder (B)

$$\left\{\begin{array}{l} n\left\{\begin{array}{l}\overset{I}{R}_4 Si O_4 \\ Al_2 Si_3 O_{12}\end{array}\right\} \\ \overset{II}{R}_2 Si O_4 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} n\left\{\begin{array}{l}\overset{I}{R}_4 Si O_4 \\ Al_2 Si_3 O_{12}\end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l}\overset{II}{R}_2 Si O_4 \\ Al_2 Si_3 O_{12}\end{array}\right\} \end{array}\right\}.$$

Ist beim Glimmer:

von	Bengalen	n = 24
„	Ostindien	= 18,

so muss

	für A $\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : R : Si$	für B $\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : R : Si$
Bengalen	24 : 1 : 12 : 24,5	24 : 1 : 13 : 26
Ostindien	18 : 1 : 9 : 18,5	18 : 1 : 10 : 20 sein.

Dies Verhältniss ist aber bei:

Bengalen	24 : 1 : 11,2 : 23,6
Ostindien	18 : 1 : 8,8 : 18,1 .

Mithin kann nur Formel A gewählt werden.

Zweite Abtheilung. Die Menge der zweiwerthigen Elemente Magnesium und Eisen ist aber in gewissen Kaliglimmern grösser als in den (in der Tabelle verzeichneten) Gliedern der ersten Abtheilung. Die Berechnung ihrer Analysen zeigt, dass diese Glimmer mehr Kieselsäure enthalten, dass sie aus Singulo- und Bisilicaten bestehen. Soweit unsere Kenntnisse reichen, müssen zwei Reihen unterschieden werden.

Erste Reihe, die Glimmer von Zillerthal, Royalston, Aschaffenburg, Broddbo, Soboth, Ochozk und Ytterby.

1) Zillerthal (Rothenkopf). Sipöcz.

2) South Royalston, Massachusets. Ein grauer, in dünnen Blättchen farbloser Glimmer, dessen V.-G. 2,947 ist, und der früher schon, wiewohl unvollständig, von Petersen untersucht wurde. Meine Versuche ergaben: Trockenverlust 0,5 Proc., Glühverlust 3,80, beim Schmelzen mit Bleioxyd 4,0 Proc.

3) Aschaffenburg, von mir schon früher analysirt. Glühverlust 3,92 Proc., mit Bleioxyd 4,23, nach G. Bischof 4,21 Proc.

4) Soboth, Steiermark. Von Löbisch untersucht.

5) Ochozk. Nach einer Analyse H. Rose's, deren Fluor- und Wassergehalt durch Rechnung corrigirt ist. Neben Fe ist sicherlich Fe vorhanden.

6) Ytterby, Schweden. Ein weisser Glimmer aus gneisartigem Granit, von röthlichem Orthoklas, Quarz und einem grünschwarzen Glimmer (oder Chlorit) begleitet.

7) Broddbo bei Fahlun. Grosse bräunlichgraue durchsichtige rhombische Tafeln. Ist vielleicht derselbe Glimmer, welchen H. Rose und Svanberg früher untersucht haben. Trockenverlust 0,36 Proc., Glühverlust 4,33 Proc., mit Bleioxyd 4,02 Proc. Der geglühte ist silberweiss, metallglänzend.

Wir stellen zuvörderst die analytischen Resultate zusammen:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Fluor	—	0,74	0,19	—	0,52	0,94	0,64
Kieselsäure	45,87	45,97	47,69	48,76	47,19	45,21	47,13
Thonerde	30,86	30,40	32,50	29,91	33,80	33,40	30,60
Eisenoxyd	5,70	5,11	3,07	4,24	4,47	2,78	4,81
Eisenoxydul	1,69	1,05	2,02	0,41	—	2,00	0,61
Magnesia	1,79[1])	2,03	1,73	2,96[2])	2,61	1,58	1,30
Kali	9,07	9,92	9,70	6,83	8,55	10,71	10,26
Natron	0,54	0,59	—	2,31	—	0,42	0,74
Wasser, geb.	4,60	4,00	4,08	4,60	3,64	3,95	4,02
„ hygrosk.	—	0,50	—	—	—	0,33	0,76
	100,12	100,31	100,98	100,02	100,88	101,32	100,87

1) Worin 0,23 CaO.

2) Desgl. 0,33.

Hieraus ergeben sich folgende Atomverhältnisse:

($\overset{II}{R} = 2\overset{I}{R}$; $\mathbf{R} = 6\overset{I}{R}$)

	$\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : \mathbf{R} : Si$	$\mathbf{R} : Si$	$\overset{I}{R} : Si$
1.	11 : 1 : 5 : 11,6	1 : 2,3	3,7 : 1
	(9,5)		
2.	10 : 1 : 5 : 11,8	1 : 2,3	3,6 : 1
3.	9,2 : 1 : 4,7 : 11,2	1 : 2,4	3,6 : 1
4.	9,4 : 1 : 4 : 10,4	1 : 2,6	3,3 : 1
	(8,5)		
5.	9 : 1 : 5,5 : 12	1 : 2,2	3,6 : 1
	(8,4)		
6.	9,7 : 1 : 5,1 : 10,8	1 : 2,1	3,9 : 1
7.	17 : 1 : 8 : 19	1 : 2,4	3,5 : 1
	(18)		

Die letzte Columne lehrt, dass diese Glimmer aus Singulo- und Bisilicaten bestehen, und dass sie, wenn man für sie alle 3,5 : 1 annimmt:

$$\overset{I}{R}_{14} Si_4 O_{15} = \overset{I}{R}_2 Si O_3 + 3 \overset{I}{R}_4 Si O_4$$

sind. Wird nun $\mathbf{R} : Si = 1 : 2,4$ angenommen, so ergibt sich der Ausdruck:

$$\overset{I}{R}_{10} \overset{II}{R} \mathbf{R}_5 Si_{12} O_{45}$$

für diese Reihe, welcher wiederum zu der speciellen Formel:

$$\left\{ \begin{array}{c} 5 \left\{ \begin{array}{l} \overset{I}{R}_2 Si\ O_3 \\ \mathbf{R}\ Si_3 O_9 \end{array} \right\} \\ \overset{II}{R}\ Si\ O_3 \end{array} \right\} + 3 \left\{ \begin{array}{c} 5 \left\{ \begin{array}{l} \overset{I}{R}_4 Si\ O_4 \\ \mathbf{R}_2 Si_3 O_{12} \end{array} \right\} \\ \overset{II}{R}_2 Si\ O_4 \end{array} \right\}$$

führt.

Die einzelnen Glieder differiren nur in dem Verhältnisse der R.

	Gefunden.			Angenommen.		
	Fe : Al;	Fe : Mg;	Na : K			
1)	1 : 9	— 1 : 2	— 1 : 10	1 : 9	— 1 : 2	— 1 : 10
2)	1 : 9,2	— 1 : 3,4	— 1 : 10,5	1 : 9	— 1 : 3,5	— 1 : 10
3)	1 : 17	— 1 : 1,5	—	1 : 17	— 1 : 1,5	
4)	1 : 11	— 1 : 12	— 1 : 2	1 : 11	— 1 : 12	— 1 : 2
5)	1 : 11	—		1 : 11		
6)	1 : 19	— 1 : 1	— 1 : 16,3	1 : 19	— 1 : 1	— 1 : 16
7)	1 : 10	— 1 : 4	— 1 : 9,3	1 : 10	— 1 : 4	— 1 : 9

Allerdings ist bei diesen Zahlen nicht gleich grosse Sicherheit zu erwarten.

Das Verhältniss K(Na) : H ist evident = 1 : 2, denn wir finden es bei:

1 = 1 : 2,4	4 = 1 : 2,3	6 = 1 : 1,8
2 = 1 : 2	5 = 1 : 2,2	7 = 1 : 1,9
3 = 1 : 2,1		

Hiernach wird die berechnete Zusammensetzung der einzelnen folgende:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Fl	—	—	—	—	—	0,98	—
SiO_2	47,26	47,36	47,41	48,10	47,57	46,43	47,39
AlO_3	30,30	30,68	31,90	31,34	31,07	31,44	30,39
FeO_3	5,25	5,26	2,95	4,45	4,40	2,58	5,27
FeO	1,57	1,05	1,87	0,37	—	2,32	0,95
MgO	1,75	2,05	1,58	2,47	2,64	1,29	2,10
K_2O	9,25	9,28	10,31	6,97	10,35	10,60	9,28
Na_2O	0,68	0,68	—	2,30	—	0,44	0,68
H_2O	3,94	3,94	3,98	4,00	3,97	4,32	3,94
	100	100	100	100	100	100	100

In Nr. 6 ist Fl : $\overset{II}{R}$ = 0,8 : 1.

Gewiss liegt die Vermuthung nahe, dass diese Glimmer Mischungen seien von reinen Alkaliglimmern (Singulosilicaten) und Magnesiaglimmern. Wir werden aber weiterhin sehen, dass die ganz oder fast eisenfreien Magnesiaglimmer in der That dieselben Verbindungen beider Silicatstufen sind.

Wir meinen also, die magnesiaarmen Kaliglimmer sind keine Mischungen beider Arten, und erinnern daran, dass in ihnen eisenreiche Magnesiaglimmer angenommen werden müssten, dass solche aber keine Bisilicate enthalten.

Zweite Reihe. — Die von Scheerer untersuchten Alkaliglimmer des sächsischen Gneis sind noch weniger basisch als die vorigen, denn sie führen im ganzen auf:

$$\overset{I}{R}_6 Si_2 O_7 = \overset{I}{R}_2 Si O_3 + \overset{I}{R}_4 Si O_4,$$

d. h. auf Verbindungen von je einem Molecül beider Silicate. Ihr Säuregehalt ist grösser als 50 Proc.

Wählt man z. B. die Analyse Nr. 5[1]), so ergibt sich:

$$\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : \mathbf{R} : Si = 7 : 1 : 3 : 9,$$

also die Formel:

$$\overset{I}{R}_{11} \overset{II}{R}_2 \mathbf{R}_6 Si_{18} O_{63},$$

oder speciell:

$$\left\{\begin{matrix} 7\,\overset{I}{R}_2\,Si\,O_3 \\ 2\,\overset{II}{R}\,Si\,O_3 \\ 6\,\mathbf{R}\,Si_3\,O_9 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 7\,\overset{I}{R}_4\,Si\,O_4 \\ 2\,\overset{II}{R}_2\,Si\,O_4 \\ 6\,\mathbf{R}_4\,Si_3\,O_{12} \end{matrix}\right\}$$

und setzt man: $\mathbf{Fe} : \mathbf{Al} = 1 : 8$; $Fe : Mg\,(Ca) = 1 : 1{,}5$,
$K(Na) : H = 1 : 3$ und $Na : K = 1 : 4$,

so ist die Zusammensetzung:

	Gefunden.	Berechnet.
Kieselsäure . . .	51,80	51,65
Thonerde	25,78	26,15
Eisenoxyd . . .	5,02	5,10
Eisenoxydul . . .	2,66	2,95
Magnesia	2,32	2,30
Kali	6,66	6,29
Natron	1,22	1,04
Wasser	4,79	4,52
	100,25	100,00

Noch weniger als die vorigen sind diese Glimmer Mischungen von Alkali- und Magnesiaglimmer.

C. Lithionglimmer. Diese Abtheilung der reinen Alkaliglimmer unterscheidet sich von der lithionfreien in physikalischer Hinsicht wenig. Es sind theils grossblätterige Glimmer, theils Aggregate kleiner Krystalle, in welchem Falle sie gleich Paragonit und Damourit als Lepidolithe (Lithionlepidolithe) bezeichnet werden. Infolge eines Mangangehaltes besitzen sie eine röthliche Farbe.

Ihre chemische Natur ist nicht blos dadurch ausgezeichnet, dass zu dem Kalium Lithium hinzutritt, sondern vorzüglich dadurch, dass sie eine relativ grosse Menge Fluor enthalten.

---

1) Rammelsberg, Handbuch der Mineralchemie, 2. p. 518. 1875.

Aus meinen Versuchen hat sich ergeben, dass die Lithionglimmer frei von Wasserstoff sind.

Diese Versuche habe ich bereits früher mitgetheilt[1]), und es ist daher hier nur anzuführen, dass die Glieder dieser Abtheilung, so weit wir sie kennen, gleiche Grundzusammensetzung haben, dass sie Verbindungen von 1 Mol. Singulosilicat und 3 Mol. Bisilicat sind. In denen von Rozena und Paris sind die Molecüle der Silicate von R und $\mathbf{R} = 1:1$, in dem von Juschakowa stehen beide in dem Verhältnisse 7:6.

Rozena. Paris.

$$\overset{\text{I}}{R}_{10}\,\mathbf{R}_5\,Si_{16}\,O_{52} = \begin{Bmatrix} \overset{\text{I}}{R}_4\,Si\,O_4 \\ \mathbf{R}_2\,Si_3\,O_{12} \end{Bmatrix} + 3\begin{Bmatrix} \overset{\text{I}}{R}_2\,Si\,O_3 \\ \mathbf{R}\,Si_3\,O_9 \end{Bmatrix}$$

Juschakowa.

$$\overset{\text{I}}{R}_{14}\,\mathbf{R}_6\,Si_{20}\,O_{65} = \begin{Bmatrix} 7\,\overset{\text{I}}{R}_4\,Si\,O_4 \\ 6\,\mathbf{R}_2\,Si_3O_{12} \end{Bmatrix} + 3\begin{Bmatrix} 7\,\overset{\text{I}}{R}_2\,Si\,O_3 \\ 6\,\mathbf{R}\,Si_3O_9 \end{Bmatrix}$$

Für jeden dieser drei Glimmer ist das Verhältniss der Oxy- und Fluosilicate ein bestimmtes.

Rozena.

$$\begin{Bmatrix} 11\,(\overset{\text{I}}{R}_{10}\,\mathbf{R}_5\,Si_{16}\,O_{52}) \\ (\overset{\text{I}}{R}_{10}\,\mathbf{R}_5\,Si_{16}\,Fl_{104}) \end{Bmatrix}$$

	Berechnet.	Gefunden.	Berwerth.
Fl	7,58	7,12 — 7,18	7,88
SiO_2	51,58	51,12 — 51,78	51,43
$\mathbf{Al}O_3$	26,77	26,76 (Max.)	27,32 (Min.)
$\mathbf{Mn}O_3$	1,21	1,2 — 1,5	
K_2O	10,82	9,98 — 10,29	10,78
Na_2O	1,19	0,96 — 1,23	
Li_2O	4,03	3,62 — 3,87	
	103,18		

Hierbei ist Mn:Al = 1:34, K, Na:Li = 1:1, und Na:K = 1:6 angenommen. Die Zahl 11 der Formel ist vielleicht richtiger als die früher von mir angenommene 12.

1) Rammelsberg, Wied. Ann. 7. p. 136. 1879.

Paris, Maine.

$$\left\{\begin{array}{l} 18(\overset{I}{R}_{10}\,\overline{R}_5\,Si_{16}\,O_{52}) \\ \quad(\overset{I}{R}_{10}\,\overline{R}_5\,Si_{16}\,Fl_{104}) \end{array}\right\}$$

	Berechnet.	Gefunden.	Berwerth.
Fl	5,66	5,60 (Max.)	5,15
SiO_2	52,32	52,61	
$\overline{Al}O_3$	27,96	28,30 — 28,43	28,19
K_2O	11,52	10,71 — 10,89	11,95 — 12,73
Na_2O	0,84	0,71 — 0,79	
Li_2O	4,09	3,98 — 4,09	
	102,39		

Auch hier ist K, Na : Li = 1 : 1, und Na : K = 1 : 9.

Juschakowa.

$$\left\{\begin{array}{l} 11(\overset{I}{R}_{14}\,\overline{R}_6\,Si_{20}\,O_{65}) \\ \quad(\overset{I}{R}_{14}\,\overline{R}_6\,Si_{20}\,Fl_{130}) \end{array}\right\}$$

	Berechnet.	Gefunden.
Fl	8,68	8,58 — 8,71
SiO_2	50,68	50,26 — 50,96
$\overline{Al}O_3$	22,27	21,43 — 22,20
$\overline{Mn}O_3$	5,72	5,36 — 5,38
K_2O	10,67	11,08 — 11,39
Na_2O	0,29	0,32 — 0,54
Li_2O	5,31	4,88 — 5,65
	103,62	

Die Formel des Rozenaglimmers würde bei diesem ($\overline{Mn}$: $\overline{Al}$ = 1 : 6; K, Na : Li = 1 : 1) etwas mehr Thonerde und Mangan und weniger Lithion (nicht ganz 4 Proc.) verlangen, daher wir sie verwerfen müssen.

II. Magnesiaglimmer.

Mit diesem Namen seien diejenigen Glimmer bezeichnet, welche das Maximum an Magnesia (nahe 30 Proc.), und kein oder wenig Eisen enthalten. Es sind Glimmer von heller Färbung. Im Folgenden sind als solche be-

handelt die Glimmer von Rossie, Edwards, Gouverneur, Jefferson County, Pargas, Pennsbury und Ratnapura. Wir werden sehen, dass sie anders zusammengesetzt sind als die Eisenmagnesiaglimmer, insofern sie Verbindungen von Singulo- und Bisilicaten, letztere hingegen Singulosilicate sind.

I. Rossie, S. Lawrence County, N. York. Hellgelbe sechsseitige Prismen von ziemlicher Grösse; zwischen den Blättchen zahlreiche Körner von Kalkspath einschliessend, welche sich durch Essigsäure leicht entfernen lassen. Das feingeriebene Material erscheint von weisser Farbe.

Bei 200° verlor dieser Glimmer 0,22 Proc., beim nachherigen Glühen noch 0,18 Proc.

	a.	b.	I.
Fluor	5,41	—	5,41
Kieselsäure	43,17	—	43,17
Thonerde	12,70	13,43	13,43
Manganoxyd [1]	1,09	1,51	1,51
Magnesia	27,32	27,47	27,47
Kali	8,51	8,73	8,73
Natron	0,39	—	0,39
Lithion	0,53	—	0,53
Wasser	0,40	—	0,40
			101,04

II. Gouverneur, S. Lawrence County, N. York. Hrn. Shepard verdanke ich diesen schönen Glimmer, dessen grosse hellbraune Tafeln ganz durchsichtig und frei von anderen Mineralien sind. Eine vor Jahren ausgeführte Analyse habe ich in letzter Zeit mehrfach wiederholt.

Auch dieser Glimmer ist fast wasserfrei; der Trockenverlust betrug höchstens 0,22 Proc. und stieg beim Glühen auf 0,38 Proc. Andere Proben ergaben noch weniger.

1) Nebst Eisen.

	a.	b.	c.	d.	II.
Fluor	—	5,39	5,62	5,72	5,67
Kieselsäure . .	41,96	42,14	43,38	42,51	43,00
Thonerde . .	13,47	13,10	—	13,23	13,27
Eisenoxyd . .	2,90	1,72	—	1,71	1,71
Magnesia . .	27,46	28,01	—	27,53	27,70
Kali . } . .	9,87	10,32	—	—	10,32
Natron }		0,30	—	—	0,30
Wasser . . .	—	0,38	—	—	0,38
					102,35

III. Jefferson County, N. York. Ein dem vorigen höchst ähnlicher Glimmer, dessen eigentlicher Fundort nicht sicher bekannt ist. Er wurde im Jahre 1843 von Meitzendorf in H. Rose's Laboratorium untersucht[1]) und gab:

Fluor	3,30
Kieselsäure . . .	41,49
Thonerde	15,22
Eisenoxyd . . .	1,72
Magnesia	29,43
Kali	9,70
Natron	0,65
Glühverlust . . .	0,28
	101,79

Beim Fluor ist vielleicht ein kleiner Verlust anzunehmen.

IV. Edwards, S. Lawrence County, N. York. Ein weisser und ein brauner Glimmer von diesem Fundorte, früher schon von Craw untersucht.[2]) Neulich analysirte Berwerth den braunen und fand bei Wiederholung der Analyse einen Gehalt an Baryt[3]), welcher in den übrigen Glimmern dieser Gruppe (wenigstens in den von mir untersuchten) nicht vorkommt.

1) Meitzendorf, Pogg. Ann. **58.** p. 157. 1843.
2) Craw, Americ. J. Sc. (2) **10.** p. 396.
3) Berwerth, Jahrb. f. Min. 1877. p. 830. — Wien. Ak. Ber. **78.**

	Weiss	Braun	Braun	
	Craw		Berwerth	
	1.	2.	3.	4.
Fluor	—	4,20	0,82	0,82
Kieselsäure	40,36	40,14	40,34	40,64
Thonerde	16,08	17,36	15,14	14,11
Eisenoxyd	—	—	2,20	2,28
Eisenoxydul	—	—	—	0,69
Magnesia	30,25	28,10	27,97	27,97
Baryt	—	—	—	2,54
Kali	6,07	10,56	7,07	8,16
Natron	4,39	0,63	2,58	1,16
Wasser	2,65	—	3,21	3,21
	99,80	100,99	99,33	101,58

Angeblich erhielt Craw bei Wiederholung von Nr. 1 7,23 Kali, 4,94 Natron und 0,95 Glühverlust.

V. Pargas, Finland. Bräunlichgelbe Krystalle, mit Pargasit in körnigem Kalke eingewachsen, deren Mittheilung aus der Universitätssammlung ich Hrn. Websky verdanke.

Unstreitig der nämliche Glimmer ist vor einiger Zeit von Ludwig untersucht worden.[1])

Bei 200° verlor eine Probe 0,32 Proc.; beim Glühen ausserdem noch 1,13 Proc. Mit Bleioxyd geschmolzen lieferte eine andere 1,24 Proc. Wasser.

Nach Zerlegung durch Schwefelsäure im zugeschmolzenen Rohre fanden sich 0,49 Proc. Eisenoxydul.

	a.	b.	V.	
			Rg.	Ludwig
Fluor	4,59	—	4,59	4,21
Kieselsäure	42,55	—	42,55	43,43
Thonerde	12,74	12,63	12,74	13,76
Eisenoxyd	1,85	1,73	1,31	0,16
Eisenoxydul	—	—	0,49	1,35
Magnesia	27,46	27,62	27,62	27,20
Kali	—	8,92	8,92	8,06
Natron	—	0,83	0,83	1,30
Wasser, gebunden	1.18	—	1,18	0,92
„ hygroskopisch	0,32	—	0,32	—
			100,61	100,39

1) Ludwig, Wien. Ak. Ber. 78.

VI. Pennsbury, Pennsylvanien. Ein wahrscheinlich von dieser Localität (Pennsville bezeichnet) stammender, röthlichbrauner Glimmer ist neuerdings von Neminar analysirt worden.[1])

Fluor	1,94	Magnesia	27,86
Kieselsäure	44,29	Kali	7,06
Thonerde	12,12	Natron	2,16
Eisenoxyd	1,40	Wasser	2,09
Eisenoxydul	1,44		100,36

VII. Ratnapura, Ceylon. Grosse, gelbliche Tafeln, anscheinend etwas verwittert, von Poppovits untersucht.[2])

Fluor	1,19	Eisenoxydul	1,52
Kieselsäure	42,26	Magnesia	27,23
Thonerde	15,64	Kali	8,68
Eisenoxyd	0,23	Wasser	2,91
			100,66

Offenbar sind alle diese Glimmer von gleicher oder nahe gleicher Zusammensetzung. Um diese aber zu ermitteln, wollen wir die Zahlen der Analysen auf 100 Th. Kieselsäure berechnen, indem wir Fe in Al, Fe in Mg, Na in K verwandeln.

	I.	II.	III.	IV. 2.	IV. 4.	V. Rg.	V. Ludw.	VI.	VII.
AlO_3	31,1	33,4	39,3	43,2	38,3	31,9	31,9	29,4	37,3
MgO	65,6	64,4	70,9	70,0	71,4	65,6	64,4	64,7	66,4
K_2O	23,2	25,0	25,7	28,6	24,4	24,0	23,1	23,4	20,5
H_2O	0,9	0,9	0,7	0	7,9	2,8	2,1	4,7	6,9

Ferner wollen wir das Molecularverhältniss berechnen.

	SiO_2	: AlO_3	: MgO	: K_2O	: H_2O
I.	5,5	: 1	: 5,5	: 0,83	: 0,01
II.	5,1	: 1	: 5,0	: 0,82	: 0,01
III.	4,4	: 1	: 4,7	: 0,71	: 0,01
IV. 2.	4,0	: 1	: 4,17	: 0,71	—
IV. 4.	4,5	: 1	: 4,8	: 0.7	: 1,2
V. Rg.	5,3	: 1	: 5,3	: 0,84	: 0,5
V. Ludw.	5,3	: 1	: 5,2	: 0,8	: 0,4
VI.	5,8	: 1	: 5,6	: 0,87	: 0,9
VII.	4,6	: 1	: 4,6	: 0.6	: 1,0

1) Neminar, Wien. Ak. Ber. 78. 2) a. a. O.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass in allen eine gewisse Menge Wasserstoff enthalten ist. Indessen ist dieselbe jedenfalls nicht gross, und die Schwierigkeit, eine allen gemeinsame Formel zu finden, liegt darin, dass das gefundene Wasser 0,4 — 0,38 — 0,28 — 0,9 — 1,2, aber auch 2,6 — 2,9 — 3,2 Proc. betragen soll.

Zuvörderst ist es leicht, zu beweisen, dass diese Glimmer keine Singulosilicate sind.

Wählt man z. B. die Analysen von Gouverneur (II) und von Pargas (V. Rg.) und reducirt die $\overset{VI}{R}$ und $\overset{II}{R}$ auf $\overset{I}{R}$, so erhält man:

$$\begin{array}{ll} & \overset{I}{R}:Si \\ \text{in II.} = & 3{,}27:1 \\ \text{„ V.} = & 3{,}22:1 \end{array} \Big\} \text{ statt } 4:1.$$

Wären diese beiden Glimmer Singulosilicate, so müssten die Analysen 9,4 resp. 9,9 Proc. Wasser gegeben haben.

Es steht also fest: die reinen Magnesiaglimmer sind Verbindungen von Singulo- und Bisilicaten.

Die zweite Frage ist: Sind alle von gleicher Zusammensetzung? Diese Frage ist meiner Ansicht nach zu bejahen, und die Abweichungen sind auf Rechnung der Analysen und des Materials zu setzen.

Die oben mitgetheilte Uebersicht der Molecularverhältnisse spricht dafür, dass Mg : Al : Si = 5 : 1 : 5 sei. Die Menge des Kaliums ist niemals gleich 2; ich nehme an, dass Kalium und Wasserstoff diesen Betrag ergeben, dass also bei den Magnesiaglimmern:

$$\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : R' : Si = 2 : 5 : 1 : 5$$

sei, die allgemeine Formel also:

(A) $$\overset{I}{R}_2 \overset{II}{R}_5 R Si_5 O_{19},$$

welche dem Silicat:

$$\overset{I}{R}_{18} Si_5 O_{19} = \overset{I}{R}_2 Si O_3 + 4 \overset{I}{R}_4 Si O_4$$

entspricht.

Die Magnesiaglimmer wären also Verbindungen von 1 Mol. Bisilicat und 4 Mol. Singulosilicat, und ihr specieller Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{I}{R}_2\,Si\,O_3 \\ 5\,\overset{II}{R}\,Si\,O_3 \\ \bar{R}\,Si_3\,O_9 \end{array}\right\} + 4\left\{\begin{array}{l} \overset{I}{R}_4\,Si\,O_4 \\ 5\,\overset{II}{R}_2\,Si\,O_4 \\ \bar{R}_2\,Si_3\,O_{12} \end{array}\right\}$$

Es ist jedoch äusserst schwer zu sagen, ob nicht diese Glimmer nur drei Mol. Singulosilicat enthalten, gleich der Mehrzahl der Kaliglimmer der zweiten Abtheilung, d. h. dass sie auf:

$$\overset{I}{R}_{14}\,Si_4\,O_{15} = \overset{I}{R}_2\,Si\,O_3 + 3\,\overset{I}{R}_4\,Si\,O_4$$

zurückgeführt werden müssten. Dann wäre $\overset{I}{R}:Si = 3{,}5:1$, während dies Verhältniss nach dem vorigen $= 3{,}6:1$ ist. Zwischen beiden entscheidet keine Analyse. Die Annahme von 3 Mol. bedingt keine neue Verbindungsweise neben den bereits erkannten und liefert die Formel:

(B) $$\overset{I}{R}_{14}\,\overset{II}{R}_{35}\,\bar{R}_7\,Si_{36}\,O_{135}.$$

Dieser zweiten Formel glauben wir den Vorzug geben zu müssen, nicht blos aus dem angeführten Grunde, sondern auch deswegen, weil die Analysen, welche wir für die am meisten entscheidenden halten, besser ihr als der Formel A entsprechen. Es berechnen sich nämlich:

	nach A	nach B
Kieselsäure	100	100
Thonerde	34,2	33,2
Magnesia	66,6	64,8

während gefunden ist:

	I.	II.	V. (Rg.)	V. (Ludw.)
Thonerde	31,1	33,4	31,9	31,9
Magnesia	65,6	64,4	65,6	64,4

Die Verschiedenheit liegt nur in dem Verhältnisse $\bar{Fe}:\bar{Al}$, Fe:Mg, Na:K, R:H und dem des Oxysilicats zum Fluosilicat, wie das Nachfolgende darthut.

I. Rossie.

	Gefunden.	Angenommen.
$\bar{R}$: Fl	= 1 : 2	1 : 2
$\bar{Fe}$: $\bar{Al}$	= 1 : 13	1 : 13
Na : Li : K	= —	1 : 3 : 16
H : $\overset{I}{R}$	= ...	1 : 4

	Berechnet.		Gefunden.
	A.	B	
Fluor	5,44	5,46	5,41
Kieselsäure . . .	42,95	43,64	43,17
Thonerde	13,64	13,48	13,43
Eisenoxyd . . .	1,61	1,61	1,51
Magnesia	28,63	28,29	27,47
Kali	8,61	8,50	8,73
Natron	0,36	0,22	0,39
Lithion	0,52	0,50	0,53
Wasser	0,52	0,50	0,40
	102,28	102,20	101,04

18 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat.

II. Gouverneur.

	Gefunden.	Angenommen.
R : Fl =	1 : 2	1 : 2
Fe : Al =	1 : 12	1 : 12
Na : K =	1 : 22	1 : 20
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 4

	Berechnet.		Gefunden.
	A.	B.	
Fluor	5,37	5,46	5,67
Kieselsäure . . .	42,50	43,16	43,00
Thonerde	13,41	13,25	13,27
Eisenoxyd . . .	1,74	1,72	1,71
Magnesia	28,33	28,00	27,70
Kali	10,01	10,00	10,32
Natron	0,32	0,30	0,30
Wasser	0,51	0,50	0,38
	102,19	102,39	102,35

Die Formel ist die des vorigen. In einer frühern Mittheilung, als ich die Glimmer dieser Abtheilung noch nicht näher untersucht hatte, war das Atomverhältniss $\overset{I}{R}$: Mg : R : Si = 1,5 : 5 : 1 : 5 angenommen worden, d. h.

eine Verbindung von 1 Mol. Bisilicat und 3 Mol. Singulosilicat.

III. Jefferson County. Meitzendorf's Analyse liegt der Berechnung zu Grunde.

	Gefunden.	Angenommen.
R : Fl	= 1 : 1	1 : 2
Fe : Al	= 1 : 13	1 : 13
Na : K	= 1 : 10	1 : 10
H : R	=	1 : 3

	Berechnet. A.	Berechnet. B.	Gefunden.
Fluor	4,75	5,35	3,30
Kieselsäure	43,45	43,46	41,49
Thonerde	13,80	13,42	15,22
Eisenoxyd	1,66	1,61	1,72
Magnesia	28,96	28,17	29,43
Kali	9,28	9,00	9,70
Natron	0,61	0,62	0,65
Wasser	0,65	0,63	0,28
	103,16	102,26	101,79

Die Abweichungen sind nicht der Art, dass sie die Formel in Frage stellen könnten, und dürften der Analyse zur Last fallen.

$$\left\{ \begin{array}{l} 18\,(\overset{I}{R}_2\,Mg_5\,R\,Si_5\,O_{19}) \\ \quad (\overset{I}{R}_2\,Mg_5\,R\,Si_5\,Fl_{38}) \end{array} \right\}$$

IV. Edwards. Die Analysen von Craw sind sicherlich nicht richtig; wir berücksichtigen hier also nur Berwerth's letzte Analyse (No. 4).

	Gefunden.	Angenommen.
R : Fl	= 3,5 : 1	3,5... : 1
Fe : Al	= 1 : 10	1 : 10
Fe : Ba : Mg	= 1 : 1,7 : 70	1 : 2 : 81
Na : K	= 1 : 4,7	1 : 5
H : R		1 : 3

	Berechnet.		Gefunden.
	A.	B.	
Fluor	0,76	0,77	0,82
Kieselsäure . . .	43,04	43,71	40,64
Thonerde	13,38	13,21	14,11
Eisenoxyd . . .	2,09	2,06	2,28
Eisenoxydul . . .	0,61	0,71	0,69
Magnesia	27,66	27,25	27,97
Baryt	2,61	2,60	2,54
Kali	8,43	8,32	8,16
Natron	1,11	1,10	1,16
Wasser	0,65	0,64	3,21
	100,34	100,37	101,58

Da 0,82 Fl = 0,34 O, so hat die Analyse 1,24 Proc. Ueberschuss gegeben, der wohl grösstentheils dem angeblichen hohen Wassergehalt zuzuschreiben ist. Wäre derselbe wirklich vorhanden, so würde dieser Glimmer, ganz abweichend von den übrigen, aus Singulosilicaten bestehen und, wenn man das gefundene Verhältniss $\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : \bar{R} : Si = 2,06 : 4,8 : 1 : 4,4$ in das von $2 : 5 : 1 : 4,5$ verwandelt, zu der Formel:

$$\overset{I}{R}_4 \overset{II}{R}_{10} \bar{R}_2 Si_9 O_{36}$$

führen, in welcher K (Na) : H = 1 : 2,34 wäre.

Da die Analyse schon des Ueberschusses wegen für eine genaue Rechnung nicht geeignet ist, so nehmen wir für den Glimmer von Edwards einstweilen die Zusammensetzung der übrigen an. Dann würden etwa 135 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat vorhanden sein.

V. Pargas. Meiner Analyse zufolge ist:

	Gefunden.	Angenommen.
$\bar{R}$: Fl =	1 : 1,8	1 : 1,8
$\bar{Fe}$: $\bar{Al}$ =	1 : 15,5	1 : 15
Na : K =	1 : 6,3	1 : 7
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 4

	Berechnet. A.	Berechnet. B.	Gefunden. (Rammelsberg)
Fluor	4,86	4,82	4,59
Kieselsäure . . .	42,62	43,52	42,55
Thonerde	13,67	13,56	12,74
Eisenoxyd . . .	1,42	1,41	1,31
Magnesia	28,42	28,20	27,89
Kali	9,34	9,28	8,92
Natron	0,88	0,88	0,83
Wasser	0,51	0,51	1,18
	101,72	102,18	100,01

20 Mol. Oxysilicat : 1 Fluosilicat.

Also nahe gleich Rossie.

VI. Pennsbury. Analyse von Neminar:

	Gefunden.	Angenommen.
Ɍ : Fl =	1 : 0,8	1 : 0,8
F̶e : A̶l =	1 : 13	1 : 13
Fe : Mg =	1 : 38,7	1 : 39
Na : K =	1 : 2	1 : 2
H : $\overset{\mid}{R}$ =		1 : 3

	Berechnet. A.	Berechnet. B.	Gefunden.
Fluor	2,21	2,20	1,94
Kieselsäure . . .	43,69	44,39	44,29
Thonerde	13,88	13,70	12,12
Eisenoxyd . . .	1,65	1,64	1,40
Eisenoxydul . . .	1,29	1,29	1,44
Magnesia	28,41	28,05	27,86
Kali	6,85	6,76	7,06
Natron	2,26	2,23	2,16
Wasser	0,66	0,65	2,09
	100,90	100,91	100,36

In der Formel würden 46—47 Mol. Oxysilicat stehen.

VII. Ratnapura. Nach der Analyse von Poppovits.

	Gefunden.	Angenommen.
Ɍ : Fl =	1 : 0,75	1 : 0,75
Fe : Mg =	1 : 32,4	1 : 32
H : K =		1 : 1,5

	Berechnet.		Gefunden.
	A.	B.	
Fluor	2,10	2,10	2,19
Kieselsäure . . .	44,18	44,83	42,26
Thonerde	15,11	14,91	15,79
Eisenoxydul . . .	1,59	1,58	1,52
Magnesia	28,57	28,20	27,23
Kali	8,30	8,20	8,68
Wasser	1,06	1,05	2,91
	100,91	100,87	100,58

50 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat.

III. Eisenmagnesiaglimmer, Magnesiaeisenglimmer und Eisenglimmer.

Ein Blick auf die Zusammensetzung der Glieder dieser Abtheilung lehrt sofort, dass in dem Maasse, als der Gehalt an Magnesia abnimmt, der an Eisenoxydul steigt, bis zuletzt fast reine Eisenglimmer erscheinen. Allein hierbei darf nicht übersehen werden, dass beide Bestandtheile nicht in directer Abhängigkeit stehen, d. h. dass es Glimmer gibt, welche z. B. bei nahe gleichem procentischen Gehalte an Eisenoxydul sehr verschiedene Mengen Magnesia enthalten, wie z. B.:

	Fe O	Mg O
Tschebarkul . . .	14,75	16,34
Radauthal . . .	13,72	11,16

Oder auch umgekehrt sieht man bei fast gleichen Magnesiamengen sehr verschiedene Mengen von Eisenoxydul auftreten:

		Mg O	Fe O
	Tschebarkul . . .	16,34	14,75
	Miask Kobell . .	16,15	9,36
	Lierwiese	15,41	4,53
Oder:	Bescheert Glück .	9,05	15,66
	Freiberg (No. 2) .	9,65	6,95

Dieser Umstand beweist, dass das stöchiometrische Verhältniss der Elemente dieser Glimmer ein verschiedenes sein muss.

Berechnet man den (bis nahe 30 Proc. steigenden) Gehalt an metallischem Eisen dieser Glimmer, so lässt sich auch zwischen ihm und dem Magnesium keine Beziehung nachweisen. So enthält z. B.:

	Fe	Mg
Tschebarkul . . .	15,28	9,80
Freiberg (No. 2) .	16,81	5,79
Renchthal . . .	15,36	0,21
S. Dennis	17,06	0,17

Auch bei diesen Glimmern bietet das chemisch gebundene Wasser oder vielmehr ihr Wasserstoff für die Berechnung eine gewisse Schwierigkeit. Fast alle Analysen weisen jenes nach, und bei den neueren darf man glauben, dass auf seine Bestimmung grössere Sorgfalt verwendet worden ist. Allein auch bei diesen Glimmern dürfte anzunehmen sein, dass die directe Bestimmung des Wassers leicht zu hohe Zahlen gegeben hat. Ich habe hier, wo der Fluorgehalt gering ist, die möglichst fein zertheilte Substanz zuvörderst bei 250° getrocknet und dann geglüht. Dem Gewichtsverlust musste aber der bei der Bildung von Eisenoxyd aufgenommene Sauerstoff hinzugerechnet werden, der sich durch Eisenoxydulbestimmungen in dem Glimmer vor und nach dem Glühen leicht berechnen lässt.

Die erste Frage ist: Stehen alle diese Glimmer auf gleicher Sättigungsstufe? Sie ist unbedingt zu bejahen. Es sind sämmtlich Singulosilicate.

Allerdings scheinen einzelne Analysen dieser Annahme zu widerstreiten, und stossen wir da zunächst auf die Glimmer vom Schapbachthal und vom Renchthal, welche nach den Analysen von Killing und Nessler schon ohne Hinzurechnung des Wassers basischer als Singulosilicate zu sein scheinen. Wir werden aber sehen, dass in der That dies nicht der Fall ist. Wenn eine gewisse Zahl etwas mehr Wasser ergeben hat, als die Formel verlangt, so ist dies bei Glimmern eine oft wiederkehrende

Erscheinung, welche in dem früher Gesagten ihre Erklärung findet.

Jeder Glimmer dieser Abtheilung erscheint als eine Mischung:

$$p\overset{I}{R}_4 Si O_4 + q\overset{II}{R}_2 Si O_4 + r\overset{VI}{R}_2 Si_3 O_{12}.$$

Wir versuchen sie nach den Werthen von p, q und r zu gruppiren, bemerken aber, dass nicht selten eine gewisse Unsicherheit über deren relative Grösse bleibt. Dies kann unter Umständen seinen Grund in einer wechselnden Mischung einzelner Krystalle der nämlichen Localität haben, wie denn bekanntlich an einem Fundort überhaupt verschiedene Glimmer beobachtet sind (Pargas etc.).

I. Abtheilung.

$$\overset{I}{R}_2\overset{II}{R}_4\overset{VI}{R} Si_4 O_{16} = \left\{\begin{array}{l} \overset{I}{R}_4 Si\ O_4 \\ 4\overset{II}{R}_2 Si\ O_4 \\ \overset{VI}{R}_2 Si_3 O_{12} \end{array}\right\}$$

Vesuv, Morawitza, Tschebarkul, Baikalsee, Monzoni, Mainland, Arendal, Greenwood-furnace.

1. Vesuv. Im Jahre 1842 analysirte C. Bromeis eine hellgelblichgrüne Abänderung, 1844 Chodnew jene dunkelgrüne, an welcher G. Rose seine bekannten Messungen anstellte, und 1855 machte Kjerulf die Analyse grüner Krystalle bekannt. Allein alle diese Analysen lassen Verluste erkennen und sind daher schon aus diesem Grunde zur Berechnung nicht recht geeignet. Neuerdings wurde eine dunkle Varietät von Berwerth untersucht[1]), welcher 0,9 Proc. Fluor fand, welches die Früheren nicht nachzuweisen vermochten.

Sehr auffallend ist der hohe Wassergehalt, welcher 4 Proc. betragen soll. Denn C. Bromeis erhielt nur 0,75 Proc. Glühverlust, und ich fand denselben bei dem dunklen Glimmer nur = 0,65 Proc.

Da Fe : Al = 1 : 55, so ist bei der Berechnung jenes

1) Berwerth, Wien. Ak. Ber. **78**.

ausser Betracht gelassen, Fe : Mg = 1 : 4,6 (1 : 5 angenommen), Na : K = 1 : 10, Fl : R = 1 : 3,6.

	Berechnet.	Gefunden. a.	Gefunden. b.[1]		Berechnet.	Gefunden. a.	Gefunden. b.
Fl	0,98	0,89	0,91	MgO	22,82	22,49	23,05
SiO_2	41,08	39,30	40,31	K_2O	7,33	7,64	7,99
AlO_2	17,56	17,24	17,70	Na_2O	0,48	0,49	0,50
FeO	8,64	8,08	8,66	H_2O	1,54	4,02	1,51
					100,43	100,15	100,63

Der Rechnung nach ist H : K, Na = 1 : 1, und es sind 114 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat vorhanden.

Das Atomverhältniss $\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : \overset{VI}{R}$: Si ist gefunden
ohne H = 1,1 : 4 : 1 : 3,9
mit H = 3,7
berechnet = 2 : 4 : 1 : 4

2. Morawitza im Banat. Ein olivengrüner Glimmer, aus hellen und dunkeln Blättchen bestehend, deren erstere fast einaxig sind. Er ist von Rumpf analysirt worden.[2])

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al =	1 : 9,6	1 : 9
Fe : Mg =	1 : 11,5	1 : 12
Na : K =	1 : 13,6	1 : 13
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 1

	Berechnet.	Gefunden. a.	Gefunden. b.		Berechnet.	Gefunden. a.	Gefunden. b.
SiO_2	41,88	40,16	40,90	MgO	25,80	26,15	26,62
AlO_3	16,11	15,79	16,07	K_2O	7,61	7,64	7,77
FeO_3	2,79	2,53	2,58	Na_2O	0,38	0,67	0,37
FeO	3,86	4,12	4,19	H_2O	1,57	3,58	1,50
					100	100,34	100

b. nach Abzug von 2,1 Proc. Wasser.

1) Nach Abzug von 2,5 Proc. Wasser.

2) Rumpf, Wien. Ak. Ber. 78.

	$\overset{I}{R}$	: $\overset{II}{R}$	: $\overset{VI}{R}$	: Si
Gefunden ohne H =	1,0	: 4,2	: 1	: 3,9
mit H =	3,4	—	—	
Angenommen =	2	: 4	: 1	: 4

3. Tschebarkul, Sibirien. Grossblätteriger schwarzer, braun durchsichtiger Glimmer, von Zellner analysirt.[1])

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	1 : 4.1	1 : 4
Fe : Mg	1 : 2	1 : 2
Na : K	1 : 10	1 : 10
H : $\overset{I}{R}$		1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	38,48	38,49	MgO	17,11	16,34
AlO_3	13,17	14,43	K_2O	9,14	8,12
FeO_3	5,13	5,44	Na_2O	0,61	0,53
FeO	15,40	14,75	H_2O	0,96	0,89
				100	99,00

	$\overset{I}{R}$	: $\overset{II}{R}$	: R	: Si
Gefunden ohne H =	1,1	: 3,5	: 1	: 3,7
mit H =	1,66	—		—
=	1,8	: 4	: 1,08	: 4
Angenommen	2	: 4	: 1	: 4

4. Monzoni. Sechsseitige Säulen von dunkelgrüner Farbe, von Augit und Kalkspath begleitet. Dünne Blättchen erscheinen gelbgrün.

Durch Glühen wird er silberweiss, stark glänzend und verliert 0,93 Proc. Da sich gleichzeitig 1 Proc. FeO oxydirt hatte, beträgt der Wasserverlust 1,14 Proc.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe: Al	= 1 : 12,4	1 : 12
Fe (Mn) : Mg	= 1 : 18,7	1 : 18
H : $\overset{I}{R}$	= 1 : 1,5	1 : 1,5

1) Tschermak. Min. Mitth. 1873.

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	—	0,53	MnO (CaO)	—	0,86
SiO_2	41,59	41,70	MgO	26,34	24,70
AlO_3	16,41	16,86	K_2O	9,78	8,93
FeO_3	2,13	2,23	Na_2O	—	0,28
FeO	2,50	1,88	H_2O	1,25	1,14
				100	99,11

	$(H, \overset{I}{R})$: $\overset{II}{R}$: $\overset{VI}{R}$: Si
Gefunden	1,9 : 3,7 : 1 : 4,0
Angenommen	2 : 4 : 1 : 4

5. Baikalsee. Dieser grossblätterige braune Glimmer wurde 1822 von H. Rose untersucht, allein die Methoden der Analyse waren nicht einwurfsfrei, und so erklärt sich der 3 Proc. betragende Verlust. Eine neuere Analyse von John hat die älteren Zahlen berichtigt.[1])

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	= 1 : 33,6	—
Fe : Mg	= 1 : 8,8	1 : 9
Na : K	= 1 : 4	1 : 4
H : $\overset{I}{R}$	=	1 : 2
Fl : R	= 1 : 2,1	1 : 2,1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	1,55	1,57	MgO	24,62	23,91
SiO_2	40,98	40,00	K_2O	8,66	8,57
AlO_3	17,54	17,75	Na_2O	1,42	1,47
FeO	4,92	4,88	H_2O	1,03	1,37
				100,72	99,52

	$\overset{I}{R}$: $\overset{II}{R}$: $\overset{VI}{R}$: Si
Gefunden ohne H	= 1,3 : 3,85 : 1 : 3,85
mit H	= 2,2 — —
	= 2,3 : 4 : 1,04 : 4
Angenommen	2 : 4 : 1 : 4

64 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat.

1) John, Wien. Ak. Ber. 78.

6. Greenwood furnace, Orange County, N. York. Ein grüner Glimmer, früher von Hauer, zuletzt von Hamm analysirt[1]), wonach:

	Gefunden.	Angenommen.
Fl : Al	= 1 : 12,3	1 : 12
Fe : Mg	= 1 : 6,4	1 : 6
Na : K	= 1 : 3,8	1 : 4
H : $\overset{I}{R}$	= —	1 : 3

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	40,30	40,81	MgO	23,03	21,08
AlO_3	15,90	16,47	K_2O	9,47	9,01
FeO_3	2,07	2,16	Na_2O	1,56	1,55
FeO	6,91	5,92	H_2O	0,76	2,19
				100	99,19

	R	: $\overset{II}{R}$	: $\overset{VI}{R}$	: Si
Gefunden ohne H	= 1,4	: 3,5	: 1	: 3,93
mit H	= 2,8	—		—
	= 2,8	: 3,6	: 1,02	: 4
Angenommen	2	: 4	: 1	: 4

Vielleicht hat ein kleiner Verlust an Magnesia stattgefunden.

7. Arendal. Grosse, schwarze Tafeln mit grüner Farbe, durchsichtig.

Dieser Glimmer verliert beim Glühen nur 0,3 Proc. und wird bräunlich; die Eisenprobe erwies, dass 0,64 Proc. Sauerstoff aufgenommen waren, sodass der Glühverlust 0,94 Proc. beträgt.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	= 1 : 5	1 : 5
(Mn)Fe : Mg	= 1 : 4,1	1 : 4
Na : K	= 1 : 28	—
H : $\overset{I}{R}$	=	1 : 2
Fl : R	= 1 : 2,2	1 : 2

1) a. a. O.

	Berechnet.	Gefunden.	
Fl	1,55	1,49	
SiO_2	39,19	38,89	
AlO_3	13,96	14,53	
FeO_3	4,35	4,58	
FeO	9,40	7,85	= 8,92 FeO
MnO	—	1,06	
MgO	20,94	20,28	
K_2O	10,23	10,08	= 10,68 K_2O
Na_2O	—	0,40	
H_2O	0,98	0,94	
	100,56	100,10	

	H, $\overset{I}{R}$:	$\overset{II}{R}$:	$\overset{VI}{R}$:	Si
Gefunden	2,2 :	3,9 :	1 :	4,0
Angenommen	2 :	4 :	1 :	4

63 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat.

8. Mainland, Shetlandinseln. Ein neuerdings von Heddle untersuchter brauner Glimmer.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	= 1 : 8,6	1 : 9
Fe : Mg	= 1 : 3	1 : 3
Na : K	= 1 : 2,6	1 : 3
H : K,Na =		1 : 4

	Berechnet.	Gefunden.
Fl	—	0,56
SiO_2	39,17	39,80
AlO_3	15,07	14,18
FeO_3	2,61	2,59
FeO	11,75	12,02
MgO	19,58	18,41
K_2O	9,20	8,43
Na_2O	2,02	2,11
H_2O	0,60	2,52
	100	100,62

	H, $\overset{I}{R}$:	$\overset{II}{R}$:	R :	Si
Gefunden	3,4 :	4 :	1 :	4,3
Angenommen	2 :	4 :	1 :	4

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

IX. *Ueber ein neues Condensations- oder Absorptionshygrometer; von A. Matern.*

In jüngster Zeit ist von Edelmann ein Absorptionshygrometer construirt worden, zu welchem A. van Hasselt[1]) einige Verbesserungen vorgeschlagen hat. Wenn auch nach Angabe der genannten Physiker mit diesen Apparaten günstige Resultate sich ergeben haben, so scheinen mir uncontrolirbare Fehler doch nicht ganz ausgeschlossen zu sein.

Fürs erste gilt dieses Bedenken dem Vorhandensein einer zu grossen Zahl von Stellen, an denen Luftzutritt möglich ist und verhindert werden soll.

Ferner sind Temperaturänderungen der im Apparate eingeschlossenen Luft wegen der durch die Absorption entstehenden Wärme unvermeidlich, können an einem in unbewegter Luft befindlichen Thermometer nur langsam und unsicher ermittelt werden und bewirken an dem gegen die äussere Luft sich öffnenden Manometer beträchtliche Druckänderungen; ein Temperaturunterschied von $\frac{1}{10}$ Grad verursacht eine Druckdifferenz von 0,27 mm, also eine im Verhältniss zu dem gesuchten Dunstdruck oft recht erhebliche Grösse.

Zur Absorption benutzt Edelmann Schwefelsäure, van Hasselt wasserfreie Phosphorsäure, die in einer dünnwandigen geschlossenen Glaskugel in das Gefäss gebracht wird und, nachdem man die Kugel durch Schütteln des Apparates zerbrochen hat, den Wasserdampf absorbirt. Mag auch die Benutzung der Schwefelsäure manche Unbequemlichkeiten mit sich führen, die angegebene Art und Weise, wie die Phosphorsäure hier verwandt wird, scheint mir den Gebrauch ganz besonders zu erschweren.

Wegen der engen Oeffnungen des Apparates macht endlich die Reinigung Schwierigkeiten; die Absorptions-

1) v. Hasselt, Beibl. 3. p. 697. 1879.

mittel müssen mit Wasser ausgespült und das zurückbleibende Wasser mit Alkohol entfernt werden. Die Beseitigung der Alkoholdämpfe und die Füllung mit der auf ihren Feuchtigkeitsgehalt zu untersuchenden Luft ist dann noch durch Saugen auszuführen.

Um diese Uebelstände zu vermeiden, suchte ich einen Apparat zu construiren, bei welchem der luftdichte Verschluss nur durch Berührung ebengeschliffener, eingetalgter Flächen bewirkt wird, welcher gegen den Einfluss der äussern Luft ganz abgesperrt ist, keine Anwendung von Absorptionsmitteln erfordert und nach dem Gebrauche leicht gereinigt werden kann.

Von zwei ungefähr 5 cm weiten und 12 cm hohen cylindrischen Glasgefässen mit flachabgebogenen, etwas verdickten Rändern von etwa 1 cm Breite wird die Randfläche eben abgeschliffen. Für jedes Gefäss ist ein mässig gewölbter, mit flachem und in ebensolcher Breite plangeschliffenem Rande versehener Glasdeckel bestimmt, in welchen etwas seitlich das eine 2 cm lange Ende eines rechtwinklig gebogenen Glasrohres von $2^1/_2$ bis 3 mm Weite vertical eingeschmolzen ist. Die 3 cm langen horizontalen Theile beider Röhren sind durch gutes Patentgummirohr mit den rechtwinklig abgebogenen Enden eines ebenso weiten Manometerrohres, das zur Hälfte mit Rüböl gefüllt ist, möglichst nahe zu verbinden.

Werden die Gefässe, nachdem ihre ebenen Randflächen mit Talg oder mit einer fester bindenden Mischung von Talg, Wachs und Oel bestrichen und etwas Wasser in das eine gebracht worden, schnell geschlossen, so lässt sich der Druck des bis zur Sättigung neu entstehenden Wasserdampfes aus dem Manometerstand durch Rechnung ermitteln.

Durch das Andrücken der Deckel kann leicht eine in beiden Gefässen verschiedene Compression der Luft, also schon hierdurch eine Druckdifferenz beider Luftfüllungen verursacht werden. Ausserdem tritt in der Zeit zwischen dem Eingiessen des Wassers, dem Aufsetzen und Andrücken

der Deckel eine Erhöhung des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft im Apparate ein.

Zur Verhütung solcher Fehler ist nahe der Mitte jedes Deckels noch ein etwa 3 cm langes und 8 mm weites Rohrstück eingeschmolzen, dessen auf 4 mm verengtes Ende in einen flachen Rand ausläuft. Dieser Rand ist in einer Breite von wenigstens 4 mm abgeschliffen und mit einem getalgten Glasplättchen zu verschliessen. Um Luftblasen zu verhüten, wird nur die eine der beiden einander berührenden Flächen eingetalgt. Nach dem Auflegen müssen sie gleichmässig durchscheinend geworden sein.

Es kommt darauf an, dass die Verdunstung erst dann, wenn der Apparat geschlossen ist, dann aber auch möglichst rasch von statten geht. Ich stelle deshalb in das Gefäss eine aus zwei Lagen Filtrirpapier auf ein Korkscheibchen gewickelte und festgebundene, vielfach mit Oeffnungen versehene Rolle, welche halb so weit wie das Gefäss ist, und vom Boden bis nahe an den Deckel reicht.

Um Wasser in das Condensationsgefäss zu bringen, ohne dass der Feuchtigkeitsgehalt der Luft im Innern sich ändert, wird eine Kugelpipette benutzt, die 4 bis 5 g Wasser, etwas mehr als zur Sättigung der Papierrolle nöthig ist, in sich aufnehmen kann. Der 2 cm lange und 4 mm dicke Hals ist fest durch einen durchbohrten Korkpfropfen gesteckt; das etwa 3 cm lange Ausflussrohr verengt sich so, dass das Wasser nur heraustropfen kann. Nachdem die Pipette gefüllt, wird sie oben mit etwas Wachs geschlossen, sodass der Luftdruck auf die untere Oeffnung das Wasser zurückhält. So wird die Pipette mittelst des Korkes fest, aber undicht in das Deckelrohr unterhalb eingeklemmt.

Der Apparat wird nun in folgender Weise gebraucht. Nachdem die Gefässe am Rande gleichmässig dünn eingetalgt worden sind und, wie auch die übrigen Theile des Apparates, hinreichend lange im Beobachtungsraume gestanden haben, um seine Temperatur anzunehmen, wird eine Fliesspapierrolle, deren man mehrere zum Wechseln vorräthig

hält, in das Condensationsgefäss gestellt, das Deckelpaar mit dem Manometer aufgelegt, wobei die Pipette sich in die Papierrolle senkt, und blos durch Gegenpressung der abstehenden Ränder festgesetzt. Befürchtet man, dabei den Apparat durch Berührung der Gefässwand in störender Weise erwärmt zu haben, was möglichst zu vermeiden ist, so lässt man ihn jetzt noch mehrere Minuten stehen. Darauf wird das Deckelrohr des leeren Gefässes mit einem festaufgedrückten Glasplättchen geschlossen, die Wachsdecke der Pipette mit einer Nadel durchstochen und dann die Rohrmündung mit dem andern Glasplättchen sofort fest bedeckt.

Das Wasser tropft nun langsam auf die Korkscheibe der Papierrolle, welche letztere in 2 bis 3 Minuten völlig durchtränkt ist. Da das Wasser auf sehr grosser Fläche (von 100 bis 120 qcm) nach aussen und innen verdunstet, ist die Luft fast augenblicklich nach der Benetzung des Papiers mit Dampf gesättigt. Dies folgt daraus, dass bei der geringsten Abkühlung die Gefässwand sich innen mit Wasser beschlägt, und die bis dahin schnell steigende Manometerflüssigkeit fast plötzlich stehen bleibt. Lässt man dem Apparat dann noch einige Zeit, so zeigt sich unter Umständen eine geringe und deshalb meistens schwer zu constatirende Nachwirkung im Steigen, wenn das eingefüllte Wasser die herrschende Temperatur hatte. Diese Nachwirkung rührt daher, dass die zur Verdunstung nöthige Wärme dem feuchten Papier entzogen und dadurch eine geringe Druckverminderung verursacht wird, die sich erst dann ausgleicht, wenn die Temperatur im Innern wieder derjenigen der Umgebung gleich geworden ist. Die Nachwirkung muss übrigens bei Absorptionshygrometern in entgegengesetzter Weise und in viel höherem Grade bemerklich sein, weil meistens mehr Wasserdampf zu absorbiren ist, als zur Sättigung fehlt, und ausserdem die Contraction der Mischung von Schwefelsäure und Wasser eine noch weit beträchtlichere Wärmeentwickelung veranlasst. Auch ist es rathsam, Wasser von der Lufttemperatur zu

benutzen und den Apparat erst einige Zeit nach Befestigung der Pipette zu schliessen, um auf den Temperaturausgleich nicht zu lange warten zu müssen.

Dass die in den Poren des Fliesspapiers befindliche Luft durch Wirkung von Molecularkräften nur in durchaus unerheblichem Grade verdichtet sein kann, also auch nach ihrer Vertreibung durch das eindringende Wasser keinen Fehler im Manometerstande bewirkt, lässt sich daraus folgern, dass nach Einfüllung von Oel statt Wasser bei sorgfältig angestellten Versuchen sich keine Druckänderung am Manometer zeigte. Eine Absorption von Luft durch Wasser würde selbst dann kaum wahrnehmbar sein, wenn dasselbe ausgekocht wäre.

Die beim Schluss des Hygrometers vorzunehmenden Handgriffe haben keinen merklichen Einfluss auf den Manometerstand, wenn man dabei nur einigermassen geschickt verfährt. Selbstverständlich functionirt der Apparat an einem Orte, wo Luftströmungen von verschiedener Temperatur auf beide Gefässe wirken, nicht zuverlässig.

Zum Schutz gegen Temperaturungleichheiten erhält der Apparat in einem mit abnehmbarem Deckel versehenen leichten Holzkasten eine erhöhte Aufstellung. Etwa 8 cm über der Standfläche wird ein Brettchen mit runden Ausschnitten fest angebracht, deren Durchmesser demjenigen der Gefässe, und deren Abstand dem der beiden Deckel gleich ist. Dadurch wird das richtige Aufsetzen der letzteren erleichtert und zugleich den Gefässen ein fester Halt gegeben. Ein dritter Ausschnitt in dem Brettchen gestattet die Durchführung des Manometers und hinter demselben die feste Aufstellung eines Maassstabes, an welchem die Druckdifferenz bequemer abzulesen ist, als an einer auf dem engen Manometerrohr nur schwierig anzubringenden Theilung. Zur Ablesung des Manometers und eines daneben aufgestellten Thermometers wird aus der Vorderwand des Kastens ein Streifen von hinreichender Länge und Breite ausgeschnitten.

Die Enden des Manometerrohres und der mit ihnen

zu verbindenden Knieröhren sind vor der Ausmündung etwas erweitert; die mit mässiger Spannung übergezogenen Gummirohrstücke halten dann fest und dicht genug und brauchen kaum noch seitwärts dieser Auftreibungen umbunden zu werden.

Der Druck ergibt sich aus dem Manometerstande durch folgende Rechnung. Das freie Volumen des Condensationsgefässes (mit Subtraction des Volumens der Pipette und der Korkscheibe) bis zur Manometerflüssigkeit, wenn dieselbe noch keinen Höhenunterschied zeigt, sei V, das Volumen des andern Gefässes sei V' ccm. Im Moment der Absperrung sei der Barometerstand b, der Dunstdruck e cm in Quecksilberhöhe, die Temperatur t. Die Manometerflüssigkeit habe das specifische Gewicht $s\left(= 0{,}925 - \frac{t}{1500}\right.$ für Rüböl), das des Quecksilbers sei $\sigma (= 13{,}6)$. Zur Zeit der Ablesung betrage der Niveauunterschied im Manometer, dessen Querschnitt q qcm sei, h cm; die Temperatur sei T und der entsprechende Druck des gesättigten Wasserdampfes gleich E cm.

Im ersten Gefässe ist dann der Druck:

$$E + (b - e) \cdot \frac{V}{V + \frac{qh}{2}} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t};$$

im andern ist er:

$$b \cdot \frac{V'}{V' - \frac{qh}{2}} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}, \text{ wo } \alpha = 0{,}003665.$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{hs}{\sigma} = E + (b - e) \cdot \frac{V}{V + \frac{qh}{2}} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} - b \cdot \frac{V'}{V' - \frac{qh}{2}} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}, \text{ oder:}$$

$$e = \frac{E - \frac{hs}{\sigma} - \frac{bqh}{2} \cdot \frac{V + V'}{\left(V + \frac{qh}{2}\right)\left(V' - \frac{qh}{2}\right)} \cdot \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}}{(1 + \alpha T) : (1 + \alpha t)} \cdot \left(1 + \frac{qh}{2V}\right).$$

Bei den angegebenen Dimensionen darf der Factor $1 + \frac{qh}{2V}$, sowie der Factor $\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}$ des letzten kleinen

Gliedes im Dividendus weggelassen, $\left(V - \frac{qh}{2}\right) \cdot \left(V' - \frac{qh}{2}\right)$ durch VV' und $(1 + \alpha T) : (1 + \alpha t)$ im Divisor durch $1 + \alpha . (T - t)$ ersetzt werden. Es ist also:

$$(1) \qquad e = \frac{E - hc}{1 + \alpha . (T - t)} .$$

Die Hülfsgrösse $c = \frac{s}{\sigma} + \frac{bq}{2} \cdot \frac{V + V'}{VV'}$ kann für einen mittlern Barometerstand berechnet und als Constante des Apparates angesehen werden, da sogar bei den extremsten Barometerständen von 3 cm über oder unter dem mittlern Stande der aus dieser Annahme erwachsende Fehler von h noch nicht ein Procent betragen kann. Ob der Divisor $1 + \alpha . (T - t)$ zu berücksichtigen oder zu vernachlässigen ist, lässt sich für den einzelnen Fall daraus beurtheilen, dass erst eine Temperaturänderung von $T - t = 2^3/_4$ Grad einen Fehler von einem Procent für e ergibt.

Wenn die Höhe h in Millimetern gemessen wird, so ist sie durch Multiplication mit dem kleinen echten Bruche c jedesmal auf Quecksilberdruck zu reduciren. Diese Rechnung bleibt erspart, falls man einen Maassstab benutzt, dessen Intervalle $\frac{1}{10 . c}$ mm betragen. Die Einheiten dieses Maassstabes sind Zehntelmillimetern Quecksilberdruck äquivalent. Bei meinem Apparate ist $V = 279{,}5$, $V' = 319{,}7$, $q = 0{,}0560$; für den Mittelwerth $b = 76$ ist also $\frac{1}{10\,c} = 1{,}215$. Ist der Maassstab für $s = 0{,}925$ angefertigt, so hat man an der Ablesung h noch die Correction $- \frac{t}{1500\,\sigma\,c} . h$, also $- \frac{t}{1680} . h$ anzubringen, wenn man die Ausdehnung des Rüböls berücksichtigen will. Die nur sehr selten anzuwendende barometrische Correction für h ist $+ \frac{q}{2\,c} \cdot \frac{V + V'}{VV'} \cdot (b - 76) . h$, also $\frac{b - 76}{440} \cdot h$.

Der Vorzug eines Manometers, welches mit einem geschlossenen Raume in Verbindung steht, vor einem nach

aussen sich öffnenden liegt, abgesehen von der Unabhängigkeit von barometrischen Schwankungen, ganz besonders in dem zuverlässigen Verhalten gegen Temperaturänderungen, welche am offenen Manometer eine Druckänderung von mehr als $^1/_4$ mm für $\frac{1}{10}$ Grad verursachen, dagegen bei dem in ein Gefäss mündenden Manometer gar nicht einwirken, wenn man dem Apparate Zeit zum Temperaturausgleich beider Gefässe lässt. Eine Temperaturänderung hat hierbei nur auf die Grösse von E einen Einfluss, der in seinem Betrage viel geringer (bei 10^0 $4^1/_2$, bei 20^0 $2^1/_2$ mal) ist, also auch nur zu geringeren Fehlern Anlass geben kann. Auf ein sicheres Ergebniss ist also zu rechnen, wenn man zur Zeit des Schlusses der Gefässe eine erste, und, nachdem der Apparat geschlossen eine Zeit lang gestanden hat, noch eine zweite Temperaturablesung macht und dann die Manometerdifferenz abliest.

Am vortheilhaftesten ist es freilich, die Messungen in einem Raume anzustellen, in welchem die Temperatur keinem Wechsel von Belang unterworfen ist. Wenn dies der Fall, so könnte man die Bedeckung des zweiten Gefässes unterlassen, den Apparat also mit offenem Manometer brauchen, ohne indess einen andern Vortheil zu erlangen als den, dass für die obige Formel (1) die Constante:

$$c = \frac{s}{\sigma} + \frac{bq}{2V}$$

etwas kleiner, die Theilung des Maassstabes also etwas weiter ausfällt. Wenn hingegen eine Temperaturänderung eingetreten ist, so würde es sich nicht empfehlen, das Condensationsgefäss allein zu benutzen; denn die zur Berechnung von e dienende Gleichung erhält dann, wie eine der obigen ähnliche Ableitung zeigt, sogar wenn der Barometerstand unverändert geblieben ist, die complicirtere Form:

$$(1^*) \qquad e = \frac{E + b \cdot \alpha \cdot \frac{T-t}{1+\alpha t} - h \cdot \left(\frac{s}{\sigma} + \frac{bq}{2V}\right)}{1 + \alpha \cdot (T-t)}.$$

Die Menge des verdunsteten Wassers, die dazu nöthige Wärme, die Temperatur- und Druckverminderung werden annähernd so berechnet. Die Dichtigkeit gesättigten Wasserdampfes für die Temperatur T beträgt $D = \frac{0{,}000\,010\,6\,E}{1 + \alpha T}$, worin die Spannung E in Centimetern zu nehmen ist. Das Gefäss enthält also im Zustande der Sättigung $D \,.\, V$ g Dampf; da der anfängliche Dunstdruck e war, so mussten $\frac{0{,}000\,010\,6\,V \,.\, (E - e)}{1 + \alpha T}$ g Wasser verdunsten. Dazu sind nach der Regnault'schen Formel für die latente Wärme des Dampfes $\frac{0{,}000\,010\,6\,V \,.\, (E - e)}{1 + \alpha T} \cdot \frac{606{,}5 - 0{,}695\,T}{1000}$ Calorien nöthig.

Für mittlere Verhältnisse, etwa für $T = 17{,}5^0$, $E = 1{,}49$, $e = 0{,}89$, was 60 Proc. relativer Feuchtigkeit voraussetzt, und $V = 280$ müssen hiernach 0,0017 g Wasser verdunsten, wozu 0,0010 Wärmeeinheiten erforderlich sind. Enthält nun das Fliesspapier etwa 4 g Wasser, und gäbe dieses allein die zur Verdunstung nöthige Wärme her, so würde es doch nur eine Temperaturerniedrigung von 0,25 Grad erfahren. Der auch blos zum Theil unter dieser wenig erniedrigten Temperatur entwickelte Dampf steht in zu geringem Quantitätsverhältnisse zu der Luft im Apparate, um dieselbe merklich abzukühlen. Da nun die directe Temperaturerniedrigung der Luft durch das nasse Papier auch nur allmählich vor sich gehen kann, und die inzwischen von der Gefässwand her zuströmende Wärme dieser Abkühlung entgegenwirkt, so ist namentlich bei dünnwandigen Gefässen die Nachwirkung oft nicht erkennbar.

In ganz derselben Zusammenstellung dürfte der Apparat als Absorptionshygrometer zu benutzen sein, wenn man die Pipette mit Schwefelsäure gefüllt und mit Wachsverschluss am Deckelrohr anbringt und auf geeignete Weise für möglichste Verbreitung der Säure Sorge trägt. Man füllt die Pipette mittelst eines Trichters, dessen enges Rohr bis in ihre Kugel hineinreicht, indem ihre untere Oeffnung zugehalten wird. Da hierbei die Luft durch die eindringende

Säure sich nicht aus dem engen Ausflussrohr der Pipette vertreiben lässt, so ist die Füllung sehr bequem. — Die Dichtigkeit des Absorptionshygrometers ist wegen des äussern Ueberdruckes noch gesicherter.

Bei denselben Bezeichnungen wie oben ist der Druck im Absorptionsgefässe $(b-e)\cdot\frac{V}{V-\frac{qh}{2}}\cdot\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}$, im andern Gefässe $b\cdot\frac{V'}{V'+\frac{qh}{2}}\cdot\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}$, und es ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{hs}{\sigma}=b\cdot\frac{V'}{V'+\frac{qh}{2}}\cdot\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}-(b-e)\cdot\frac{V}{V-\frac{qh}{2}}\cdot\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t},\ \text{also:}$$

$$e=\frac{\frac{hs}{\sigma}+\frac{bqh}{2}\cdot\frac{V+V'}{\left(V-\frac{qh}{2}\right)\cdot\left(V'+\frac{qh}{2}\right)}\cdot\frac{1+\alpha T}{1+\alpha t}}{(1+\alpha T):(1+\alpha t)}\cdot\left(1-\frac{qh}{2V}\right),$$

oder mit den erlaubten Vereinfachungen:

$$e=\frac{hc}{1+\alpha.(T-t)},\tag{2}$$

worin dieselbe Hülfsgrösse $c=\frac{s}{\sigma}+\frac{bq}{2}\cdot\frac{V+V'}{VV'}$ auftritt, wie bei der Formel für das Condensationshygrometer. Die directe Ablesung des Druckes bis auf Zehntelmillimeter ist also durch denselben Maassstab ermöglicht.

Auch hier ergibt die Berechnung für den Gebrauch des blossen Absorptionsgefässes mit offenem Manometer, vorausgesetzt, dass der Barometerstand sich nicht geändert hat, die complicirtere Formel:

$$e=\frac{b\alpha\cdot\frac{T-t}{1+\alpha t}+h\cdot\left(\frac{s}{\sigma}+\frac{bq}{2V}\right)}{1+\alpha.(T-t)},\tag{2*}$$

deren Anwendung auch nothwendig ist, um aus den Ablesungen am Edelmann'schen Hygrometer die richtigen Werthe von e zu berechnen.

Hinsichtlich der Leistungen habe ich den Apparat bei sehr verschiedenen Feuchtigkeitsverhältnissen, aber nur als

Condensationshygrometer, mit einem in schwingender Bewegung erhaltenen guten Psychrometer verglichen und mit Beachtung der während dieser Versuche gemachten, hier angegebenen Erfahrungen eine sehr befriedigende Uebereinstimmung gefunden. Aus dem constanten Verhalten des Hygrometers muss ich schliessen, dass eine Diffusion von Wasserdampf durch das Gummirohr, welches van Hasselt deshalb am Edelmann'schen Hygrometer zu beseitigen für wünschenswerth hält, hier ganz und gar nicht vorkommt. Denn sogar während tagelangen Stehens meines Versuchsapparates zeigten sich in dem Stande des Manometers nur diejenigen Schwankungen, welche durch die von der Temperatur abhängige Aenderung der Dampfspannung bedingt waren. Wegen dieser Zuverlässigkeit dürfte das Hygrometer bei geschickter Behandlung sich besonders zur Ermittelung der je nach der Gebrauchsweise verschiedenen Psychrometerconstante eignen.

Hamburg, im October 1879.

X. *Ueber das durch electrische Entladungen erzeugte Phosphorescenzlicht; von Eilhard Wiedemann.*

Gelegentlich eines Referates in den Beiblättern **3.** p. 526. 1879, über eine Arbeit von Crookes machte ich darauf aufmerksam, dass vielleicht die Platincyandoppelsalze unter dem Einflusse der von der negativen Electrode ausgehenden Entladungen eine orientirte Fluorescenz zeigen könnten.

Fast alle Platincyandoppelsalze zeigen unter dem Einflusse der Entladungen eine Fluorescenz, doch gelang es mir nicht an ihnen, so lange sie unzersetzt waren, eine Doppelfluorescenz nachzuweisen. Indess ergab sich eine Reihe anderer, der Beachtung werther Phänomene.[1])

1) Ueber die Florescenzfarben selbst ist während meiner Versuche eine Arbeit von Goldstein erschienen, auf die ich verweise (Wien. Ber. **80.** 3. Juli 1879. 6 pp.)

Platincyanbarium zeigte, ehe es in das Vacuum gebracht wurde oder als es nur kurze Zeit in demselben verweilt hatte, ohne dass es von electrischen Entladungen getroffen war, so gut wie keinen Dichroismus im durchgehenden Lichte. Wurde eine einzige Entladung hindurchgeführt, so zeigte das kräftig auftretende grüne Fluorescenzlicht[1]) keinen Dichroismus, die beiden Bilder des Krystalles in einem Kalkspathrhomboëder erschienen vollkommen gleich hell. Liess man aber eine Reihe Entladungen hindurchgehen, so wurde das senkrecht zur Hauptaxe polarisirte Bild immer dunkler, es erschien braun, während das andere noch eine Zeit lang eine grüne Farbe bewahrte, bis endlich auch in ihm das Fluorescenzlicht verschwand. Zugleich war der Krystall an der Oberfläche braun geworden und zeigte im durchgehenden Lichte einen starken Dichroismus; dabei war das senkrecht zur Hauptaxe polarisirte Bild das dunklere. Im reflectirten Lichte trat dem entsprechend ein sehr starker, orientirter Flächenschiller auf, dessen Polarisationsebene senkrecht zur Hauptaxe gelegen ist.

Aehnlich verhalten sich auch andere Platincyandoppelsalze. Ein Dichroismus trat, wie spätere Versuche zeigten, auch dann auf, wenn man die Krystalle, ohne sie der Einwirkung electrischer Entladungen auszusetzen, längere Zeit im Vacuum liess, wobei sie Wasser verloren.

Dieser Pleochroismus dürfte in der Weise zu erklären sein, dass bei dem Wasserverluste die einzelnen Molecüle in ihren Lagen verbleiben[2]) und sonach der zum Theil entwässerte Krystall eine regelmässige Structur besitzt, also eine wahre Pseudomorphose darstellt; dass aber in den einzelnen, den entwässerten Krystall zusammensetzenden Molecülen die optischen Verschiedenheiten nach verschiedenen Richtungen weit stärker ausgebildet sind als in den wasserhaltigen. Als zweites Moment kommt hinzu, dass die wasserärmere Verbindung, wie schon die dunklere Farbe zeigt, ein weit grösseres Absorptionsvermögen besitzt als die ursprüngliche.

Die scheinbare Doppelfluorescenz des Platinbaryumcyanürs, nachdem der Strom einige Zeit hindurch gegangen ist, rührt davon her, dass selbst nachdem die

---

1) Ob wir den Ausdruck Phosphorescenz- oder Fluorescenzlicht anwenden, dürfte, da die beiden Phänomene im Principe identisch sind, irrelevant sein.

1) Vgl. Grailich, Krystallogr.-optische Untersuchungen. p. 63.

oberflächlichen Theile ihr Wasser verloren haben, doch noch die tiefer gelegenen unter dem Einfluss der Entladungen fluoresciren. Das aus den Krystallen hervordringende Fluorescenzlicht wird dann aber in ganz derselben Weise verändert, wie Licht, das von aussen kommend, den Krystall durchsetzt. Das unter dem Einflusse der Entladungen so sehr viel schnellere Auftreten des Dichroismus findet seine Erklärung in der Erwärmung der Krystalle unter dem Einflusse derselben. Doch glaube ich nicht, dass wir dieselbe als bedingt durch fortgeschleuderte Molecüle ansehen dürfen, wie Crookes meint, sondern dass wir es hier mit dielectrischen Verschiebungen oder Wellen zu thun haben, deren Bewegungen, wie die der Lichtwellen, den Aether des festen Körpers, wo sie auftreffen, verschieben und zu Schwingungen veranlassen, die theils als Wärme, theils als Licht wahrgenommen werden.

Der schlagendste Beweis für die Unrichtigkeit der Crookes'schen Annahme dürfte der folgende Versuch sein:

Leitet man durch ein Entladungsrohr von grosser Wanddicke den positiven Strom einer Holtz'schen Maschine, schaltet in den Stromkreis eine Funkenstrecke, sodass die Entladungen in einem solchen Rhythmus erfolgen, dass sie im Rohre durch die Finger aus ihrer Bahn abgelenkt werden, so tritt an der Innenseite des Rohres nur ein schwaches, an der Aussenseite dagegen ein sehr helles grünes Phosphorescenzlicht auf. Dass dies bisher, soweit mir bekannt, noch nicht beobachtet wurde, liegt in der geringen Wandstärke der gewöhnlich benutzten Glasröhren. Der Einwand, dass etwa unmittelbar an der betreffenden Glasoberfläche sich aussen eine dünne Schicht ultravioletter Strahlen befindet, widerlegt sich, wenn man an Stelle eines Glasrohres einen durch Fett gedichteten Schliff anwendet; das Phosphorescenzlicht tritt dann an der Grenze des innern Theiles des Schliffes und des Fettes auf. — Das Phosphorescenzlicht zeigt sich indess nicht stets hauptsächlich an der Aussenfläche der Glasröhren, sondern nur bei Röhren von grösseren Weiten; bei engen, besonders Capillarröhren dagegen leuchtet nur die Innenwand. In dem erstern Falle wird aber bei Annähern des Fingers die Entladung bis an die Glaswand gedrückt, während sie im letztern durch einen dunkeln Zwischenraum von derselben getrennt ist und nun wohl in diesem die Vorgänge in derselben Weise sich abspielen, wie in jenem innerhalb der Glas-

wand, sodass die äussere Seite dieses dunkeln Raumes der äussern Seite der Glasröhre entspricht. — Eng mit diesen Phänomenen zusammen hängt die Erscheinung, dass, wenn man etwa eine kugelförmige positive Electrode in einer kugelförmigen Glaskugel verwendet und einen Punkt der äussern Wand der Glaskugel mit einer Spitze ableitend berührt, dann auf dem gegenüberliegenden Punkte der Kugel ein deutliches Schattenbild der Electrode auftaucht, umgeben von einem schön grünen Strahlenkranze.

Wenn Spottiswoode und Moulton fanden, dass zur Erzeugung empfindlicher Entladungen ein bestimmter Rhythmus der Entladungen oder eine bestimmte, bei jeder einzelnen derselben übergeführte Electricitätsmenge nöthig ist, so gilt dasselbe von der Erzeugung des grünen Fluorescenzlichtes durch das negative Licht, wie sich durch allmähliches Vergrössern einer in den Stromkreis eingeschalteten Funkenstrecke ergibt. Hat dieselbe eine bestimmte Grösse, so tritt das grüne Licht besonders hell hervor. Unter den Partialströmen des Inductoriums dürfte meist einer gerade die zur Erzeugung des grünen Lichtes nöthige Intensität besitzen.

Den Ausgangspunkt für eine Theorie dieser Phänomene, sowie die Bewegung der Electricität in Gasen müssen die Gleichungen von Maxwell (Wied. Galv. p. 1226) bilden, aus denen sich eine Reihe von Thatsachen ohne weiteres ableiten, wie ich später ausführlich nachweisen werde. An eine durch Bewegung materieller Theilchen bedingte Electricitätsleitung ist schon deshalb nicht zu denken, weil die Geschwindigkeit der Electricitätsbewegung in Gasen unverhältnissmässig grösser als irgend eine Molecularbewegung ist. Aus den Wheatstone'schen Versuchen ergibt sie sich grösser als 2 000 000 m, während sich andererseits aus den Versuchen von von Zahn[1]) ableiten lässt, dass die Molecüle in der Richtung des Stromes keine erheblichen Geschwindigkeitsänderungen erfahren.

Die Zurücktreibung von der negativen Entladung getroffener Flächen steht ebenfalls im Einklange mit der Maxwell'schen Theorie, sobald wir den Wellen dielectrischer Polarisation eine hinlängliche Energie beilegen, und dass sie die besitzen folgt daraus, dass sie Glas zu schmelzen vermögen, auf das sie auftreffen.

1) v. Zahn, Wied. Ann. 8. p. 675. 1879.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

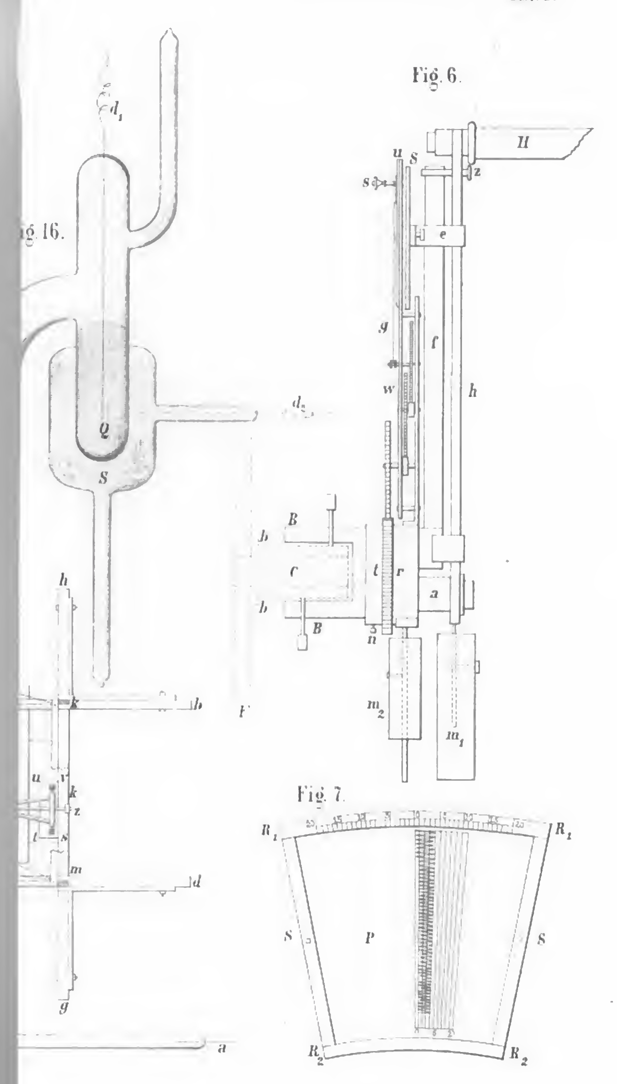


Fig. 14–15. Giese Fig. 16.

1880. ANNALEN № 2.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE BAND IX.

I. *Ueber den Verlauf der Rückstandsbildung in Leydener Flaschen bei constanter Potentialdifferenz der Belegungen; von W. Giese.*

Als R. Kohlrausch im Jahre 1854 die ersten messenden Versuche über die Rückstandsbildung in Leydener Flaschen veröffentlichte[1]), theilte er gleichzeitig eine Formel mit, welche den Verlauf des Potentials auf der innern, geladenen Belegung einer Leydener Flasche mit solcher Genauigkeit darstellte, dass er selbst und Wilh. Weber bei ihrer Vergleichung des mechanischen und electromagnetischen Strommaasses sich derselben mit Erfolg bedienen konnten, um die disponible Ladung einer Flasche zu gegebener Zeit zu berechnen. Die Frage aber nach der theoretischen Begründung seiner Formel liess Kohlrausch offen, insofern er sie nicht auf die partielle Differentialgleichung der Electricitätsbewegung im Isolator zurückführte.

Versuche, den Verlauf der Rückstandsbildung aus der partiellen Differentialgleichung herzuleiten, indem man das Glas der Flasche als einen sehr schlechten Electricitätsleiter oder als ein Dielectricum im Faraday'schen Sinne betrachtet, führen nur unter sehr gezwungenen Voraussetzungen zu Ergebnissen, die mit der Erfahrung übereinstimmen. Insbesondere hat Maxwell[2]) gezeigt, dass die Theorie der Dielectrica nur dann die Erscheinungen erklären könnte, wenn man das Glas als aus verschieden-

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. **91.** p. 56. 1854.

2) Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism. I. p. 376. 1873.

artigen Medien zusammengesetzt betrachtete. Unter dieser Annahme würde sich für den Verlauf des Potentials bei der Versuchsanordnung von Kohlrausch der Ausdruck:

$$V = \Sigma A_r e^{-k_r t}$$

ergeben, wobei soviel verschiedene Exponentialfunctionen $e^{-k_r t}$ auftreten, als verschiedene Stoffe im Glase vorhanden sind. Nun zeigt der erste Anblick der von Kohlrausch gegebenen Tafeln und Curven, besonders aber auch der von ihm aufgestellten Formeln, dass unmittelbar nach geschehener Ladung die Ableitung des Potentials nach der Zeit unendlich gross oder doch sehr gross ist[1]), und man würde also, da $e^{-k_r t}$ stets endliche Ableitung nach t hat, einer recht grossen Anzahl von Summanden $e^{-k_r t}$ bedürfen, um die Zahlen von Kohlrausch darzustellen, also viele verschiedene Stoffe im Glase annehmen müssen. Maxwell selbst schliesst auch aus der erwähnten Untersuchung keineswegs, dass das Glas ein derartiges Gemisch heterogener Körper sein müsse, sondern betont ausdrücklich die Möglichkeit anderer, noch unbekannter Ursachen, die der Rückstandsbildung zu Grunde liegen könnten.

Durch eine solche Ursache, nämlich durch eine antelectrische Kraft der Materie, hat denn auch gleich nach dem Bekanntwerden von Kohlrausch's Messungen Riemann die Erscheinungen zu erklären versucht und über

---

1) Dieser Umstand weist mit Bestimmtheit darauf hin, dass die von Wüllner (Wied. Ann. **1.** p. 247. 1877) untersuchte Influenzwirkung auf Isolatoren für sich allein nicht im Stande ist, die Rückstandsbildung zu erklären. Denn für die Influenzwirkung hat Wüllner Formeln gegeben und bestätigt gefunden, nach denen das Potential durch $V = a + b \cdot e^{-kt}$ dargestellt würde, also für $t = 0$ endliche Ableitung hätte. Der Umstand, dass bei einigen Versuchen Wüllner's die obere Condensatorplatte auf dem Isolator ruhte, beweist für die Identität mit dem Vorgange in einem belegten Isolator nichts, denn auch beim Auflegen der Platte wird nur in drei Punkten Berührung eintreten. Den grossen Unterschied des Potentialverlaufes in beiden Fällen hat übrigens schon v. Bezold experimentell nachgewiesen (Pogg. Ann. **114.** p. 437, 438. 1861).

seine bezüglichen Anschauungen der Naturforscherversammlung zu Göttingen im Jahre 1854 Mittheilung gemacht.[1]) Er gab damals die Differentialgleichung für das Innere des Isolators, aber weder die Grenzbedingungen, noch die Lösung für den von Kohlrausch untersuchten Fall. Beides findet sich in einer unter Riemann's Nachlass veröffentlichten Abhandlung[2]), in der aber von einer numerischen Vergleichung mit den Beobachtungen Abstand genommen ist, unter Hinweis darauf, dass es dazu vieler Correctionen bedurft haben würde, zu deren Ermittelung dem Verfasser das Beobachtungsmaterial gefehlt hätte.

Und in der That bietet die von Kohlrausch für einen rein praktischen Zweck gewählte Versuchsanordnung, bei welcher die äussere Belegung stets mit der Erde verbunden war, die innere nach der Ladung isolirt blieb, und der Verlauf des Potentials auf letzterer beobachtet wurde, für eine Vergleichung mit der Theorie grosse Schwierigkeiten. Abgesehen davon, dass die Integration gegebener Differentialgleichungen für diesen Fall besonders schwierig wird, ist an Correctionen zu berücksichtigen, dass an die Luft Electricität zerstreut wird, ein Verlust, der vom jeweiligen Werthe des Potentials V abhängt, ferner, dass von der freien Oberfläche der innern Belegung und den mit ihr verbundenen Conductoren Electricität zur Flasche strömt, ein Zufluss der $\frac{dV}{dt}$ proportional ist. Nun findet sich freilich bei Riemann eine Formel, welche alle diese Einflüsse mit zu berücksichtigen gestattet[3]), deren numerische Anwendung aber so complicirt sein würde, dass auch sie für die Prüfung der Theorie auf Grund von Beobachtungen unbenutzbar ist.

Bei dieser Sachlage schien es wünschenswerth, den Verlauf der Rückstandsbildung unter Bedingungen zu verfolgen, welche der analytischen Behandlung leichter zu-

1) Riemann, Gesammelte mathematische Werke, p. 48.
2) l. c. p. 345.
3) l. c. p. 353, § 6.

gänglich sind und die Erscheinung von äusseren Einflüssen unabhängiger machen. Beides habe ich zu erreichen gesucht, indem ich die bei constanter Potentialdifferenz den Belegungen zuströmende Electricitätsmenge ermittelte. In analytischer Beziehung gestalten sich hier die Grenzbedingungen ungleich einfacher, und die oben erwähnten Correctionen für Zerstreuung an die Luft und Zufluss von freien Oberflächen fallen fort, letztere weil jede Belegung constantes Potential hat, erstere sobald man diejenige Belegung, für die man die zuströmende Electricitätsmenge bestimmen will, auf dem Potential Null hält.

In den §§ 1, 2, 3 der folgenden Arbeit werde ich Methode und Resultate der Beobachtungen mittheilen, in den §§ 4 und 5 die Riemann'sche Hypothese an den Messungen prüfen. Es ergibt sich, dass sie mit der Erfahrung nicht in Uebereinstimmung ist.

Ausser Riemann hat Clausius Differentialgleichungen für die Erklärung der Rückstandsbildung aufgestellt, aber aus ihnen bis jetzt die Folgerungen für den zeitlichen Verlauf der Erscheinung noch nicht gezogen.

I.

Es handelte sich nun darum, eine Methode aufzufinden, nach welcher die Strömung zu den Belegungen bei constanter Potentialdifferenz ermittelt werden konnte. Offenbar musste dazu eine Batterie von grosser electromotorischer Kraft benutzt werden, deren einer Pol mit der Erde zu verbinden war, während der andere die eine Belegung (es war bei den Versuchen stets die äussere) lud. Die zweite (innere) Belegung musste auf dem Potential Null erhalten werden. Eine Beobachtung der Rückstandsbildung durch Galvanometer ist dann aber unthunlich, weil es sich um Stromintensitäten handelt, welche weit unter der Empfindlichkeitsgrenze galvanischer Messapparate liegen. Gäbe es ein hinreichend empfindliches Galvanometer, so brauchte man es nur zwischen Erde und innerer Belegung einzuschalten und dürfte behaupten, an ihm die Strömung bei

constanter Potentialdifferenz beobachtet zu haben, ohne Widerspruch befürchten zu müssen, weil jeder stillschweigend zugeben würde, dass der Unterschied des Potentials auf der innern Belegung von Null so gering ist, dass man ihn ohne weiteres vernachlässigen darf. Dennoch ist das Potential der Belegung nicht Null, es würde ja sonst kein Strom durch den Galvanometerdraht fliessen können, und wenn man ein hinreichend empfindliches Electrometer hätte, so könnte man die Stromintensität an diesem, nachdem man es mit der Belegung verbunden hätte, messen, statt am Galvanometer, denn solange der Widerstand im Galvanometerdraht constant bleibt, ist die Strömung dem Potential der Belegung proportional. Verdoppelte man diesen Widerstand aber, so würde auch das Potential der Belegung auf das Zweifache steigen, weil die Stromintensität ungeändert bleibt, solange nur das fragliche Potential klein genug gegen die electromotorische Kraft der Batterie ist. Nimmt man letztere gross genug, so muss es offenbar möglich sein, durch Einschalten hinreichend grosser Widerstände das Potential der innern Belegung für Electrometer gewöhnlicher Empfindlichkeit wahrnehmbar und messbar zu machen, ohne doch von der Bedingung constanter Potentialdifferenz merklich abzuweichen.

Nach sehr vielen vergeblichen Bemühungen, den vorstehenden Betrachtungen entsprechend ein Beobachtungsverfahren zu schaffen, das, dem galvanometrischen ähnlich, gestattet hätte, zu jeder beliebigen Zeit die Grösse der Strömung abzulesen, habe ich mich der folgenden Methode zugewandt, von der man vielleicht finden wird, dass sie die nächstliegende gewesen wäre. In der That, wer bestimmen will, wie viel Wasser aus einer Röhre ausfliesst, sammelt dasselbe etwa eine Minute lang in einem Gefäss und bestimmt dann die erhaltene Menge. Analog kann man im vorliegenden Falle electrischer Strömung verfahren, indem man die mit dem Electrometer verbundene und zur Erde abgeleitete innere Belegung plötzlich isolirt: Bestimmt man dann eine Minute später das Potential am Electro-

meter, so misst man dadurch die zugeflossene Electricitätsmenge, d. h. die Stromintensität, und zwar für einen Zeitpunkt, der in erster Annäherung in der Mitte zwischen den Zeiten liegt, wo isolirt und wo abgelesen wurde. Was mich abhielt, diese sehr einfache Methode von vornherein anzuwenden, war der Wunsch, in ähnlicher Weise, wie R. Kohlrausch gethan, für die erste Zeit nach Ladung der Flasche möglichst viele Beobachtungen zu sammeln. Darauf musste ich jetzt verzichten, da bei den abwechselnden Ladungen und Entladungen des Electrometers jedesmal mit der neuen Beobachtung gewartet werden musste, bis die Nadel zur Ruhe gekommen war. Aber schon nach den ersten Versuchen überzeugte ich mich, dass bei der neuen Anordnung an Genauigkeit gewonnen wurde, was an Ausdehnung des Beobachtungsmaterials verloren ging, da jetzt nach jeder einzelnen Ablesung der Nullpunkt des Electrometers von neuem bestimmt werden konnte, der bei länger dauernder Ablenkung der Nadel stets unsicher wurde. Dazu kommt, dass bei schnelleren Aenderungen des Potentials, wie sie im Anfang auftreten, dessen Bewegungen nur unvollkommen durch die Nadel wiedergegeben werden, und dass endlich der Beobachter nur schwer die Stellung der letztern für eine scharf bestimmte Zeit ablesen kann.

Diese Fehlerquellen wurden bei der folgenden definitiven Anordnung der Versuche umgangen: Die drei wesentlichen Theile des Apparates, nämlich Batterie, Flasche und Electrometer, waren untereinander, resp. mit der Erde durch drei Wippen verbunden. Die erste derselben gestattete, die äussere Belegung der Flasche mit der Erde oder mit dem freien Pole der Batterie zu verbinden, die zweite stellte die Leitung von der innern Belegung zur Erde oder zum Electrometer her, die dritte gestattete, das eine Quadrantenpaar des Electrometers, mit dem die innere Belegung durch die zweite Wippe verbunden werden konnte, zur Erde abzuleiten oder zu isoliren. Sämmtliche Wippen konnten vom Platze des Beobachters, der mit Fernrohr

und Scala die Einstellung am Electrometer ablas, durch Fäden regiert werden. Vor Beginn des Versuches stehen die Wippen so, dass die äussere Belegung mit der Erde, die innere mit dem Electrometer und durch dieses gleichfalls mit der Erde verbunden ist. Zur Zeit $t = 0$ wird die äussere Belegung mit dem freien Pol der Batterie in dauernde Berührung gebracht. Am Electrometer und der innern Belegung tritt keine Potentialänderung ein, da beide einstweilen noch mit der Erde verbunden sind. Soll nun die in einer Minute zur innern Belegung fliessende Electricitätsmenge gemessen werden, so werden in einem möglichst scharf bestimmten Augenblick durch die dritte Wippe Electrometer und innere Belegung isolirt und genau eine Minute darauf durch die zweite Wippe die Verbindung zwischen der letztern, die nun wieder zur Erde abgeleitet wird, und dem Electrometer unterbrochen. Die Nadel, welche sich in fortschreitender Bewegung befand, schwingt noch ein wenig weiter und dann zurück, die so entstehenden Schwingungen sind aber so klein, dass man aus den beiden ersten Umkehrpunkten durch Schätzung auf die Einstellung schliessen kann, welche die Nadel ohne Schwingungen haben würde. Dadurch wird das Potential der innern Belegung im letzten Augenblick, wo sie mit dem Electrometer verbunden war, und also die in einer Minute zugeflossene Electricitätsmenge bestimmt. Sobald die Ablesung vorgenommen ist, werden die beiden benutzten Wippen in ihre vorige Lage zurückgebracht, und die nächste Beobachtung kann beginnen, sowie die Nadel zur Ruhe gekommen, und ihr Nullpunkt von neuem bestimmt ist.

Wie man sieht, ist bei diesen Versuchen die Forderung constanter Potentialdifferenz zwischen den Belegungen nicht streng erfüllt, da das Potential der innern sich ändert. Um diese Aenderungen nicht zu gross werden zu lassen, habe ich die Zeit der Isolirung bei starker Strömung auf $^1/_2$ und selbst $^1/_4$ Minute beschränkt und aus dem so erhaltenen Werthe des Potentials dasjenige berechnet, das in 1 Minute erhalten worden wäre. Wenn

dagegen die Strömung sehr schwach wurde, so blieb die innere Belegung 2 oder auch 4 Minuten isolirt. Auf diese Art erreichte ich es, dass einerseits die Potentialänderungen nur in sehr seltenen Fällen den Betrag von einem Daniell überschritten, und andererseits auch noch sehr schwache Strömungen mit Genauigkeit beobachtet werden konnten.

Zu den Messungen wurde ein Quadrantelectrometer nach Kirchhoff von älterer Construction, wie sie Desaga in Heidelberg baut, benutzt. Die Nadel war, statt an einem Glasfaden, an einem Coconfaden aufgehängt und wurde, nachdem ein kleiner Magnet an ihr befestigt war, durch einen kräftigen, auf dem Deckel des Apparates liegenden Magnetstab gerichtet. Durch Heben und Senken der Nadel konnte die Empfindlichkeit regulirt und bei 2,3 m Scalenabstand leicht auf 200 Scalentheile für ein Daniell gebracht werden, doch begnügte ich mich mit einer solchen von etwa 60 Scalentheilen, um allzugrosse Schwankungen in der Lage des Nullpunktes zu vermeiden. Wenn die Empfindlichkeit sich durch Ladungsverlust der im Electrometer verwendeten Flasche zu stark vermindert hatte, so wurde sie durch weiteres Senken der Nadel gegen die Quadranten wieder hergestellt. Um das Electrometer nach einer solchen Neueinstellung auf die Proportionalität seiner Ausschläge mit den gemessenen Potentialen zu prüfen, beziehentlich um dieselbe herzustellen, bediente ich mich eines Jakobi'schen Voltagometers, durch das der Strom von zwei Daniell'schen Elementen ging. Wurde das Electrometer nacheinander mit äquidistanten Stellen des so gebildeten Stromkreises verbunden, so mussten die Differenzen der Ablenkungen gleich werden.

Die untersuchten Flaschen waren innen und aussen mit Stanniol belegt, sie befanden sich in einem sorgfältig gegen die äussere Luft abgeschlossenen Raume über Chlorcalcium. Die Anordnung war dabei die folgende: Die Flasche hing in einem cylindrischen Glasgefäss, das mit einer Glasplatte zugedeckt war, getragen von einem die äussere Belegung umschliessenden Messingringe, der durch

zwei Drahtbügel an der Deckelplatte befestigt war. Die Drahtbügel, welche durch zwei Löcher der Platte geführt waren, dienten gleichzeitig als Zuleitung zur Belegung. In der Mitte der Deckelplatte war in eine grössere Durchbohrung ein weites, 13 cm langes, aussen und innen gefirnisstes Glasrohr gekittet, das oben durch einen Schellackpfropfen verschlossen war. Durch den Pfropfen und das Rohr, letzteres an keiner Stelle berührend, stieg der Zuleitungsdraht zur innern Belegung hinab. Um endlich ganz sicher zu sein, dass keine Leitung längs der Oberflächen stattfinde, habe ich in vielen Fällen am untern Ende der Röhre aussen und innen und am obern Rande der untersuchten Flasche zur Erde abgeleitete Stanniolbelegungen angebracht. Diese Vorsichtsmaassregel zeigte sich aber so ganz ohne Einfluss auf den Verlauf der Erscheinung, dass ich sie bei den letzten Versuchen wieder fortgelassen habe. Nach dem Einbringen der Flasche wurden alle Fugen und Löcher in der Begrenzung des Trockenraumes mit Colophoniumkitt zugestrichen und erst mehrere Tage nachher mit den Beobachtungen begonnen. Auch überzeugte ich mich vor jedem Versuch, dass die Flasche nicht etwa von früher her noch Entladungsströme zeigte.

Von ganz besonderer Wichtigkeit war die Beschaffenheit der Batterie. Sie musste von bedeutender electromotorischer Kraft sein, damit die Potentialschwankungen der innern Belegung, die bis zum Betrage von einem Daniell gingen, immer noch klein gegen sie blieben, und sie musste sehr constant sein, weil jede Aenderung im Potential der äussern Belegung während der Isolirung der innern fast in ihrem vollen Betrage als Fehler in die Bestimmung der Stromintensität eingegangen sein würde. Ich war in der glücklichen Lage, eine Batterie von 100 kleinen Leclanché-Elementen benutzen zu können, die für das hiesige physikalische Institut angeschafft wurde. Die electromotorische Kraft war ausreichend, zeigte sich aber nicht so constant, als man es von diesen Elementen hätte erwarten sollen. Sie ist während der Versuche (October

1878 bis April 1879) von 130 auf 91 Daniell zurück gegangen, und es mussten die Beobachtungsreihen oft abgebrochen werden, weil die abgelesenen Potentiale sich nicht in eine regelmässig verlaufende Reihe ordneten.

Das Daniell'sche Element, mit dem die Batterie verglichen, und an dem auch bei allen Beobachtungen die Empfindlichkeit des Electrometers gemessen wurde, war im wesentlichen nach den Angaben von Lodge[1] zusammengesetzt, nur habe ich die von ihm beobachteten Vorsichtsmaassregeln gegen die Mischung der Zink- und Kupfervitriollösung noch etwas weiter getrieben und dem Element folgende Anordnung gegeben: Ein mässig grosses Hafenglas wird mit Zinkvitriollösung gefüllt; durch einen dasselbe verschliessenden Kork ragen zwei unten zugeschmolzene etwa 1cm weite Glasröhren in die Flüssigkeit, sie enthalten den Zink- resp. den Kupferstab des Elementes, von der betreffenden Vitriollösung umgeben, und sind oben durch Korke, welche die Stäbe durchlassen, verschlossen. Beide Röhren sind seitlich, nahe unter dem Kork in ein feines Haarröhrchen ausgezogen, welches nicht in die Zinkvitriollösung des Hafenglases taucht. Nach Zusammensetzung des Elementes werden alle Oeffnungen und Korke mit Siegellack in der Wärme sorgfältig überzogen, um die Verdampfung zu verhindern. Obgleich der innere Widerstand hier ein ausserordentlich grosser ist (bei einem meiner Elemente über 60 Millionen S.-E.), so lässt sich kaum ein Unterschied in der Bewegung der Nadel wahrnehmen, wenn man das Electrometer einmal durch dies Element und dann durch ein gewöhnliches Daniell von nicht ganz 1 S.-E. Widerstand ladet. Nachdem ich das erste Element dieser Art, zusammengesetzt am 9. Februar 1878, ein ganzes Jahr hindurch fortgesetzt zu Vergleichungen benutzt hatte, schöpfte ich Argwohn gegen seine Constanz, weil ich die Unachtsamkeit begangen hatte, es mehrere Nächte hindurch stehen zu lassen, während beide

1) Lodge, Phil. Mag. Ser. V. **5.** p. 1. 1878.

Pole mit der Erde verbunden waren. Ich setzte deshalb ein neues, gleichartiges zusammen und verglich es mit dem alten am 25. Februar 1879. Es ergab sich, dass das letztere noch um 0,006 des Gesammtbetrages stärker als das neue war. Diese Abweichung erklärt sich nach den Versuchen von Moser[1]) zum Theil dadurch, dass die Zinkvitriollösung im alten Element das specifische Gewicht 1,15, im neuen 1,17 hatte, ist aber grösser als es der Concentrationsunterschied der Lösungen bedingt. Hiernach hatte also das Element offenbar keine merkliche Aenderung erfahren, und ich konnte auch fernerhin alle Messungen auf diese sichere Einheit beziehen.

Für die Zeitbestimmungen wurde eine im Beobachtungszimmer hängende Pendeluhr, die 80 Schläge in der Minute machte, benutzt. Da die Bewegung der Wippen durch die Hand des Beobachters erfolgte, so dürfte in den Fällen, wo die Isolirung der innern Belegung nur $^1/_4$ Minute dauerte, die Grösse der Beobachtungsfehler wesentlich von der Genauigkeit abhängen, mit der die betreffende Manipulation erfolgte. Ich schätze, dass die Ungenauigkeiten nur selten $^1/_5$ der Zeit zwischen zwei Pendelschlägen erreicht haben werden, sodass in diesem äussersten Falle der Beobachtungsfehler 2 Proc. betragen könnte, bei Isolirung für $^1/_2$ Minute 1 Proc., und bei Isolationsdauern von 2 und 4 Minuten ist anzunehmen, dass die Fehler in der Zeitbestimmung hinter die Ablesungsfehler am Electrometer zurücktreten, zumal in den letzteren Fällen meist kleinere Potentiale zu messen waren.

Es ist noch zu erwähnen, dass Hopkinson[2]) zur Beobachtung der Rückstandsbildung eine Methode angewandt hat, die Aehnlichkeit mit der beschriebenen besitzt. Es wird sich weiter unten Gelegenheit bieten, näher darauf einzugehen.

---

1) Moser, Wied. Ann. **3.** p. 216. 1878.
2) Hopkinson, Phil. Trans. R. S. 167. **2.** p. 599. 1878.

II.

Um aus den Beobachtungen ein richtiges Bild vom Verlaufe der Rückstandsbildung zu gewinnen, bedarf es verschiedener Correctionen. Es ist bereits erwähnt, dass nach Bedürfniss in einer und derselben Beobachtungsreihe die Dauer der Isolirung von $^1/_4$ bis 4 Minuten geändert wurde. Zu der Zeit, wo es passend schien, die Isolirung von zwei auf vier Minuten auszudehnen, war meist die Aenderung der Strömung schon so klein geworden, dass sich recht gut abwechselnde Messungen bei zwei und vier Minuten dauernder Isolirung anstellen liessen. Im zweiten Falle hätte nun das Potential doppelt so gross sein müssen wie im ersten, es erreichte aber diesen Betrag niemals. Der Grund dafür ist ein doppelter: Einmal tritt, sobald die freie Electricität sich auf dem Electrometer und den mit ihm verbundenen Leitern ansammelt, ein dem Potential proportionaler Electricitätsverlust wegen mangelhafter Isolirung ein, der verhältnissmässig um so grösser wird, je länger die Ladung des Electrometers andauert. Zweitens muss das Anwachsen des Potentials auf der innern Belegung seinerseits auf die Rückstandsbildung zurückwirken, etwa so, als wenn es einen Theil der frei gewordenen Electricität in das Glas zurücktriebe. Auch diese Wirkung der secundären Rückstandsbildung muss desto stärker werden, je länger die Isolirung dauert. Um die verschiedenen Beobachtungen derselben Reihe untereinander vergleichbar zu machen, muss man die Werthe berechnen, welche man erhalten hätte, wenn immer durch die gleiche Zeit, es sei eine Minute, isolirt worden wäre.

Ich mache für einen Augenblick die Annahme, dass von den genannten zwei Ursachen nur die erste wirksam sei, und dass die Electricität während der ganzen Dauer der Isolirung gleichmässig zuströme. Dann hat man, wenn v_t das am Electrometer beobachtete Potential ist, und f' dasjenige, welches man in der Zeit 1 erhalten würde, wenn keine Entladung stattfände:

$$\frac{dv}{dt} = f' - kv,$$

und daraus:

$$v_t = \frac{1}{k} f' \left(1 - e^{-kt}\right). \tag{1}$$

Wenn man nun bei gleichem Zufluss einmal das Potential nach zwei Minuten, v_2, und dann das Potential nach vier Minuten, v_4, beobachtet, so kann man aus dem Quotienten $\frac{v_4}{v_2}$ die Grösse e^{-k} berechnen, also auch den Werth des Potentials bei jeder andern Ladungsdauer. Durch die oben besprochenen alternirenden Messungen bei zwei und vier Minuten langer Isolirung würde $\frac{v_4}{v_2}$ bekannt sein, und man könnte nun aus den Beobachtungen berechnen, welches Potential man bei Isolirung für eine Minute erhalten haben würde.

In Wirklichkeit liegt aber die Sache nicht so einfach, weil nach vier Minuten nicht doppelt so viel Electricität zugeströmt ist, wie nach zwei Minuten, sondern ein Theil durch secundäre Rückstandsbildung wieder in die Flasche zurückgetrieben ist. Um den Einfluss dieses Vorganges in Rechnung zu ziehen, habe ich von dem Principe der Superposition Gebrauch gemacht. Wenn nämlich die partielle Differentialgleichung für die Electricitätsbewegung im Isolator nur die Ableitungen des Potentials enthielte und in diesen linear und homogen wäre, wenn dasselbe mit den Grenzbedingungen der Fall wäre, ausgenommen diejenige, welche das Potential an den Grenzflächen als Function der Zeit bestimmte, und wenn man für den Fall constanter Potentialdifferenz, sei es durch Rechnung, sei es durch Erfahrung, den Verlauf der Strömung ermittelt hätte in der Form:

$$P(a + b\varphi_t), \tag{2}$$

wo P die Potentialdifferenz bedeutet, und φ_t für negative t und $t = \infty$ verschwinden müsste, so würde man, falls P, statt constant zu sein, als Function der Zeit gegeben wäre, für die Strömung die Formel:

(3) $$J = P_0 (a + b\varphi_t) + \int_0^t \left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=\tau} \cdot (a + b\varphi_{t-\tau})\, d\tau$$

haben.

Hopkinson hat das Princip der Superposition, welches in Gleichung (3) seinen Ausdruck findet, in einer etwas andern Form der experimentellen Prüfung unterzogen und bestätigt gefunden.[1]) Ausserdem sprechen so viel Analogien auf anderen Gebieten der Physik dafür, dass die Anwendung von Formel (3) für den vorliegenden Zweck der Correctionen unbedenklich sein dürfte.

Dazu muss aber die Function φ bekannt sein. Ich fand nun, dass sich die beobachteten Werthe der Strömung mit einiger Genauigkeit darstellen lassen, wenn man:

$$\varphi_t = t^{-m}$$

setzt für $t \geqq 0$ und m Werthe zwischen 0,9 und 0,5 gibt. Die wahre Form der Function φ kann dies freilich nicht gut sein, wenigstens würde sie mit dem Principe der Superposition, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, unverträglich sein.

Denkt man die innere Belegung der Flasche von der Zeit 0 bis zur Zeit T mit dem Pole einer Batterie von der electromotorischen Kraft P verbunden, dann zur Erde abgeleitet, so wird für $t > T$ die Strömung des wieder auftretenden Rückstandes, oder, wie man kürzer sagen kann, der Entladungsstrom, sofern die Superposition statthaft ist:

$$J = P.b\varphi_t - Pb\,\varphi_{(t-T)},$$

und die gesammte Electricitätsmenge, welche von der Flasche abfliesst, wenn man ihr Zeit lässt, sich vollständig zu entladen:

$$P.b\int_T^\infty \varphi_t\, dt - Pb\int_T^\infty \varphi_{t-T}\, dt,$$

oder:

$$-P.b\int_0^T \varphi_t\, dt.$$

1) l. c.

Man sieht, dass das genau dieselbe Electricitätsmenge ist, welche während der Ladung der Flasche durch den mit der Zeit veränderlichen Theil der Strömung $P.b.\varphi_t$ in Bewegung gesetzt wurde; da er im wieder auftretenden Rückstande vollständig wieder zum Vorschein kommt, so kann man ihn füglich den Rückstand bildenden Theil der Strömung nennen. Der constante Rest der Strömung a, der bei constanter Potentialdifferenz der Belegungen zuletzt allein übrig bleibt, nachdem die Flasche ihren stationären Zustand erreicht hat, trägt zur Rückstandsbildung nichts bei. Ich werde ihn künftig kurz als stationäre Strömung bezeichnen.[1]) Nach diesen Betrachtungen würde nun in der Flasche, wenn man ihre Belegungen sehr lange auf der Potentialdifferenz P erhielte, ein Rückstand gebildet werden, der bei seiner Entladung die Electricitätsmenge:

$$Pb\int_0^\infty \varphi_t\,dt$$

hergeben würde. Für $\varphi_t = t^{-m}$ ergäbe das aber einen unendlich grossen Betrag, und darum kann diese Annahme mit der Superposition zugleich nicht bestehen.

Immerhin stellt die empirische Formel $a + b\,t^{-m}$ die Strömung für den Anfang so weit dar, dass sie den Cor-

1) Die Formeln zeigen, dass für den Entladungsstrom nach sehr lange dauernder Ladung die Intensität $P.b.\varphi_t$ ist. Man hätte also φ_t auch dadurch ermitteln können, dass man erst die Belegungen bis zur Herstellung des stationären Zustandes auf constanter Potentialdifferenz gehalten und dann die Strömung des wieder auftretenden Rückstandes beobachtet hätte. Dadurch wäre φ_t unabhängig von a bestimmt worden. Thatsächlich angewandt hat Hopkinson diese Methode in seinem Experiment γ (l. c. p. 603), das dem Princip nach mit meiner Methode verwandt ist. Was mich abhielt, φ_t aus dem Entladungsstrom zu bestimmen, war die Erwägung, dass es unmöglich ist, den stationären Zustand herzustellen, weil mit den Schwankungen der Temperatur sich die Constanten des Glases ändern, und also der geforderte stationäre Zustand schneller wechselt, als die Electricität im Stande ist zu folgen. Aus dem 4. Hefte der Beiblätter sehe ich, dass inzwischen auch Hopkinson die nahe Uebereinstimmung zwischen φ_t und t^{-m} bemerkt hat.

rectionsrechnungen zu Grunde gelegt werden kann. Die Constanten der Formel wurden für die zu berechnende Beobachtungsreihe aus 6 passend gewählten Werthen derselben, die auf 1 Minute Isolirungsdauer mit alleiniger Berücksichtigung der Entladungscorrection reducirt waren, nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Formel $P(a + b t^{-m})$ gibt dann angenäherte Werthe der Strömung, wenn als Einheiten die Minute und das einem Scalentheil entsprechende Potential festgesetzt sind. In letzterer Einheit kann man auch die electromotorische Kraft P der Batterie bestimmen und hat für irgend eine in Scalentheilen gemessene Potentialdifferenz ε der Belegungen, welche zu der durch die Batterie hergestellten hinzukommt:

$$\frac{\varepsilon}{P}(a + b\,\vartheta^{-m})$$

als Betrag der hinzukommenden Strömung zur Zeit ϑ, von dem Augenblick gerechnet, wo ε hinzugefügt wurde. Ich mache nun die allerdings nicht ganz streng richtige Annahme, dass das Potential f'_τ, welches man am Electrometer nach der Isolirungsdauer τ ablesen würde, wenn keine Zerstreuung an die Luft stattfände, proportional der Zeit zu diesem Betrage angewachsen wäre. Dann ergibt sich aus dem Vorstehenden, dass während des Entstehens von f'_τ die Electricitätsmenge:

$$\frac{f'_\tau}{P}\left\{\frac{a}{2}\tau + \frac{b}{(1-m)(2-m)}\tau^{1-m}\right\}$$

durch secundäre Rückstandsbildung in die Flasche zurückgetrieben worden ist, und dass man diesen Betrag zu f'_τ hinzuaddiren muss, um die Electricitätsmenge f_τ zu erhalten, die bei der Potentialdifferenz P von der innern Belegung abgeflossen sein würde:

$$(4)\qquad f_\tau = f'_\tau\left[1 + \frac{1}{P}\left(\frac{a}{2}\tau + \frac{b}{(1-m)(2-m)}\tau^{1-m}\right)\right].$$

Da ferner für eine Beobachtung, welche zu derselben Zeit, aber mit einer Isolirungsdauer von 1 Minute vorgenommen

wäre, sich $\tau . f_1 = f_\tau$ ergeben müsste, so kennt man durch Gleichung (4) die Quotienten $f'_\tau : f'_1$.

Nun hat aber beim Anwachsen des Potentials auf dem Electrometer eine Zerstreuung der Electricität an die Luft stattgefunden, und deshalb liest man in Wirklichkeit ein geringeres Potential ab, dessen Werth v_t aus Gleichung (1) erhalten wird, wenn man darin f' durch $\frac{1}{\tau} f'_\tau$ ersetzt. Daraus ergibt sich dann:

$$v_1 = v_\tau \frac{f'_1}{\frac{1}{\tau} f'_\tau} \frac{1-e^{-k}}{1-e^{-k\tau}} \tag{5}$$

und:

$$\frac{v_4}{v_2} = \frac{\frac{1}{4} f'_4}{\frac{1}{2} f'_2} \frac{1-e^{-4k}}{1-e^{-2k}}.$$

Nun sind die Quotienten $f'_4 : f'_2$ u. s. w. aus (4) berechenbar, man kann also aus der letzten Gleichung e^{-k} ermitteln, und hat dann alle Daten, um Beobachtungen bei beliebiger Isolirungsdauer auf solche, bei denen sie 1 Minute betrug, zu reduciren.

Den ganzen Einfluss der secundären Rückstandsbildung gibt allerdings Gleichung (5) noch nicht wieder, weil das an der innern Belegung jedesmal entstehende Potential nicht blos auf sich selbst, sondern auch auf alle folgenden wirkt und durch alle früheren beeinflusst wird, so zwar, dass es in Wirklichkeit etwas zu gross erscheint. Indessen ändert eine Berücksichtigung der secundären Rückstandsbildung durch die vorausgehenden Ladungen am Charakter des beobachteten Vorganges nichts mehr, und ich habe mich darauf beschränkt, bei einer einzigen Beobachtungsreihe auch diese Correctionen anzubringen, lediglich um ihren geringen Einfluss in Evidenz zu setzen. Die Formeln für diese Correctionen ergeben sich nach dem bisher Gesagten von selbst.

Wie man sieht, werden bei Anwendung der Formel (5) alle Werthe einer Beobachtungsreihe, mit einziger Ausnahme der durch Isolirung für 1 Minute gewonnenen, von dem Quotienten $\frac{v_4}{v_2}$ abhängig, der aus 6 Beobachtungen be-

rechnet wurde. Sollten diese mit erheblichen Fehlern behaftet sein, so würden fast alle Werthe der Reihe irrig werden. In der That ist auch ein solcher Fall vorgekommen, und ich werde ihn unter den Beobachtungsresultaten mittheilen, um zu zeigen, dass eine fehlerhafte Bestimmung von $\frac{v_4}{v_2}$ sich sofort bemerklich macht, dass also nicht zu befürchten ist, es könnten unerkannte Fehler in diesem Quotienten zu irrthümlichen Vorstellungen über den Verlauf der Strömung führen.

Endlich bedürfen noch die Zeitbestimmungen einer Besprechung. Was durch die Ablesungen am Electrometer gemessen wurde, ist die Electricitätsmenge:

$$P.\int_{t_0}^{t_1}(a+b\,t^{-m})\,d\,t,$$

welche auf der innern Belegung von der Zeit t_0 bis zur Zeit t_1 entwickelt wird. Durch die Correctionen ist der Mittelwerth, der sich daraus für die Dauer von 1 Minute ergibt, gefunden worden:

$$\frac{P}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}(a+b\,t^{-m})\,d\,t.$$

Es ist jetzt noch die Zeit t zu bestimmen, für die die Strömung diesen Werth besass. Das ergibt für t die Gleichung:

$$a+bt^{-m}=a+\frac{b}{t_1-t_0}\,\frac{t_1^{\,1-m}-t_0^{\,1-m}}{1-m},$$

aus der man:

$$t=\frac{t_1+t_0}{2}-\frac{t_1-t_0}{2}\left[\frac{m+1}{3!}\left(\frac{t_1-t_0}{t_1+t_0}\right)+\frac{\overline{m+1}\cdot\overline{m+2}\cdot\overline{m+3}}{5!}\left(\frac{t_1-t_0}{t_1+t_0}\right)^3+\cdots\right]$$
$$+\frac{1+m}{t_1+t_0}\left(\frac{t_1-t_0}{2}\right)^2\left[\frac{m+1}{3!}\left(\frac{t_1-t_0}{t_1+t_0}\right)+\frac{\overline{m+1}\cdot\overline{m+2}\cdot\overline{m+3}}{5!}\left(\frac{t_1-t_0}{t_1+t_0}\right)^3+\cdots\right]^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

findet. Die Abweichungen vom Mittelwerthe $\frac{t_1+t_0}{2}$ wurden aus dem auch für die anderen Correctionen benutzten vorläufigen Werthe von m berechnet. Nur für grössere Werthe von t konnten sie ganz vernachlässigt werden.

III.

Ich lasse nun die Beobachtungsresultate folgen. Sie sind an drei verschiedenen Flaschen erhalten, für die im ganzen neun Beobachtungsreihen gewonnen wurden. Aus dem jeder einzelnen Reihe beigegebenen Beobachtungsdatum ist ersichtlich, dass die Versuche sich über ein volles Vierteljahr erstreckten, und es wird vielleicht befremdlich erscheinen, dass in dieser langen Zeit nicht mehr Material herbeigeschafft wurde. Aber es mussten zahlreiche Reihen mitten im Versuche abgebrochen werden, weil sich Unregelmässigkeiten zeigten, die zum Theil, wie schon erwähnt, auf Schwankungen im Potential der Batterie zurückzuführen sind, zum Theil mit Sicherheit heftigen und anhaltenden Erschütterungen des Gebäudes zugeschrieben werden können. Es sind nur solche Reihen der weitern Bearbeitung unterworfen worden, bei denen die Beobachtung eine Stunde lang ohne wahrnehmbare Störungen durchgeführt worden war, weil kürzere Reihen für die Uebereinstimmung von theoretischen Entwickelungen mit der Beobachtung keinen hinreichenden Anhalt geben würden. Sehr fühlbar machten sich bei den Versuchen die Temperaturschwankungen. Wie sehr das electrische Verhalten des Glases von der Temperatur abhängt, ist zwar bekannt, ich hatte aber doch nicht erwartet, dass die Form der Strömungscurve so sehr von der Temperaturbewegung während der Beobachtungszeit abhängen würde, als es die Versuche ergaben. Leider war das Zimmer, in dem ich experimentirte, so klein, dass allein durch die Anwesenheit des Beobachters in einer Stunde die Temperatur um 0,2 Grad erhöht wurde. Mussten Flammen benutzt werden, um Uhr und Scala zu beleuchten, so erwärmte sich der Raum noch viel schneller. Ich half mir zuletzt so, dass ich die Thür des Zimmers Tag und Nacht weit geöffnet liess und so den geräumigen Corridor mit hinzuzog, auch wohl den Tag über ein Fenster des letztern öffnete, um des Abends bei sinkender Temperatur beobachten zu können. Die den Beobachtungsreihen beigefügten

Temperaturen wurden an Thermometern abgelesen, welche sich neben den Flaschen in den Trockenräumen befanden.

Da es sich zeigte, dass die Formel:

$$a + b\,t^{-m}$$

sich den Beobachtungen mit einigem Erfolge anpassen liess, so habe ich für alle Reihen die besten Werthe der drei Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Benutzung aller beobachteten Strömungswerthe ermittelt und die aus der Formel berechneten Zahlen neben die beobachteten gesetzt. Die Regelmässigkeit im Verlauf der Abweichungen zwischen beiden gibt den besten Maassstab für die Genauigkeit der Messungen. In den Tafeln findet man unter τ die Isolirungsdauer, unter t die berichtigte Zeit, beide in Minuten, unter i die corrigirten Werthe der Strömung. Die jeder Reihe vorausgehenden und folgenden Zahlen T sind die Temperaturen unmittelbar vor und nach dem Versuch, P ist die electromotorische Kraft der Batterie, wie i, a und b in Scalentheilen gemessen. Sie wurde von Zeit zu Zeit durch Vergleichung mit dem Normalelement bestimmt und für den Zeitpunkt der Beobachtung durch Interpolation berechnet.

Flasche 1. Bleihaltiges Glas von Warmbrunn, Quilitz & Co. Die Glassorte wird hauptsächlich zur Herstellung von Cüvetten und ähnlichen Gefässen benutzt, sie isolirt bedeutend besser, als das gewöhnlich zu Leydener Flaschen verwendete Glas.

8. Januar 1879.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ	τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,5	1,236	126,8	126,48	+0,32	2	23,9	25,39	25,07	+0,32
0,5	2,744	77,1	77,94	— 84	2	27	24,67	23,84	+ 83
1	4,485	58,85	58,62	+ 23	2	31	22,55	22,51	+ 4
0,5	6,247	48,9	48,74	+ 16	2	36	20,95	21,21	— 26
1	7,992	42,05	42,69	— 64	2	41	19,82	20,17	— 35
1	13,98	32,67	32,13	+ 54	2	46	19,10	19,32	— 22
1	16,5	30,25	29,69	+ 56	2	56	17,39	18,03	— 64
2	18,99	27,92	27,82	+ 10	2	66	16,93	17,07	— 14
1	21,5	26,30	26,30	00					

$P = 7996$ Scalentheile.

$m = 0{,}6665; \quad a = 8{,}76; \quad b = 135{,}57.$

$\frac{a}{P} = 0{,}001\,095; \quad \frac{b}{P} = 0{,}016\,955.$

6. Februar 1879. $T = 21{,}6^0$.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ	τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,5	0,7265	171,85	171,51	+0,34	2	27	25,73	25,30	+0,43
0,5	2,242	87,20	88,80	−1,60	2	30	24,39	24,22	+ 17
0,5	3,745	66,97	66,67	+0,30	2	33	23,46	23,31	+ 15
1	5,487	54,65	54,26	+ 39	2	36	22,63	22,52	+ 11
1	7,491	46,75	46,12	+ 63	2	39	21,86	21,83	+ 03
1	9,493	40,95	40,92	+ 03	2	42	21,14	21,23	− 09
1	11,494	37,35	37,25	+ 10	2	45	20,62	20,68	− 06
1	13,5	34,35	34,48	− 13	2	48	20,16	20,20	− 04
1	15,5	32,05	32,32	− 27	2	51	19,52	19,76	− 24
2	17,98	30,68	30,19	+ 49	2	55	18,69	19,24	− 55
2	20,99	28,41	28,18	+ 23	2	59	18,36	18,78	− 42
2	23,99	26,97	26,59	+ 38	2	63	17,94	18,36	− 42

$P = 6480$ Scalentheile. $\quad T = 21{,}7^0$.

$m = 0{,}6282; \quad a = 8{,}48; \quad b = 133{,}38.$

$\frac{a}{P} = 0{,}00131; \quad \frac{b}{P} = 0{,}02058.$

24. Februar. $T = 21{,}7^0$.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ	τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,5	0,7266	227,48	227,26	+0,22	2	23,989	33,18	32,33	+0,85
0,5	2,2423	116,40	116,65	− 25	2	27	31,19	30,54	+ 65
0,5	3,7454	86,07	86,82	− 75	2	30	29,57	29,06	+ 51
1	5,4875	69,65	70,02	− 37	2	34	27,50	27,41	+ 09
1	7,4909	58,85	59,00	− 15	2	38	25,99	26,06	− 07
1	9,4928	52,00	51,91	+ 09	2	42	24,86	24,92	− 06
1	11,494	47,10	46,89	+ 21	2	46	23,53	23,95	− 42
1	13,5	43,30	43,12	+ 18	2	50	22,79	23,10	− 31
1	15,5	40,45	40,17	+ 28	2	54	21,66	22,36	− 70
2	17,985	37,84	37,26	+ 58	2	58	21,12	21,69	− 57
2	20,987	35,18	34,50	+ 68	2	62	20,33	21,09	− 76

$P = 8518$ Scalentheile; $\quad T = 21{,}1^0$.

$m = 0{,}6193; \quad a = 7{,}07; \quad b = 180{,}68.$

$\frac{a}{P} = 0{,}000\,830; \quad \frac{b}{P} = 0{,}021\,212.$

17. März 1879. $T = 15{,}7^0$.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ	τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,5	0,7259	159,08	158,74	+0,34	2	26	19,35	19,11	+0,24
0,5	2,2422	75,83	77,24	−1,41	2	29	18,29	18,13	+ 16
1	3,9825	54,15	54,19	−0,04	4	32,966	17,20	17,06	+ 14
1	5,9883	42,52	42,46	+ 06	2	37	16,14	16,18	− 04
1	7,9912	36,45	35,90	+ 55	4	40,973	15,30	15,45	− 15
2	10,9744	30,63	30,02	+ 61	2	45	14,64	14,82	− 18
2	13,980	26,82	26,29	+ 53	4	48,977	14,00	14,29	− 29
2	16,9835	24,07	23,71	+ 36	4	54	13,35	13,72	− 37
2	19,986	22,02	21,79	+ 23	4	59	12,76	13,22	− 46
2	22,988	20,49	20,31	+ 18	4	64	12,23	12,80	− 57

$P = 6940{,}2$ Scalentheile; $T = 15{,}5^0$.

$m = 0{,}6710$; $a = 5{,}20$; $b = 123{,}84$.

$\frac{a}{P} = 0{,}000\,749$; $\frac{b}{P} = 0{,}017\,844$.

Zu diesen Tafeln ist zu bemerken, dass bei der ersten Reihe die Temperatur noch nicht bestimmt worden ist, die Flaschen wurden erst später mit Thermometern versehen. Die Reihe vom 17. März 1879 ist mit Berücksichtigung der Correctionen für die beiden, jeder Ablesung unmittelbar vorangehenden Ladungen berechnet. Um eine Vorstellung von ihrem Einfluss zu geben, setze ich die wirklich beobachteten Potentiale v hierher und daneben unter C_1 und C_2 den Betrag der Correctionen, welche durch die vorhergehende und nächstvorhergehende Ladung bedingt werden und von v zu subtrahiren sind.

τ	v	C_1	C_2	τ	v	C_1	C_2
0,5	77,5	—	—	2	36,8	0,20	0,05
0,5	37,0	0,06	—	2	34,8	19	05
1	52,2	05	0,03	4	63,4	24	07
1	41,05	11	01	2	31,0	49	03
1	35,2	09	03	4	56,5	21	21
2	58,0	08	03	2	28,1	43	02
2	51,0	30	02	4	51,7	19	19
2	45,8	26	07	4	49,5	54	03
2	41,9	24	06	4	47,4	52	11
2	39,0	22	06	4	45,4	50	11

Man wird bei den drei ersten Reihen die alternirenden Messungen zur Bestimmung von $v_4 : v_2$ vermissen. Dieselben sind bei ihnen erst 3 Stunden nach Beginn der Beobachtung vorgenommen worden.

Im unmittelbaren Anschluss an den Versuch vom 17. März 1879 stellte ich eine längere Reihe von Messungen an, um den Einfluss der Temperatur auf die stationäre Strömung zu bestimmen. Es wurde je am Morgen bei niedriger Temperatur, nachdem die Nacht hindurch die Corridorfenster geöffnet gewesen waren, und am Abend bei hoher, nachdem den ganzen Tag über zwei oder drei Gasflammen im geschlossenen Zimmer gebrannt hatten, beobachtet. Die Strömungswerthe wurden aus je 4 Messungen berechnet, denen 4 andere, die unbenutzt blieben, vorangegangen waren. Es zeigten sich nämlich öfters die ersten Messungen zu klein, vermuthlich durch grösseren Verlust von Electricität an die Isolatoren des Electrometers und der Wippen. Diese Versuchsreihe, bei der die Flasche zwei Wochen lang durch die Batterie geladen blieb, zeigte sich so verhängnissvoll für die electromotorische Kraft der letztern (sie sank von 111 auf 92 Daniell), dass ich von ähnlichen Beobachtungen an den anderen Flaschen absehen musste. Um die einzelnen erhaltenen Werthe vergleichbar zu machen, musste die starke Verminderung der Potentialdifferenz in Rechnung gebracht werden. Unter der Annahme, dass P proportional der Zeit abgenommen habe, wurde für jede Beobachtung das zugehörige P berechnet und das gefundene a dadurch dividirt. Die folgende Tafel enthält die gefundenen Werthe von $\frac{a}{P}$, unter T findet man die zugehörige Temperatur, welche aus mehreren Messungen das Mittel ist. Das Datum des Versuches habe ich beigefügt, um eine Controlle zu ermöglichen, wie weit die Resultate durch mangelhafte Bestimmung von P getrübt sein könnten.

Datum	T	$\frac{a}{P}$	berechnet	Δ
März 27.	9,375°	0,000 149	0,000 1772	−0,000 0282
„ 25.	12,000°	194	1890	+ 50
„ 26.	12,025°	184	1893	− 53
„ 30.	13,275°	234	2174	+ 166
„ 28.	16,925°	402	3808	+ 212
„ 31.	16,975°	414	3839	+ 301
„ 23.	21,775°	807	7863	+ 207
„ 24.	22,475°	859	8626	− 36
„ 27.	23,475°	927	9793	− 523
„ 25.	24,475°	0,001 079	0,001 1052	− 262
„ 30.	24,65 °	1 115	1 1281	− 131
„ 28.	25,45 °	1 230	1 2367	− 67
„ 26.	28,05 °	1 672	1 6298	+ 422

Die berechneten Werthe sind aus der Formel:

$$\{649 - 93{,}145\,T + 4{,}5672\,T^2\} : 10^6 \tag{6}$$

erhalten, die ich nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt habe, lediglich um eine Controlle darüber zu gewinnen, wie weit die Beobachtungsreihe einen regelmässigen Verlauf zeigt.

Flasche 2. Französisches Krystallglas, sehr gut isolirend.

16. Febr. 1879. $T = 21{,}1°$.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,5	0,7256	53,22	53,30	− 0,08
1	2,4713	22,95	22.41	+ 54
2	4,9427	13,03	13,70	− 67
4	8,8722	9,49	9,02	+ 47
2	12,978	6,28	6,86	− 58
4	16,933	5,62	5,66	− 04
2	20,986	4,84	4,84	00
4	24,955	4,31	4,26	+ 05
4	29,962	3,82	3,73	+ 09
4	34,967	3,35	3,32	+ 03
4	39,972	3,14	3,01	+ 13
4	44,975	2,92	2,76	+ 16
4	49,977	2,43	2,55	− 12
4	56	2,24	2,34	− 10
4	62	2,29	2,16	+ 13

$P = 7716$ Scalenth. $T = 20°$.
$m = 0{,}7031$; $a = -0{,}18$; $b = 42{,}68$.
$\frac{a}{P} = -0{,}000\,023$; $\frac{b}{P} = 0{,}005\,531$.

28. Febr. 1879. $T = 19{,}8°$.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,5	0,7244	50,46	50,28	+0,18
1	2,4698	19,15	20,24	−1,09
2	4,9397	12,82	12,33	+0,49
4	8,8655	8,24	8,25	− 01
2	12,977	7,26	6,43	+ 83
4	16,929	5,84	5,44	+ 40
2	20,986	4,99	4,77	+ 22
4	24,952	4,53	4,31	+ 22
4	29,960	4,20	3,89	+ 31
4	34,966	3,46	3,57	− 11
4	39,970	3,16	3,33	− 17
4	49,976	2,67	2,97	− 30
4	55	2,78	2,84	− 06
4	60	1,88	2,72	− 84
4	65	2,37	2,63	− 26

$P = 6701$ Scalenth. $T = 20°$.
$m = 0{,}7684$; $a = 1{,}07$; $b = 38{,}41$.
$\frac{a}{P} = 0{,}000\,160$; $\frac{b}{P} = 0{,}005\,732$.

24. März 1879. $T = 23{,}8^0$.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ	τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
1	0,9217	43,20	43,20	0,00	4	33,966	3,81	3,64	+0,17
2	3,9256	15,25	15,23	+ 02	4	38,970	3,39	3,35	+ 04
4	7,8530	9,46	9,39	+ 07	4	43,973	3,10	3,13	− 03
2	11,976	7,17	7,06	+ 11	4	48,976	2,86	2,94	− 08
4	15,927	5,75	5,85	− 10	4	54	2,76	2,78	− 02
2	19,985	4,88	5,05	− 17	4	59	2,73	2,65	+ 08
4	23,951	4,41	4,51	− 10	4	64	2,57	2,54	+ 03
4	28,960	4,05	4,01	+ 04					

$P = 6685$ Scalentheile. $T = 24^0$.

$m = 0{,}7406$; $a = 0{,}70$; $b = 40{,}01$.

$\frac{a}{P} = 0{,}000\,105$; $\frac{b}{P} = 0{,}005\,985$.

Die beiden ersten Reihen zeigen grössere Unregelmässigkeiten, die zum Theil ihren Grund darin haben, dass der Quotient $\frac{v_4}{v_2}$ bei ihnen aus zu kleinen Werthen v bestimmt ist. Er wurde für die Beobachtung vom 16. Februar 1,992, für die vom 28. Februar 1,784. Da sich bei Flasche 1 so grosse Abweichungen nie ergeben hatten, so habe ich es vorgezogen, aus den angeführten zwei Quotienten das Mittel zu nehmen, und dies der Berechnung der zwei Reihen zu Grunde zu legen. Bei der letzten Reihe habe ich dann infolge dieser Erfahrungen die Messungen zur Ermittelung von $\frac{v_4}{v_2}$ früher vorgenommen, dadurch erhielt ich in dem Grade sicherere Messungen, als die Potentiale noch grösser waren. Bei den Correctionen ist für diese Flasche die secundäre Rückstandsbildung unberücksichtigt geblieben, weil sie auch bei stärker Rückstand bildenden Flaschen nur geringen Einfluss übt. So ergab sich für Flasche 3, welche viermal so starke Strömung als die in Rede stehende zeigte (Beobachtung vom 10. April 1879):

$$v_1 = v_{\frac{1}{4}} . 3{,}8640 = v_{\frac{1}{2}} . 1{,}9545$$

oder

$$= v_{\frac{1}{4}} . 3{,}8185 = v_{\frac{1}{2}} . 1{,}9446,$$

je nachdem die secundäre Rückstandsbildung vernachlässigt wurde, oder nicht.

Die stationäre Strömung war bei Flasche 2 so gering, dass sie sich zwar nachweisen, aber kaum messen liess. So fanden sich gelegentlich für $\frac{a}{P}$ die folgenden Werthe:

$$\text{17. Februar} \quad \frac{a}{P} = 0{,}000\,033$$

$$\text{4. März} \quad = 0{,}000\,064,$$

der erstere 24 Stunden, der zweite vier Tage nach geschehener Ladung. Ich setze die Zahlen her, um eine ungefähre Vorstellung von der Ordnung der stationären Strömung zu ermöglichen, einen Werth als genaue Messungen besitzen sie nicht.

F l a s c h e 3. Sehr dünnwandiges Wasserglas aus leichtem böhmischem Glase.

10. April 1879. $T = 18{,}1^0$.

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ	τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,25	0,6179	218,80	218,69	+0,11	2	24,989	23,66	23,49	+0,17
0,5	1,7399	112,20	112,36	— 16	1	27,5	22,65	22,36	+ 29
0,5	3,2446	75,64	75,98	— 34	2	30	21,56	21,42	+ 14
0,5	4,7463	60,09	60,17	— 08	2	33	20,57	20,43	+ 14
1	6,4892	49,75	49,86	— 11	2	36	19,60	19,58	+ 02
1	8,4918	42,70	42,56	+ 14	2	40	18,71	18,62	+ 09
1	10,4934	37,80	37,67	+ 13	2	44	17,90	17,80	+ 10
1	12,4943	34,30	34,12	+ 18	2	48	16,77	17,10	— 33
1	15,5	30,55	30,27	+ 28	2	52	16,33	16,50	— 17
1	17,5	28,15	28,34	— 19	2	57	15,39	15,83	— 44
2	19,986	26,80	26,40	+ 40	2	62	14,71	15,26	— 55
1	22,5	25,10	24,80	+ 30					

$P = 5209$ Scalentheile; $T = 18^0$.

$m = 0{,}6667$; $a = 5{,}39$; $b = 154{,}73$.

$$\frac{a}{P} = 0{,}00103; \quad \frac{b}{P} = 0{,}029\,704.$$

Endlich mag hier eine Beobachtungsreihe an derselben Flasche vom 6. April 1879 Platz finden, die soweit einen regelmässigen Verlauf zeigte, dass ich sie der Berechnung unterzog. Nachdem aber alle Beobachtungen auf die Isolirungsdauer von 1 Minute reducirt, und behufs definitiver

Bestimmung der Constanten die Δ mit den genäherten Werthen $m = 0{,}67788$, $a = 8{,}28$, $b = 164{,}832$ berechnet waren, ergaben sich Unregelmässigkeiten, wie die folgende Tafel zeigt:

τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ	τ	t	i	$a+bt^{-m}$	Δ
0,25	0,6179	237,22	236,72	+0,50	2	28	25,99	25,50	+0,49
0,25	1,6223	124,80	127,02	−2,22	1	30,5	24,75	24,53	+ 22
0,5	2,7436	92,74	91,44	+1,30	2	33	23,31	23,69	− 38
0,5	4,2459	70,46	70,12	+0,34	1	35,5	22,65	22,93	− 28
1	5,9883	58,50	57,27	+1,23	2	38	22,07	22,27	− 20
1	8,4918	47,50	46,95	+0,55	2	41	21,43	21,58	− 15
1	10,4944	42,20	41,77	+ 43	2	45	20,35	20,76	− 41
1	15,5	33,30	33,99	− 69	2	49	19,36	20,07	− 71
2	17,984	32,86	31,52	+1,34	2	53	18,15	19,44	−1,29
2	22,988	28,62	27,96	+ 66	2	57	18,26	18,91	−0,65
1	25,5	26,75	26,63	+ 12	2	62	16,78	18,33	−1,55

Die Tafel zeigt, dass an allen Stellen, wo die Isolirungsdauer wechselte, Sprünge auftreten, und also der Quotient $\frac{v_2}{v_1}$, auf den sich die Correctionsrechnung stützt, fehlerhaft sein muss. Man sieht an diesem Falle, dass, und wie sich Fehler, welche in die Correctionsconstanten eingehen, sofort bemerkbar machen.

Der Anblick der mitgetheilten Tafeln zeigt, dass die Abweichungen der Formel $a + bt^{-m}$ von der Erfahrung grösser sind, als die Beobachtungsfehler. Dennoch lässt die Vergleichung von Rechnung und Beobachtung deutlich den Einfluss, den das Steigen oder Sinken der Temperatur während des Versuches auf die Strömungscurve hat, erkennen. Man ist nämlich offenbar berechtigt, auch für eine Formel wie die vorliegende bei zwei unter gleichen Umständen durchgeführten Versuchsreihen zu erwarten, dass die Rechnung in beiden Fällen dieselben Constanten ergäbe. Unter den vorstehenden befinden sich nun zwei Paar solcher Reihen, nämlich die 2. und 3. bei Flasche 1 und die beiden ersten bei Flasche 2; die zwei Reihen eines jeden Paares sind fast bei der nämlichen Temperatur er-

halten und unterscheiden sich nur dadurch, dass bei der einen die Temperatur gestiegen, bei der andern gesunken ist. Die Constanten sind aber nicht die gleichen, sondern für beide Flaschen ergibt sich bei sinkender Temperatur ein kleineres $\frac{a}{P}$ und m, für Flasche 2 verlangt die Rechnung sogar eine negative stationäre Strömung. Wenn hiernach die Form der Strömungscurve ohne Zweifel stark von Temperaturschwankungen beeinflusst wird, so dürfte es für Messungen, die allen Ansprüchen genügen sollen, unerlässlich sein, vollkommen constante Temperatur herzustellen.

Alle Versuche, die Beobachtungen auch auf Glasplatten auszudehnen, welche den grossen Vortheil bieten, dass sich bei ihnen Oberfläche der Belegungen und Dicke des Isolators genau ermitteln lassen, sind daran gescheitert, dass es mir nicht gelang, hinreichend gut isolirendes Tafelglas zu erhalten. Es wird nämlich für gut leitendes Glas bei dem angewandten Verfahren eine aüsserordentlich kurze Isolirungsdauer nöthig, die mit der Hand nicht hergestellt werden kann. Ziemlich gut gelang das dagegen mit einem sehr constant arbeitenden electromagnetischen Maschinchen von Siemens' Construction, durch welches die innere Belegung in 5 Minuten ungefähr 1000 mal mit der Erde und eben so oft mit dem Electrometer verbunden wurde, sodass die Nadel des letztern eine gleichmässige Ablenkung zeigte. Die Messungen boten aber für die Betrachtung des Rückstandes nur geringes Interesse, weil sich zeigte, dass der Rückstand bildende Strom sehr gegen den stationären zurück trat. Nur in der allerersten Zeit tritt er deutlicher hervor, und da werden Messungen durch die Schwingungen der Nadel vereitelt. Um diese Verhältnisse zu veranschaulichen, lasse ich im Auszuge eine Beobachtungsreihe an einer Platte folgen, welche allein durch die stationäre Strömung in 1 Minute mehr als $^9/_{10}$ der Ladung verloren haben würde. Bei Beginn des Versuches war das Electrometer zur Erde abgeleitet, $^1/_{16}$ Minute darauf wurde

es isolirt. Dann wurden, von der Ruhelage der Nadel aus gerechnet, die Umkehrungspunkte:

175,2 100,4
115,7 105,3

beobachtet, und später die folgenden Ablenkungen, bei denen t die seit der Ladung verstrichene Zeit in Minuten (m) und $\frac{1}{60}$ Minuten (s) angibt:

t	J	t	J
0ᵐ 60ˢ	100,2	13ᵐ	93,8
1 60	97,5	28	93,1
3 —	95,3	39	91
4 —	95,0	51	89,9

Da während dieser Zeit sich die Rotationsgeschwindigkeit des Maschinchens um $1^1/_2$ Proc. vergrössert hatte, so sind die beobachteten Werthe gegen das Ende hin in demselben Verhältniss zu klein ausgefallen, und wird also durch die vorstehenden Zahlen die Abnahme der Strömung immer noch erheblicher dargestellt, als sie in Wirklichkeit war.

IV.

Ich wende mich nun zur Vergleichung der Riemann'schen Hypothese mit der Erfahrung: Riemann selbst hat aus ihr einen Ausdruck[1]) abgeleitet, durch den die Werthe der halben Potentialdifferenz an den Belegungen berechnet werden können, wenn die zuströmenden Electricitätsmengen gegeben sind. Führte man in diese Formel den beobachteten Verlauf der Strömung ein, so müsste der Ausdruck constant werden. Ich glaube aber nicht, dass es möglich sein würde, auf diesem Wege die Constanten, welche in den Gleichungen vorkommen, zu bestimmen.

Indessen lassen sich die Differentialgleichungen nach bekannten Methoden für die Bedingung constanter Potentialdifferenz zwischen den Belegungen einer Franklin'schen Tafel integriren. Denkt man die x-Axe so gelegt, dass

1) Riemann, Gesammelte mathematische Werke, p. 353.

sie senkrecht zu den Belegungen steht, so sind die Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial t} = p^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

für das Innere des Isolators und:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

für seine Oberfläche, wobei V das Potential im Punkte x bedeutet, p und q zwei Constanten. Die Stromintensität ist proportional:

$$p^2 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - q^2 \frac{\partial V}{\partial x}$$

und für die Oberfläche nach Gleichung (B) proportional:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}.$$

Zu den Gleichungen (A) und (B) kommen für den experimentell untersuchten Fall noch die folgenden, in denen d die halbe Dicke des Isolators, c die halbe Potentialdifferenz bezeichnen möge:

$$\text{(C)} \qquad V = \begin{cases} +c, & x = +d, \\ -c, & x = -d, \end{cases}$$

$$\text{(D)} \qquad V = \frac{cx}{d}; \qquad t = 0.$$

Was zunächst die Lösung für den stationären Zustand betrifft, so ist diese:

$$V_\infty = Rx + S\left(e^{\frac{qx}{p}} - e^{-\frac{qx}{p}}\right).$$

R und S ergeben sich aus den beiden Bedingungsgleichungen (B) und (C). Setzt man dann für die allgemeine Lösung:

$$V = Rx + S\left(e^{\frac{qx}{p}} - e^{-\frac{qx}{p}}\right)$$
$$+ \sum_1^\infty {}_r A_r \left(x + D_r \sin \frac{h_r x}{d}\right) e^{-\left(q^2 + \frac{p^2 h_r^2}{d^2}\right) t},$$

so genügt das zunächst der Gleichung (A), ferner werden (B) und (C) erfüllt, wenn:

$$\left[1+\frac{h_r}{d}D_r\cos\frac{h_r x}{d}\right]_{x=\pm d}=0, \qquad \left[x+D_r\sin\frac{h_r x}{d}\right]_{x=\pm d}=0,$$

woraus für h_r die transcendente Gleichung:

$$h_r = \operatorname{tg} h_r \tag{7}$$

folgt, und sich D_r als Function von h_r bestimmen lässt:

$$D_r = -\frac{d}{\sin h_r}.$$

Es bleibt noch die Bedingung (D) zu erfüllen. Sie ergibt:

$$\frac{cx}{d} = Rx + S\left(e^{\frac{qx}{p}} - e^{-\frac{qx}{p}}\right) + \sum_1^\infty {}_r A_r\left(x + D_r\sin\frac{h_r x}{d}\right)$$

und ist erfüllt, wenn:

$$D_r A_r \int_{-d}^{+d}\left(\sin\frac{h_r x}{d}\right)^2 dx = \int_{-d}^{+d} f(x)\sin\frac{h_r x}{d}\,dx,$$

wo:
$$f(x) = \left(\frac{c}{d} - R\right)x - S\left(e^{\frac{qx}{p}} - e^{-\frac{qx}{p}}\right)$$

zu setzen ist. Die Integrale auf beiden Seiten lassen sich durch partielle Integrationen ermitteln, und es kommt unter Berücksichtigung des Werthes von S schliesslich:

$$A_r = -\frac{2c}{dh_r^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{d^2}{h_r^2}\frac{q^2}{p^2}},$$

also:
$$V = Rx + S\left(e^{\frac{qx}{p}} - e^{-\frac{qx}{p}}\right)$$

$$-\sum_1^\infty {}_r\frac{2c}{dh_r^2}\frac{1}{1+\frac{d^2}{h_r^2}\frac{q^2}{p^2}}\left(x - \frac{d}{\sin h_r}\sin\frac{h_r x}{d}\right)e^{-\left(q^2+\frac{p^2h_r^2}{d^2}\right)t}.$$

Um die Strömung zu finden, hat man $\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}$ zu bilden:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = \frac{q^3}{p^3}S\left(e^{\frac{qx}{p}} + e^{-\frac{qx}{p}}\right) - \sum_1^\infty {}_r\frac{2c}{d^3}\frac{h_r}{1+\frac{d^2}{h_r^2}\frac{q^2}{p^2}}\cdot\frac{\cos\frac{h_r x}{d}}{\sin h_r}e^{-\left(q^2+\frac{p^2h_r^2}{d^2}\right)t}.$$

Für die Oberfläche ergibt das:

$$\text{(I)}\quad J = \frac{q^3}{p^3}\, S\left(e^{\frac{qd}{p}} + e^{-\frac{qd}{p}}\right) - \frac{2c}{d^3}\sum_1^\infty{}_r \frac{1}{1+\frac{d^2}{h_r^2}\frac{q^2}{p^2}}\cdot e^{-\left(q^2+\frac{p^2 h_r^2}{d^2}\right)t}.$$

Diese Function von t müsste nun, mit einer passenden Grösse Q multiplicirt, die beobachteten Strömungswerthe darzustellen im Stande sein, sodass:

$$i = Q\,.\,J$$

würde, wenn man die Constanten p, q, Q passend wählt. Um die Rechnung zu vereinfachen, will ich zuerst die Coëfficienten:

$$\frac{1}{1+\frac{d^2}{h_r^2}\frac{q^2}{p^2}}$$

durch 1 ersetzen. Die so erhaltene Function:

$$\text{(II)}\qquad J_1 = \frac{q^3}{p^3}\cdot S\left(e^{\frac{qd}{p}} - e^{-\frac{qd}{p}}\right) - \frac{2c}{d^3}\, e^{-q^2 t}\sum_1^\infty{}_r\, e^{-\frac{p^2 h_r^2}{d^2}t}$$

hat nur dann mit J nahezu gleiche Werthe, wenn $\frac{d^2 q^2}{p^2}$ klein wird, ob das aber wirklich der Fall sei, wird sich erst nachträglich aus den numerischen Rechnungen ergeben. Zwar hat schon Riemann gezeigt, dass q^2 $\left(\text{bei ihm } \frac{1}{\alpha}\right)$ klein sein müsse, da er aber für $\frac{p^2}{d^2}$ $\left(\text{dort } \frac{\beta\,.\,\beta}{a\,.\,a\,.\,\alpha}\right)$ aus den Messungen von R. Kohlrausch $\frac{1}{2000}$ findet, so könnte $\frac{d^2 q^2}{p^2}$ immerhin einen merklichen Werth haben, und deshalb muss J_1 als eine ganz neue Function betrachtet werden. Man kann bequemer schreiben:

$$\text{(II}_\text{a})\qquad Q\,.\,J_1 = a + b e^{-lt} F_t,$$

wo: $F_t = \sum_1^\infty{}_r\, e^{-h_r^2 m^2 t}$, und $m^2 = \frac{p^2}{d^2}$ ist.

Um die Formel (II_a) mit der Beobachtung zu vergleichen, wähle ich die Versuchsreihe vom 17. März, Flasche 1, die einen sehr regelmässigen Verlauf zeigt und

mit allen Correctionen berechnet ist. Wenn die Vergleichung ein entscheidendes Resultat ergeben soll, genügt es nicht, von irgend welchen Werthen der Constanten ausgehend ein Werthsystem derselben zu berechnen, für welches die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird, weil man nicht sicher sein kann, dass nicht noch andere Minima existiren, für welche die Formel besser mit der Beobachtung übereinstimmt, als für das zufällig gefundene. Es kommt deshalb darauf an, zunächst einen Ueberblick über das ganze Gebiet der Constanten zu gewinnen. Zu dem Ende habe ich die drei Werthe der Strömung:

$$i_1 = 158{,}08 \qquad t_1 = 0{,}7259$$
$$i_2 = 37{,}45 \qquad t_2 = 7{,}9912$$
$$i_3 = 11{,}23 \qquad t_3 = 64$$

herausgegriffen und versucht, durch welche Werthe der Constanten sie sich darstellen lassen. Ich bemerke übrigens, dass die hier benutzten Werthe i von den beobachteten je um eine Einheit abweichen, derart, dass i_1 und i_3 um 1 kleiner gesetzt sind, i_2 um 1 grösser, als sie wirklich gefunden wurden, weil es sich zeigte, dass die Formel grössere Mittel-, kleinere Anfangs- und Endwerthe verlangt. Dabei ist von vornherein eine Abweichung zwischen der Formel und der Beobachtung zugegeben von einer Grösse, die selbst bei der empirischen Formel nicht vorkommt, man wird aber sehen, dass auch diese Grenze noch überschritten werden wird.

Die 4 Constanten der Gleichung (IIa), a, b, l, m, sind nicht unabhängig voneinander, da sie Functionen von c, d, p, q, Q sind, und c und d gegebene Grössen sind, sodass nur p, q und Q zu bestimmen sein würden. Ich habe es aber vorgezogen, für die numerische Rechnung a, b, l, m als 4 unabhängige Constanten zu betrachten. Sollte sich finden, dass es für sie ein Werthsystem gibt, durch welches die beobachteten Strömungswerthe dargestellt werden, so würde die weitere Frage entstehen, ob dies Werthsystem mit der Art, wie a, b, l, m voneinander abhängen, verträg-

lich sei. Für die stationäre Strömung a ergibt freilich Formel (6) mit ziemlicher Genauigkeit den Betrag 2,13, um aber der Function J_1 die denkbar günstigsten Bedingungen für ein Anschmiegen an den beobachteten Gang der Strömung zu gewähren, habe ich auch a als noch durch die Rechnung zu bestimmende Grösse freigegeben und nur Werthe von a, die grösser als 10 sind, nicht mehr berücksichtigt, weil der letzte beobachtete Werth von i 12,23 ist, und man also die Beobachtung nur wenige Minuten weiter hätte auszudehnen brauchen, um Werthe von i zu erhalten, die sich von 10 nur wenig unterschieden hätten.

Wenn $Q.J_1$ die Werthe i_1, i_2, i_3 für t_1, t_2, t_3 resp. annehmen soll, so muss sein:

$$\frac{i_1 - a}{i_2 - a} - \frac{F_1}{F_2} \cdot e^{l(t_2 - t_1)} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{i_3 - a}{i_2 - a} - \frac{F_3}{F_2} e^{-l(t_3 - t_2)} = \varphi = 0\,. \tag{9}$$

Legt man a und m willkürliche Werthe bei und berechnet l aus (8), so wird (9) im allgemeinen nicht erfüllt sein, sondern die linke Seite wird einen von 0 verschiedenen Werth φ annehmen. Um zu sehen, ob und wo es Werthepaare a, m gibt, für welche φ verschwindet, ist die folgende Tafel entworfen, welche die Grösse φ für äquidistante Werthe von a und m gibt. Das m, zu dem irgend ein φ der Tafel gehört, findet sich am Kopf der betreffenden Columne, das a am Eingang der Zeile. Die beiden Zahlen unter jedem m sind die bezüglichen Quotienten $F_1 : F_2$ und $F_3 : F_2$, die unter jedem a die Quotienten $(i_1 - a) : (i_2 - a)$ und $(i_3 - a) : (i_2 - a)$.

Die einzelnen Zeilen sind bei dem ersten Werthe von φ abgebrochen, der mit Hülfe eines negativen l gebildet ist. Der Anblick der Tafel zeigt, dass es unmöglich wäre, die drei i durch J_1 wiederzugeben, wenn man an dem durch Beobachtung gewonnenen Werthe von a oder ihm benachbarten festhalten wollte, dass man sich bei grösser werdendem a zwar einer Lösung der Gleichung $\varphi = 0$ nähert,

$m =$	0 3,3180 0,3534	0,005 3,4409 0,32035	0,01 3,5701 0,28623	0,015 3,7131 0,25124	0,02 3,8688 0,2157	0,025 4,0395 0,1802	0,03 4,2268 0,1454	0,035 4,4335 0,1123	0,04 4,6616 0,0822	0,045 4,9154 0,0566	0,05 5,1967 0,0364	0,055 5,5120 0,0219
$a = 0$ 4,2211 0,2999	+0,2447	+0,2336	+0,2212	+0,2064	+0,1897	+0,1715	+0,1530	—	—	—	—	—
$a = 2$ 4,4028 0,2604	2205	2125	2035	1929	1808	1676	1542	+0,1419	—	—	—	—
$a = 4$ 4,6063 0,2161	1879	1823	1760	1684	1599	1506	1412	1325	+0,1260	—	—	—
$a = 6$ 4,8356 0,1663	1469	1431	1387	1335	1277	1213	1148	1088	1043	+0,1021	—	—
$a = 8$ 5,0961 0,1097	0968	0942	0913	0878	0839	0797	0753	0713	0684	0669	+0,0674	—
$a = 10$ 5,3945 0,0448	0365	0348	0329	0307	0282	0254	0226	0200	0181	0172	0175	+0,0189

dass sie aber selbst für $a = 10$ noch nicht erreicht wird. Es müsste auch dann noch i_1 oder i_3 kleiner, oder i_2 grösser sein. Am günstigsten gestalten sich nach der Tafel die Verhältnisse für $a = 10$, $m = 0{,}045$, wo $\varphi = 0{,}0172$ wird, aber auch da müsste i_3 noch immer um mehr als 0,4 Scalentheile vermindert werden, also im ganzen gegen den beobachteten Werth um 1,4. Wollte man aber auch das noch zugeben, und berechnete man mit dem zugehörigen Werthe von l:

$$\frac{i_4 - a}{i_2 - a} = \frac{F_4}{F_2} e^{-l(t_4 - t_2)}$$

für $i_4 = 18{,}29$, $t_4 = 29$, so würde sich der Werth 0,1039 ergeben, während $(i_4 - a):(i_2 - a) = 0{,}3020$ ist, also fiele der berechnete Werth für t_4 um 3 Scalentheile zu klein aus; eben so würde er für $t < t_2$ beträchtlich zu gross werden.

Demnach kann durch J_1 der Verlauf der Strömung nicht dargestellt werden, weil es, wenn man die Constanten so bestimmt, dass J_1 den Werthen am Anfang der Reihe genügt, für die letzten viel zu klein wird. Wäre bei Herstellung der Tafel für i_2 ein Werth näher dem Anfange der Reihe gewählt worden, so würde die Abweichung bei i_3 noch viel auffallender hervorgetreten sein. Man könnte dies Verhalten von J_1 gegen die Beobachtungen auch so ausdrücken, dass man sagt, J_1 nimmt für kleine t nicht schnell genug ab mit zunehmender Zeit. Uebrigens zeigt schon die empirische Formel ein ähnliches Verhalten, obgleich sie für $t = 0$ wie $t^{-0{,}67}$ unendlich wird, während J_1 nur unendlich wird wie $t^{-0{,}5}$.

Es fragt sich nun, ob die Function J, Geichung (II), welche die strenge Lösung der Riemann'schen Gleichungen enthält, die Strömung besser darstellt? Es ist das zu verneinen, denn J wird für $t = 0$ von derselben Ordnung unendlich, wie J_1. Etwas genauer kann man sich die Art, in der J von den Beobachtungen abweichen würde, auf folgende Art verdeutlichen. Die Coëfficienten:

$$\frac{1}{1 + \frac{d^2}{h_r^{\,2}} \cdot \frac{q^2}{p^2}}$$

sind alle kleiner als 1, nähern sich aber mit wachsendem r schnell diesem Werth, da h_r^2 gross wird. Vergleicht man also die Werthe von J und J_1 für das gleiche l und m miteinander, so werden diese für kleine t, bei denen eine grosse Anzahl von Exponentialfunctionen $e^{-m^2 h_r^2 t}$ zu summiren ist, relativ wenig verschieden sein, beträchtlich kleiner dagegen wird J gegen J_1 ausfallen für grössere t, bei denen F aus den drei bis sechs ersten Gliedern der Reihe gebildet wird, welche bei J in kleinere Coëfficienten multiplicirt sind. Denkt man sich nun l und m so bestimmt, dass J_1 sich der Beobachtung für kleine t anschliesst, so würde das auch noch J thun, für grössere t würde dagegen $J < J_1$ werden, mithin um so mehr von den Beobachtungen abweichen, als schon J_1 zu klein ist.

Die numerische Vergleichung ergibt also, dass die Folgerungen aus den Riemann'schen Gleichungen mit den Beobachtungen nicht in Uebereinstimmung sind. Ich bemerke, dass die Reihe vom 17. März nicht die einzige ist, die ich durch J_1 darzustellen versucht habe, dass aber in allen Fällen die Abweichungen im nämlichen Sinne und in gleicher Stärke sich zeigten. Aber schon die Vergleichung mit dieser einen Reihe ist entscheidend, um so mehr, als die Beobachtung bei sinkender Temperatur vorgenommen wurde, und dadurch die letzten beobachteten Werthe besonders stark verkleinert, also zu Gunsten der Formel abgeändert sein müssen.

V.

Es ist möglich, dass die Gleichung (A) für das Innere des Isolators zu Folgerungen führt, die besser mit der Erfahrung übereinstimmen, wenn man die Grenzbedingung $\frac{\partial V}{\partial N} = 0$ durch eine andere ersetzt.

Herr Geheimrath Helmholtz hatte die Güte, mir die folgende Lösung der Riemann'schen Differentialgleichung mitzutheilen, welche er erhalten hat unter Anwendung des Riemann'schen Gesetzes auf beide in Berührung befindliche

Körper, Metall und Isolator, und unter der Annahme, dass die Electricität nur bis zu sehr geringer Tiefe in den Isolator eindringe, sodass man berechtigt ist, die Mittelebene einer unendlichen, der yz-Ebene parallelen Glasplatte, deren eine Grenzfläche $x = 0$ ist, bei $x = \infty$ anzunehmen. Setzt man:

$$-4\pi\varepsilon = \Delta V(1 + 4\pi k),$$

so lässt sich das Riemann'sche Gesetz schreiben:

(Aa) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = l q^2 \Delta \varepsilon - l \varepsilon$$

oder:

(Ab) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \lambda \Delta (V + \mathfrak{q}\varepsilon),$$

wo k die Constante der dielectrischen Polarisation bedeutet, die Grössen l, q, λ, $\mathfrak{q}$ miteinander durch die Relationen:

$$l = \frac{4\pi\lambda}{1 + 4\pi k}; \qquad q^2 = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi}\mathfrak{q}$$

verbunden und alle vorkommenden Grössen mit dem Index 1, resp. 2 zu versehen sind, je nachdem sie sich auf das Metall oder den Isolator beziehen.

Wenn für die Grenzfläche angenommen wird, dass dort weder electromotorische Kräfte noch Flächenbelegungen vorhanden sind, so muss an ihr:

(E) $$V_1 = V_2$$

(Ea) $$(1 + 4\pi k_1)\frac{\partial V_1}{\partial N_1} + (1 + 4\pi k_2)\frac{\partial V_2}{\partial N_2} = 0$$

sein. Dazu wird noch die Grenzbedingung genommen, dass $V + \mathfrak{q}\varepsilon$ an der Grenze stätig sein soll, also wegen (E) auch:

(Eb) $$\mathfrak{q}_1 \varepsilon_1 = \mathfrak{q}_2 \varepsilon_2 .$$

Die Grenzbedingungen (Ea) und (Eb) lassen sich umformen, wenn man berücksichtigt, dass für Metalle λ sehr gross, und deshalb für sie die Riemann'sche Gleichung:

(Ac) $$q^2 \Delta \varepsilon - \varepsilon = 0$$

ist, also im vorliegenden Falle, wo V nur von x allein abhängt, für das Metall:

$$\varepsilon_1 = A \cdot e^{\frac{x+\xi}{q_1}}$$

$$V_1 = -\frac{4\pi}{1+4\pi k_1} \cdot A \cdot q_1{}^2 e^{\frac{x+\xi}{q_1}}\,; \qquad \frac{\partial V_1}{\partial N_1} = \frac{4\pi}{1+4\pi k_1} A\, q_1\, e^{\frac{x+\xi}{q_1}}\,.$$

Dies in (Ea) eingesetzt gibt:

$$\frac{\partial V_2}{\partial N_2} = -\frac{4\pi}{1+4\pi k_2} A\, q_1\, e^{\frac{x+\xi}{q_1}}$$

und in (Eb) eingesetzt:

$$\mathfrak{q}_2\, \varepsilon_2 = \mathfrak{q}_1\, A\, e^{\frac{x+\xi}{q_1}}$$

also:

$$\frac{\partial V_2}{\partial N_2} = -\,\varepsilon_2 \frac{\mathfrak{q}_2}{\mathfrak{q}_1} \cdot \frac{4\pi}{1+4\pi k_2}\, q_1$$

oder für den vorliegenden Fall:

$$\text{(Ec)} \qquad \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\mathfrak{q}_2}{\mathfrak{q}_1} \cdot q_1 \cdot \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = 0\,.$$

Diese Relation, in welcher nur noch V_2 vorkommt, ersetzt unter der fürs Metall gemachten Annahme die Gleichungen (Ea) und (Eb).

Die Aufgabe kommt nun darauf hinaus, eine Function φ zu bestimmen, welche für positve x der Differentialgleichung:

$$\text{(Ad)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

genügt, für $x = \infty$ verschwindet und für $x = 0$:

$$\text{(Ed)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = b\, \varphi$$

erfüllt. Diese neue Function φ entspricht, von einer Exponentialfunction der Zeit abgesehen, dem ersten Differentialquotienten von V nach x.

Eine particuläre Lösung von (Ad) ist:

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,,$$

also ist auch eine Lösung:

$$\varphi_1 = \frac{A}{\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{b\xi} e^{-\frac{(\alpha+x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$$

$$= \frac{A}{\sqrt{t}} e^{b(\alpha+x)+b^2a^2t} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\left[\frac{\xi-\alpha-x}{2a\sqrt{t}} - ba\sqrt{t}\right]^2} d\xi$$

$$= 2aAe^{b(\alpha+x)+b^2a^2t} \int\limits_{-\infty}^{-\left(\frac{\alpha+x}{2a\sqrt{t}} + ba\sqrt{t}\right)} e^{-y^2} dy.$$

Für diese Lösung von (Ad) hat man:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = b\varphi_1 - \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{2a^2t}}.$$

Setzt man nun:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{B}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4a^2t}} + \frac{B}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4a^2t}},$$

so ist für $x = 0$:

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_1 + \frac{2B}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}; \qquad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = b\overline{\varphi}_1 - \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}},$$

und wenn:

$$2Bb = -A$$

ist, so hat man die Grenzbedingung (Ed) erfüllt. Diese Function φ hat die weitere Eigenschaft, dass sie für $t = 0$ und positive x verschwindet, ausgenommen allein den Punkt $x = \alpha$, und wenn man setzt:

$$\Phi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Psi_\alpha \left(e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4a^2t}}\right) d\alpha$$

$$- \frac{b}{a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Psi_\alpha \, d\alpha \int\limits_{-\infty}^{0} e^{b\xi - \frac{(\xi-x-\alpha)^2}{4a^2t}} d\xi,$$

so ist dies eine Superposition von Lösungen φ, welche für $t = 0$ und positive x:

$$\Phi = \Psi_x$$

ergibt, also alle vorgeschriebenen Anfangswerthe darstellen kann und für $x = 0$ der Grenzbedingung (Ed) Genüge leistet. Im vorliegenden Falle ist für Ψ_a die Function zu setzen, welche der Vertheilung der Electricität im stationären Zustande entsprechend für $t = \infty$ sich für Φ ergibt:

$$\Psi_a = B e^{-\frac{a}{q}}.$$

Durch diese Betrachtungen erhält man für die Strömung durch die Oberfläche $x = 0$ einer Franklin'schen Tafel den Ausdruck:

$$\text{(III)} \qquad J = A + B e^{-lt} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{gl}\, e^{glt} \int_{\sqrt{glt}}^{\infty} e^{-y^2} dy \right\},$$

in welchem l das Leitungsvermögen des Isolators misst, und die Grösse g eine von der Natur der Körper abhängige Constante ist. Ganz analog dem im vorigen Paragraphen gefundenen lässt sich dieser Ausdruck in die Form:

$$\text{(IIIa)} \qquad QJ = a + b e^{-lt} F_t$$

bringen, wenn man:

$$F_t = \frac{1}{2m\sqrt{t}} - e^{(m\sqrt{t})^2} \int_{m\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2} dy, \qquad m = \sqrt{gl} \quad \text{setzt.}$$

Für die numerische Rechnung konnten die Tafeln der Function:

$$e^{t^2} \int_t^{\infty} e^{-y^2} dy,$$

welche Kramp in seiner „Analyse des réfractions astronomiques" gegeben hat, benutzt werden. Auch den Ausdruck (IIIa) habe ich mit der Beobachtungsreihe vom 17. März verglichen, und zwar zunächst ganz in derselben Weise, wie es oben geschehen ist mit den drei Werthen:

$$\begin{aligned} i_1 &= 159{,}08 & t_1 &= 0{,}7259 \\ i_2 &= 36{,}45 & t_2 &= 7{,}9912 \\ i_3 &= 12{,}23 & t_3 &= 64 \end{aligned},$$

indem ich zunächst wieder die durch Gleichung (8) und (9) definirten Grössen φ berechnete; sie sind in der nachstehenden Tafel zusammengestellt.

$m =$	0 3,3180 0,3534	0,02 3,5543 0,2969	0,04 3,7981 0,2538	0,06 4,0538 0,2204	0,08 4,3074 0,1941	0,1 4,5722 0,1730	0,12 4,8431 0,1560	0,14 5,1119 0,1420	0,16 5,4020 0,1305	0,18 5,6893 0,1208
$a = 0$ 4,3643 0,3355	+0,2928	+0,2745	+0,2486	+0,2107	+0,1601	+0,0878	—	—	—	—
$a = 2$ 4,5597 0,2970	2665	2535	2350	2080	1718	1203	—	—		—
$a = 4$ 4,7791 0,2536	2324	2233	2104	1916	1665	1306	+0,0808	—		—
$a = 6$ 5,0273 0,2046	1902	1841	1754	1627	1456	1214	0876	+0,0431	—	—
$a = 8$ 5,3107 0,1487	1393	1353	1296	1212	1101	0941	0720	0429	−0,0001	—
$a = 10$ 5,6363 0,0843	0784	0758	0722	0669	0599	0498	0358	0174	−0,0098	−0,0456

Es gibt also für Werthe von m zwischen 0,14 und 0,18 zugehörige Werthepaare a, l, für die φ verschwindet. Da dies das einzige Gebiet der Constanten ist, für welches die drei herausgegriffenen Werthe i durch die Formel darstellbar sind, so kommt auch nur dies Gebiet für die Darstellung der ganzen Reihe in Betracht, und es ist nun berechtigt, von irgend welchen Werthen, die ihm angehören, ausgehend, nach der Methode der kleinsten Quadrate das Minimum der Fehlerquadratsumme aufzusuchen. Ich habe mich darauf beschränkt, der Rechnung fünf Werthe von i zu Grunde zu legen, indem ich zu den drei bisher benutzten noch:

$$\begin{array}{ll} i = 54{,}15 & t = 3{,}9825 \\ 22{,}02 & 19{,}9859 \end{array}$$

hinzunahm. Es wären dann vier Gleichungen zu lösen gewesen, in denen die Aenderungen von a, b, l, m als Unbekannte aufgetreten wären. Da aber für $t = 64$ die Aenderung von e^{-lt}, wenn l um λ wächst, nicht mehr gut als lineare Function von λ dargestellt werden kann, so hätte sich die Lösung der vier Gleichungen sehr complicirt gestaltet. Daher habe ich es vorgezogen, für willkürliche Werthe l diejenigen Werthsysteme a, b, m zu berechnen, welche bei der jedesmal über l gemachten Annahme die kleinste Fehlerquadratsumme ergaben. Auf diese Weise werden a, b, m und $\Sigma\Delta^2$ Functionen von l, und man kann einen Ueberblick über ihren Verlauf gewinnen. Speciell würde der Werth von l, für den $\Sigma\Delta^2$, als Function von l betrachtet, ein Minimum wird, in Verbindung mit den zugehörigen Grössen a, b, m die beste Darstellung der i durch die Formel geben.

Es wurden für $l = 0$ und $l = 0{,}02$ die in den folgenden Tafeln niedergelegten Resultate erhalten:

$l = 0$
$m = 0{,}18853 \quad a = 10{,}05$
$b = 62{,}884$

i	$a + be^{-lt} F$	Δ
159,08	158,88	+0,20
54,15	55,44	−1,29
36,45	35,66	+0,79
22,02	20,90	+1,12
12,23	13,05	−0,82

$\Sigma \Delta^2 = 4{,}24$

$l = 0{,}02$
$m = 0{,}16874 \quad a = 12{,}56$
$b = 54{,}59$

i	$a + be^{-lt} F$	Δ
159,08	158,85	+0,23
54,15	55,69	−1,54
36,45	35,45	+1,00
22,02	20,43	+1,59
12,23	13,50	−1,27

$\Sigma \Delta^2 = 7{,}56$

Obgleich hier nur fünf Werthe i dargestellt werden sollen, zeigen sich doch in beiden Fällen grössere Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung, als bei der empirischen Formel für alle 20 Werthe. Man sieht ferner, dass das Minimum von $\Sigma \Delta^2$, wenn ein solches für positive l überhaupt existirt, zwischen $l = 0$ und $l = 0{,}02$ zu suchen ist. Wenn sich aber ein solches auch nachweisen liesse, so würde doch das zugehörige $a > 10$ werden, da $a = 12{,}56$ für $l = 0{,}02$ und $a = 10{,}05$ für $l = 0$, und also eine Darstellung der Reihe durch die Formel zur Annahme eines Werthes für die stationäre Strömung führen, der von dem durch Beobachtung ermittelten um mehr als dessen dreifachen Betrag abweicht. Es wäre freilich noch denkbar, dass für ein l zwischen 0 und 0,02 a kleiner würde, dass dort ein Minimum dieser Grösse läge, ich habe mich aber vom Gegentheil dadurch überzeugt, dass ich auch für ein negatives l die Rechnung durchführte; dabei ergab sich a kleiner als für $l = 0$, und demnach ist $\frac{da}{dl}$ in diesem ganzen Gebiete positiv.

Also führt die numerische Vergleichung der Erfahrung mit der Formel zu dem Ergebniss: Der mit den modificirten Grenzbedingungen abgeleitete Ausdruck schliesst sich dem wirklichen Verlaufe der Rückstandsbildung in der ersten Stunde etwas besser an als der mit der Grenzbedingung $\frac{\partial V}{\partial N} = 0$ abgeleitete, aber nur, wenn man für die

stationäre Strömung *a* einen Werth annimmt, der von dem wahren sehr verschieden ist, und selbst dann gehen die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Grössen noch weit über die Beobachtungsfehler hinaus. Es ist somit auch diese Formel mit der Beobachtung nicht in befriedigender Uebereinstimmung.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, noch einmal darauf hinzuweisen, dass die Formel unter der Voraussetzung eines wenig tiefen Eindringens der Electricitäten in den Isolator abgeleitet ist, und also nur unter dieser Bedingung die Folgerungen aus den zu Grunde gelegten Differentialgleichungen darstellt.

VI.

Ich schliesse damit, einige Wahrnehmungen mitzutheilen, die bei dem experimentellen Theile der Untersuchung gemacht wurden und vielleicht von Interesse sind.

Die ersten Flaschen, welche ich benutzte, waren aussen mit Stanniol belegt, als innere Belegung diente concentrirte Schwefelsäure. Als ich nun beim Fortschreiten der Vorversuche anfing, Gewicht darauf zu legen, dass die Flasche bei Beginn des Versuches rückstandsfrei sei, liess es sich selbst bei wochenlangem Warten nicht erreichen, dass die innere Belegung keine selbständigen Ladungen zeigte, wenn man sie isolirte. Dabei erfolgten die Selbstladungen zuletzt stets in dem nämlichen Sinne, gleichviel welche Electricität man bei der letzten Ladung von aussen der Belegung mitgetheilt hatte.

So blieb schliesslich keine andere Erklärung übrig, als dass sich hier die electromotorische Kraft des Elementes Zinn-Glas-Schwefelsäure-Platin geltend machte, wenn nicht etwa eine Leitung längs der Oberflächen stattfand. Um letztere Möglichkeit auszuschliessen, habe ich Gefässe von der Form (Taf. I Fig. 16) blasen lassen, bei denen das Quecksilber *Q* in der innern, und irgend eine andere Flüssigkeit *S* in der äussern Röhre vollständig in das Glas eingeschmolzen waren. Wenn sich hier eine con-

stante Potentialdifferenz zwischen dem Zuleitungsdrahte zum Quecksilber, d_1, und dem zur Flüssigkeit S, d_2, nachweisen liess, so konnte sie offenbar nicht von der Oberflächenleitung herrühren, weil diese die electromotorische Kraft Platin-Oberfläche-Platin ergeben haben würde, die null oder, verschiedenen Zustand der Oberfläche an beiden Drähten zugegeben, immerhin sehr klein gewesen sein würde. Es zeigte sich bei allen Elementen dieser Art die erwartete electromotorische Kraft; sie betrug nicht ganz 0,3 Daniell bei Füllung der äussern Röhre mit Salpetersäure. Dabei war es ganz gleichgültig, ob der Draht, der das Electrometer zu laden hatte, vor dem Versuche isolirt oder schon vorher mit dem Electrometer verbunden und mit ihm zur Erde abgeleitet war. Je nachdem die Glaswand zwischen Quecksilber und Säure dünner oder dicker war, lud sich das Electrometer schneller oder langsamer.

Die Seitenröhre A gestattete eine weitere Controle des Versuches. Wenn wirklich die Glaswand zwischen Q und S die Electricität leitete, so durfte, nachdem man das Quecksilber nach A hatte hinüber fliessen lassen, keine Ladung des Electrometers stattfinden, weil die Leitung zwischen der Glaswand und d_1 unterbrochen war. Der Versuch entsprach vollkommen der Erwartung, aber freilich erst, nachdem die noch vom Blasen her feuchte innere Röhre vor der Quecksilberluftpumpe sorgfältig getrocknet war.

Wie zu erwarten, zeigte sich die electromotorische Kraft des Elementes von der Füllung der äussern Röhre abhängig. Wurde dazu Salpetersäure gewählt, so lud sich das Quecksilber negativ, ebenso wenn Wasser oder Ammoniak angewandt wurden, doch war die electromotorische Kraft in letzteren Fällen geringer, für Ammoniak betrug sie noch nicht den zehnten Theil der für Salpetersäure beobachteten. Wurde aber aussen Kupfervitriollösung eingefüllt, so lud sich das Quecksilber positiv. Die betreffenden Versuche wurden alle an einem Tage und an demselben Elemente in unmittelbarer Aufeinanderfolge angestellt.

Nachdem ich mir so unbedingte Gewissheit verschafft hatte, dass es sich wirklich um electromotorische Kräfte handelte, versuchte ich, sie durch Compensation zu messen, erhielt aber nicht so constante Resultate, als ich erwartet hatte. Es ergab sich nämlich die electromotorische Kraft von vier verschiedenen Glaselementen, bezogen auf jene des Normalelementes als Einheit, wenn die äussere Röhre mit Salpetersäure gefüllt war:

Datum der Messung	I	II	III	IV
19. Febr. 1878	0,274	0,297	0,293	0,304
10. Mai 1878	249	266	274	299
17. „ 1879	277	236	279	232

Vielleicht haben die starken Abweichungen in der Polarisation der Berührungsflächen ihren Grund, die stets mehr oder weniger vorhanden sein dürfte, da ein Austausch von Electricität zwischen den beiden Poldrähten, wenn auch in geringem Maasse stets stattfinden wird. Die Stärke dieses Stromes kann durch äussere Einflüsse, wie Staub- oder Feuchtigkeitsschichten an der Oberfläche, geändert werden, und mit ihr der Betrag der Polarisation, also auch die electromotorische Kraft des Elementes. —

Unter den zahlreichen Gläsern, welche ich der Beobachtung zu unterwerfen versucht habe, befand sich auch eines von dem zur Zeit allgemein im Handel verbreiteten amerikanischen (virginischen) Glase. Es zeigte ein so hohes Leitungsvermögen, dass wenn die äussere Belegung mit einem Daniell geladen, die innere mit dem Electrometer zur Erde abgeleitet wurde, das letztere, unmittelbar nachdem es isolirt worden war, die ganze Ladung der äussern Belegung anzeigte, gerade als wäre es metallisch mit dem Pol des Elementes verbunden worden. Versuche mit anderen Gläsern derselben Art, zum Theil aus anderen Handlungen bezogen, gaben stets das gleiche Resultat, sodass diese amerikanischen Gläser ganz allgemein ein ungewöhnliches Leitungsvermögen zu besitzen scheinen. Ich habe

es nicht für überflüssig gehalten, von dieser Wahrnehmung Mittheilung zu machen, weil für manche Zwecke der electrostatischen Praxis der Besitz gut leitenden Glases wichtig ist, besonders überall da, wo man Apparate vor Influenz zu schützen wünscht, ohne sie dem Blick zu entziehen, auch bei den Fechner'schen Electroskopen, deren Angaben so leicht durch Ladungen der Glocke über dem Goldblättchen getrübt werden.[1])

II. *Ueber eine Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Dichte der gesättigten Dämpfe von Wasser und einigen anderen Flüssigkeiten; von A. Winkelmann.*

In der folgenden Arbeit habe ich versucht, eine Beziehung nachzuweisen, welche zwischen Druck, Temperatur und Dichte der gesättigten Dämpfe vorhanden zu sein scheint. Ich bin dabei von einem Zusammenhang ausgegangen, welcher zwischen Druck und Temperatur bei niedrigen Drucken sich leicht nachweisen lässt.[2]) Erst nachdem dieser Zusammenhang gefunden war, und sich herausstellte, dass derselbe in höheren Drucken immer grösser werdende Abweichungen zeigt, wurde auch die Dichte der Dämpfe in die Betrachtung eingeführt. Dieser Versuch erwies sich als ein glücklicher, sodass eine genügende Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung nachgewiesen werden konnte.

Der grösste Theil der folgenden Betrachtung bezieht sich auf die gesättigten Dämpfe des Wassers. Das Wasser ist von allen Flüssigkeiten in jeder Hinsicht am genauesten

1) Riess, Reibungselectricität, **1.** p. 21.

2) Hierüber habe ich bereits eine Mittheilung gemacht in den „Berichten der Münchener Akademie: Sitzung der mathematisch-physikalischen Classe vom 7. Juni 1879“.

untersucht. Daher glaube ich auch, dass die merkwürdig gute Uebereinstimmung, welche gerade beim Wasser zwischen Beobachtung und Berechnung sich findet, in erster Linie als eine Bestätigung der aufgestellten Beziehung betrachtet werden darf. Die übrigen Flüssigkeiten, deren Dämpfe hier untersucht wurden, sind jene, bei denen die für die Berechnung nothwendigen Daten vorlagen, nämlich Aether, Aceton, Chloroform, Chlorkohlenstoff und Schwefelkohlenstoff.

Während die Abhängigkeit des Druckes der gesättigten Dämpfe von der Temperatur sich verhältnissmässig leicht auf experimentellem Wege darstellen lässt, ist die Bestimmung der Dichte in ihrem Wachsthum mit der Temperatur sehr grossen Schwierigkeiten unterworfen. Die directen Beobachtungen der Dampfdichten in gesättigtem Zustande stimmen so wenig untereinander überein, dass es mir nicht räthlich erschien, diese Resultate bei der Berechnung zu verwerthen; dazu kommt noch, dass die fraglichen Beobachtungen sich nur auf ein geringes Temperaturintervall erstrecken. Unter solchen Umständen habe ich es vorgezogen, die Dichten der Dämpfe in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur nach der bekannten Gleichung der mechanischen Wärmetheorie mit Hülfe der experimentell bestimmten Verdampfungswärmen zu berechnen. Diese Berechnung hat mich genöthigt, die Beobachtungen über die Verdampfungswärmen, welche sämmtlich von Regnault herrühren, einem eingehenden Studium zu unterwerfen, und habe ich hierdurch zu meinem Erstaunen gefunden, wie wenig genügend Regnault seine zahlreichen experimentellen Daten durch empirische Formeln zuweilen darzustellen gewusst hat. Ich bin überzeugt, dass in dieser Beziehung die Resultate Regnault's vielfach überschätzt sind, weil die Genauigkeitsgrenzen seiner Versuche nicht bestimmt wurden. Wenn Regnault z. B. am Schlusse seiner Beobachtungen über die Gesammtwärme der Verdampfung beim Chloroform sagt, dass er wegen der Abweichung der einzelnen Beobachtungen untereinander ge-

zwungen gewesen sei „nach dem Gefühl" eine Curve zu ziehen, welche die Beobachtungen so gut wie möglich darstelle, so wird man zwar von dieser Curve nicht erwarten, dass sie besonders gut die Beobachtungen wiedergibt, andererseits aber auch nicht annehmen, dass die beobachteten von den berechneten Werthen so bedeutend abstehen, wie dies thatsächlich der Fall ist. Es erschien mir daher eine Kritik der Regnault'schen Versuche als eine Aufgabe, deren Lösung nicht ganz unwichtig ist.

Die Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Dichte der gesättigten Dämpfe, deren Nachweis im Folgenden versucht werden soll, lässt sich durch folgende Gleichung aussprechen:

$$\text{(I)} \qquad t_n = (a + b)\, n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - a\,.$$

In dieser Gleichung bezeichnet:

t_n die Temperatur des gesättigten Dampfes unter dem Drucke von n Atmosphären;

d_n die Dichtigkeit des gesättigten Dampfes bei gleichem Drucke, bezogen auf Luft unter den gleichen Verhältnissen als Einheit;

d die constante Dichte des Dampfes in ungesättigtem Zustande, wie sie sich aus dem Moleculargewicht ergibt, ebenfalls bezogen auf Luft als Einheit;

A eine constante Grösse, welche für alle Dämpfe gleich ist;

a und b zwei constante Grössen, welche von der Natur des Dampfes abhängen.

Die vorstehende Gleichung, welche für die Dämpfe aller untersuchten Flüssigkeiten gilt, enthält also nur zwei Constanten, welche von einer Flüssigkeit zur andern sich ändern. Diese Constanten haben eine einfache Bedeutung; setzt man nämlich $n = 1$, so wird $t_1 = b$; d. h. b bezeichnet die Temperatur, bei welcher der Dampf die Spannkraft von einer Atmosphäre besitzt; setzt man ferner $n = 0$, so wird $t_0 = - a$, d. h. bei

der Temperatur $-a$ beginnt die Flüssigkeit sich in Dampf zu verwandeln.

Um eine Uebersicht der folgenden Arbeit zu geben, theile ich den Inhalt der einzelnen Paragraphen mit; die §§ 1 bis 9 beziehen sich auf den Wasserdampf.[1])

§ 1 enthält eine einfache Beziehung zwischen Druck und Temperatur des gesättigten Wasserdampfes bei kleinen Drucken (Formel II) und den Nachweis, dass dieselbe unterhalb einer Atmosphäre mit grosser Annäherung besteht.

§ 2 zeigt, dass oberhalb des Druckes von einer Atmosphäre nur noch eine annähernde Gültigkeit dieser Beziehung vorhanden ist.

§ 3 enthält eine Correction für die Beziehung ohne Rücksicht auf die Dichtigkeit des Wasserdampfes (Formel III); gleichzeitig wird darauf hingewiesen, dass die Dichtigkeit des Wasserdampfes vielleicht zu der erforderlichen Correction zu verwerthen sei.

§ 4 enthält die Darlegung der Beziehung mit Rücksicht auf die Dichtigkeit des Wasserdampfes (Formel I_a).

§ 5 enthält die Werthe für die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes, berechnet nach der mechanischen Wärmetheorie.

§ 6 enthält Bemerkungen über die Werthe des § 5 und die Berechnung der Temperaturen des gesättigten Wasserdampfes mittelst Formel I_a.

§ 7 enthält eine Kritik der Werthe, welche von Regnault für die Verdampfungswärme des Wassers angegeben sind, und den Nachweis, dass in den niedrigen Temperaturen zwischen -2^0 und $+16^0$ die Werthe sehr ungenau und sicher zu gross sind.

§ 8 enthält eine neue Berechnung der Verdampfungswärmen auf Grund der Regnault'schen Beobachtungen und den Nachweis, dass ausser in dem ebengenannten Temperatur-

1) Die hierauf bezüglichen Resultate sind bereits mitgetheilt in dem „Programm zur 61. Jahresfeier der königl. württemb. land- und forstwirthschaftlichen Akademie Hohenheim". 1879.

intervall (-2^0 bis $+16^0$) die neue Formel den Beobachtungen Regnault's sich besser anschliesst, als die von Regnault selbst aufgestellte Formel.

§ 9 enthält eine neue Berechnung der Dichte des Wasserdampfes nach der neuen Formel für die Verdampfungswärme. Die so berechneten Werthe für die Dichte sind sämmtlich grösser als die theoretische Dampfdichte 0,6225 und heben somit den Widerspruch auf, der darin bestand, dass die früheren Werthe für die Dichte in niederen Temperaturen unterhalb 50^0 kleiner als die theoretische Dampfdichte 0,6225 waren. Mittelst der neuen Werthe für die Dichte sind die Temperaturen des gesättigten Wasserdampfes nach Formel I_a nochmals berechnet und ist gezeigt, dass die Werthe sehr gut mit den Beobachtungen übereinstimmen.

§ 10 enthält Bemerkungen über die Berechnung der Dampfdichten bei den anderen Flüssigkeiten.

§ 11 enthält die Berechnung der Temperaturen nach der aufgestellten Beziehung und die Resultate der neuen Berechnung der Gesammtwärme nach den Beobachtungen von Regnault.

§ 12 untersucht die Umstände, welche zu den Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung der Temperaturen beigetragen haben.

§ 13 stellt die Genauigkeit fest, welche Regnault bei seinen Untersuchungen über die Spannkraft der Dämpfe erreicht hat.

§ 14 enthält einige Schlussbemerkungen.

§ 15 bespricht ein von Dühring aufgestelltes Gesetz über den Zusammenhang der Siedetemperaturen verschiedener Flüssigkeiten bei demselben Drucke und zeigt, dass dasselbe der Wirklichkeit nicht entspricht.

§ 1.

Es besteht folgende einfache Beziehung zwischen den Drucken und zugehörigen Temperaturen des gesättigten

Wasserdampfes bei kleinen Drucken, welche sich unterhalb des Druckes von einer Atmosphäre mit grosser Annäherung bewährt:

„Wählt man die Drucke des gesättigten Wasserdampfes derartig, dass dieselben eine geometrische Reihe bilden, so bilden auch die den Drucken entsprechenden Temperaturen eine geometrische Reihe, wenn man zu jeder Temperatur Cels. die Zahl 100 addirt."

Diese Beziehung lässt sich in anderer Form auch so aussprechen:

„Zählt man die Temperaturen Cels. des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur -100^0, so ist das Verhältniss zweier Temperaturen nur von dem Verhältniss der beiden entsprechenden Drucke und nicht von diesen Drucken selbst abhängig."

Um an einem Beispiel die Beziehung zu erläutern, sind in der folgenden Tabelle die Temperaturen nach den Beobachtungen Regnault's zusammengestellt, welche einem Drucke von 1, $^1/_2$, $^1/_4$ etc. Atmosphären entsprechen.

Tabelle I.

Druck in Atmosphären	Temp. Cels.	Druck in Atmosphären	Temp. Cels.
1	$100{,}00^0$	$^1/_{32}$	$25{,}14^0$
$^1/_2$	81,71	$^1/_{64}$	13,95
$^1/_4$	65,36	$^1/_{128}$	3,61
$^1/_8$	50,64	$^1/_{256}$	−5,67
$^1/_{16}$	37,31		

Die Drucke in vorstehender Tabelle sind so gewählt, dass jeder folgende Druck die Hälfte des vorhergehenden beträgt; wenn daher die erwähnte Beziehung richtig ist, so müssen die Verhältnisse der aufeinanderfolgenden Temperaturen, jede Temperatur um 100 vermehrt, einander gleich sein. Diese Verhältnisse sind die folgenden:

$$\frac{100 + 100}{81,71 + 100} = 1,101; \qquad \frac{81,71 + 100}{65,36 + 100} = 1,099;$$

$$\frac{65,36 + 100}{50,64 + 100} = 1,098; \qquad \frac{50,64 + 100}{37,31 + 100} = 1,097;$$

$$\frac{37,31 + 100}{25,14 + 100} = 1,097; \qquad \frac{25,14 + 100}{13,95 + 100} = 1,098;$$

$$\frac{13,95 + 100}{3,61 + 100} = 1,100; \qquad \frac{3,61 + 100}{-5,67 + 100} = 1,098;$$

Wie man sieht, sind in der That die Verhältnisse so nahe gleich, dass das Gesetz durch dieselben bestätigt erscheint.

Man kann nach vorliegender Beziehung auch leicht die Temperatur t_n für den Druck von n Atmosphären berechnen, wenn man von der Temperatur 100° für den Druck von einer Atmosphäre ausgeht. Bezeichnet nämlich a das eben gefundene constante Verhältniss, welches gleich $1,0985 = a$ gesetzt werde, so ist:

$$\text{(II)} \qquad t_n = 200 \,.\, a^{\frac{\log n}{\log 2}} - 100.$$

Dieser Formel kann man auch die folgende Gestalt geben:

$$\text{(IIa)} \qquad t_n = 200 \,.\, b^{\log n} - 100 = 200 \,.\, n^{\log b} - 100,$$

$$\text{wo} \quad b = a^{\frac{1}{\log 2}} = 1,3652 \quad \text{ist.}$$

Berechnet man nach vorstehender Formel die Temperaturen zu den früher angegebenen Drucken, so erhält man die folgenden Werthe, denen die beobachteten Temperaturen zur Vergleichung beigefügt sind.

Tabelle II.

Druck in Atmosphären	Temperatur Celsius		Differenz
	berechnet nach Formel II	beobachtet von Regnault	
1	100,00	100,00	±0,00
$^1/_2$	82,06	81,71	−0,35
$^1/_4$	65,74	65,36	−0,38
$^1/_8$	50,88	50,64	−0,24
$^1/_{16}$	37,35	37,31	−0,04
$^1/_{32}$	25,04	25,14	+0,10
$^1/_{64}$	13,82	13,95	+0,13
$^1/_{128}$	3,62	3,61	−0,01
$^1/_{256}$	−5,66	−5,67	−0,01

§ 2.

Nachdem im vorigen Paragraphen gezeigt ist, dass die Beziehung bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre mit grosser Annäherung besteht, ist auch bei höheren Drucken dieselbe zu prüfen. Man erhält nach den Beobachtungen Regnault's folgende Temperaturen bei den entsprechenden Drucken.

Druck in Atmosph.	Temp. C.	Druck in Atmosph.	Temp. C.
1	100,00	4	144,00
2	120,60	8	170,81

Bildet man, wie früher, die aufeinander folgenden Verhältnisse, so erhält man:

$$\frac{120{,}60 + 100}{100 + 100} = 1{,}103; \qquad \frac{144{,}00 + 100}{120{,}60 + 100} = 1{,}106;$$

$$\frac{170{,}81 + 100}{144{,}00 + 100} = 1{,}107.$$

Die Verhältnisszahlen, welche nach dem Gesetz einander gleich sein sollen, zeigen nur noch die annähernde Gültigkeit desselben, der Zuwachs beträgt 0,4 Procent. Nimmt man aus den Angaben des vorigen Paragraphen die kleinste Verhältnisszahl, nämlich 1,097, und vergleicht sie mit der jetzt erhaltenen grössten, 1,107, so sieht man, dass die Differenz weniger als 1 Proc. des Werthes ausmacht. Die Druckgrenzen, innerhalb derer dieser Unterschied auftritt, sind $^1/_{256}$ Atmosphäre und 8 Atmosphären, oder 3 mm und 6080 mm Quecksilber.

Die vorliegende Beziehung in Betreff des Wasserdampfes verhält sich ähnlich wie das Boyle'sche Gesetz in Hinsicht der leicht comprimirbaren Gase. Wie dieses um so genauer mit der Wirklichkeit stimmt, je kleiner die Drucke sind, für welche es angewandt wird, ebenso stellt die vorgeführte Beziehung in niedrigen Drucken sehr nahe die beobachteten Werthe dar und zeigt um so grössere Abweichungen, je höher die Drucke werden.

Würde man beim Wasserdampf von einer andern Temperatur als — 100° ausgehen, so würden die Verhältnisszahlen sich ändern, eine nennenswerthe grössere Uebereinstimmung derselben liesse sich aber nicht erzielen. Ich habe aber auch Werth darauf gelegt, diese Ausgangstemperatur so zu bestimmen, dass die Verhältnisszahlen in den niedrigen Drucken unterhalb einer Atmosphäre möglichst übereinstimmen, weil ich glaube, dass das Gesetz gerade bei diesen kleinen Drucken seinen vollkommensten Ausdruck finden muss. Setzt man in der Formel (I_a) $n = o$, um die Temperatur bei dem Drucke o zu bestimmen, so wird $b^{\log n} = o$ und daher die Temperatur $t_0 = -100$. Dieses Resultat sagt aus, dass der Wasserdampf bei -100^0 den Druck o besitzt, also bei -100^0 das Wasser mit der Verdampfung beginnt.

§ 3.

Da eine Formel von so einfacher Gestalt wie II in § 1 die Beziehung darstellt, so liess sich erwarten, dass auch die Abweichung von derselben, welche besonders in höheren Drucken auftritt, wogegen sie in niedrigen Drucken nicht beachtenswerth ist, sich leicht zum Ausdrucke bringen liess. Will man an der Formel II eine Correction anbringen, welche die erwähnten Abweichungen compensiren soll, so ist dieselbe so zu wählen, dass sie bei niedrigen Drucken nahezu verschwindet.

Bezeichnet man mit t_n die Temperatur des gesättigten Wasserdampfes bei einem Drucke von n Atmosphären, so wurde der Formel die folgende Gestalt gegeben:

$$\text{(III)} \qquad t_n = 200 \left\{ a \,.\, (n+1)^c \right\}^{\frac{\log n}{\log 2}} - 100 .$$

In dieser Formel ist $c = 0{,}0033$.

Die Formel nimmt dann, entsprechend der Gleichung (II_a), die folgende Form an:

$$\text{(III}_a\text{)} \qquad t_n = 200 \left\{ b \,.\, (n+1)^d \right\}^{\log n} - 100,$$

wo $b = a^{\frac{1}{\log 2}} = 1{,}3652$ und $d = {}^{\frac{c}{\log 2}} = 0{,}010965$.

Diese Formel wurde benutzt, um alle Werthe der folgenden Tabelle zu berechnen; da $(n+1)^d$ für kleine Werthe von n nahezu gleich 1 ist, in diesem Falle also der Factor $(n+1)^d$ kaum einen Einfluss auf das Resultat ausübt, so genügt die Formel ebenso für kleine als für die grössten von Regnault beobachteten Drucke.

Tabelle III.

Druck in Atmosphären	Temperatur C. nach Regnault [1]	Temperatur C. nach der Formel IIIa	Differenz	Druck in Atmosphären	Temperatur C. nach Regnault [1]	Temperatur C. nach Formel IIIa	Differenz
22,89	220,00	220,19	−0,19	2	120,60	120,44	+0,16
15,38	200,00	200,11	−0,11	1	100,00	100,00	+0,00
12,42	190,00	190,05	−0,05	$^1/_2$	81,71	81,86	−0,15
10	180,31	180,33	−0,02	$^1/_4$	65,36	65,57	−0,21
9	175,77	175,74	+0,03	$^1/_8$	50,64	50,77	−0,13
8	170,81	170,76	+0,05	$^1/_{16}$	37,31	37,06	+0,25
7	165,34	165,40	−0,06	$^1/_{32}$	25,14	25,12	+0,02
6	159,22	159,09	+0,13	$^1/_{64}$	13,95	13,76	+0,19
5	152,22	152,05	+0,17	$^1/_{128}$	3,61	3,76	−0,15
4	144,00	143,81	+0,11	$^1/_{256}$	−5,67	−5,50	+0,17
3	133,91	133,70	+0,21				

Eine Uebersicht der in der 4. Reihe gegebenen Differenzen zeigt, mit welcher Genauigkeit die Beobachtungen Regnault's durch die Formel III oder IIIa dargestellt werden.

Nachdem in der Formel (III) — durch die als Factor von der Constanten a in der Formel (II) angebrachte Correction $(n+1)^c$ — ein Ausdruck gefunden ist, welcher die Beobachtungen sehr gut wiedergibt, fragt es sich, ob die Abweichungen des Wasserdampfes von dem einfachen Gesetze sich nicht auch durch eine Eigenschaft des Dampfes selbst erklären lassen. Die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes ist die nächste Eigenschaft, welche sich hier zuerst darbietet, und ich habe daher versucht, dieselbe in dieser Hinsicht zu verwerthen.

1) Die Temperaturen für die Drucke von 10 bis 1 Atmosphäre sind Zeuner's Tabelle (Mechanische Wärmetheorie 1866, p. 254) entnommen.

§ 4.

Geht man von der Gleichung II_a aus, nämlich:

$$(II_a) \qquad t_n = 200 . n^{\log b} - 100,$$

so erkennt man, dass die Werthe t_n, welche nach dieser Gleichung berechnet werden, den Beobachtungen auch in den höheren Drucken sich anschliessen würden, wenn der Werth b nicht als constant, sondern mit der Temperatur wachsend betrachtet wird. Diese Ueberlegung hat dazu geführt, der Gleichung II_a folgende Form zu geben:

$$(I_a) \qquad t_n = 200 . n^{\frac{d_n}{d} . A} - 100,$$

wo d_n die Dichte des gesättigten Wasserdampfes bei dem Drucke von n Atmosphären, bezogen auf Luft als Einheit,

d die constante Dichte des Wasserdampfes in überhitztem Zustande, ebenfalls bezogen auf Luft als Einheit, $= 0,6225$,

A eine constante Zahl[1]) $= 0,13511$ bezeichnet.

Würde man in der Gleichung (I_a) $d_n = d$ setzen, also annehmen, dass die Dichte des gesättigten Wasserdampfes bezogen auf Luft als Einheit constant ist, und würde man ferner $\log b = A$ setzen, was nahezu mit dem angegebenen Werthe von A übereinstimmt, da $\log b = 0,13519$ ist, so würde (I_a) in die Gleichung II_a übergehen. Da bei niedrigen Drucken die Dichte der gesättigten Dämpfe, bezogen auf Luft als Einheit, nur geringe Aenderungen mit der Temperatur erfährt, so sieht man, dass die einfache Beziehung, welche in der Gleichung II_a ausgedrückt ist, sich bei niedrigen Drucken bewähren kann, ohne auch für höhere Drucke zu gelten.

§ 5.

Bekanntlich liefert die mechanische Wärmetheorie nach einer Beziehung, welche zuerst von Clausius aufgestellt

1) Der definitive Werth von A, welcher für alle Dämpfe, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, gleich ist, ist $A = 0,13507$. Die Ursache, weshalb zunächst für A der Werth 0,13511 eingeführt und dieses später um weniges geändert wird, ergibt sich später.

wurde, bestimmte Werthe für die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bei verschiedenen Drucken.

Bezeichnet man mit γ die Dichtigkeit des Wasserdampfes, d. h. das Gewicht von einem Cubikmeter Dampf in Kilogrammen, so erhält man folgende Werthe:

Tabelle IV.

Druck in Atmosph.	Dichtigkeit γ	Druck in Atmosph.	Dichtigkeit γ
$^1/_{32}$	0,022730	4	2,2303
$^1/_{16}$	0,043968	5	2,7500
$^1/_8$	0,084924	6	3,2632
$^1/_4$	0,16376	7	3,7711
$^1/_2$	0,3153	8	4,2745
1	0,6059	9	4,7741
2	1,1631	10	5,2704
3	1,7024		

Die Werthe in vorstehender Tabelle sind für die Drucke von $^1/_2$ bis 10 Atmosphären der Berechnung Zeuner's[1]) entnommen. Für die Drucke, welche kleiner als $^1/_2$ Atmosphäre sind, habe ich die Werthe nach den Formeln Zeuner's berechnet. Setzt man:

$$\gamma = \frac{1}{u + 0{,}001}$$

so ist:

$$u = \left\{31{,}10 + 0{,}096\, t - 0{,}00002\, t^2 - 0{,}000\,0003\, t^3\right\} \frac{1}{A \cdot p},$$

wo p den Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter bezeichnet, und $\frac{1}{A} = 424$ zu setzen ist.

Um die Aenderung zu übersehen, welche die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes mit wachsendem Drucke erfährt, sind in der folgenden Tabelle die Dichtigkeiten der Luft γ_1 berechnet, welche den Werthen des Wasserdampfes entsprechen.

Die Werthe wurden nach der Formel:

1) Zeuner, Tabelle 10 der Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie 1866.

$$\gamma_1 = \frac{p}{29{,}272\,(273 + t)}$$

berechnet.

Zur weitern Vervollständigung sind ferner die Werthe:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = d$$

angegeben, wo d die Dichte des Wasserdampfes, bezogen auf Luft unter den gleichen Verhältnissen als Einheit bezeichnet.

Tabelle V.

Druck des gesättigten Wasserdampfes in Atmosphären	Temp. Cels, des ges. Wasserdampfes bei dem entspr. Drucke	Dichtigkeit des ges. Wasserdampfes γ	Dichtigkeit der Luft γ_1	Dichte in Hinsicht der Luft $d = \frac{\gamma}{\gamma_1}$
$^1/_{32}$	25,14	0,022730	0,037005	0,61427
$^1/_{16}$	37,31	0,043968	0,071105	0,61836
$^1/_8$	50,64	0,084924	0,13635	0,62283
$^1/_4$	65,36	0,16376	0,26084	0,62780
$^1/_2$	81,71	0,3153	0,49765	0,63357
1	100,00	0,6059	0,94646	0,64016
2	120,60	1,1631	1,7939	0,64838
3	133,91	1,7024	2,6028	0,65400
4	144,00	2,2303	3,3864	0,65860
5	152,22	2,7500	4,1513	0,66244
6	159,22	3,2632	4,9009	0,66586
7	165,34	3,7711	5,6378	0,66908
8	170,81	4,2745	6,3637	0,67168
9	175,77	4,7740	7,0804	0,67430
10	180,31	5,2704	7,7898	0,67673

§ 6.

Aus der letzten Reihe der obigen Tabelle ersieht man, dass die Dampfdichte d für die beiden Temperaturen 25,14° und 37,31° kleiner als die theoretische Dampfdichte 0,6225 ist. Für Temperaturen, welche niedriger als 25,14° sind, werden die Dampfdichten noch kleiner, sodass die Unterschiede gegenüber der theoretischen Dampfdichte noch grösser werden. Man wird daher schliessen, dass die Werthe, welche die mechanische Wärmetheorie unterhalb 50° für die Dampfdichte des gesättigten Wasserdampfes liefert, nicht richtig sind, da die Grenze, der die Dichten sich bei

abnehmender Temperatur annähern, nicht kleiner als die theoretische Dichte sein kann.

Um eine Vergleichung der Werthe, welche nach der Formel Ia des § 4, nämlich:

$$(\mathrm{Ia}) \qquad t_n = 200 \,.\, n^{\frac{d_n}{d} \,.\, A} - 100$$

berechnet sind, mit den experimentellen Beobachtungen Regnault's zu geben, habe ich für die Dichte d bei den Temperaturen, welche höher als 50° sind, die Werthe der obigen Tabelle eingesetzt; für die Temperaturen aber, welche niedriger als 50° sind, habe ich den constanten Werth 0,623 als Dichte eingeführt. Man erhält dann, wenn

$$A = 0{,}13511$$

gesetzt wird, folgende Werthe:

Tabelle VI.

Druck des gesättigten Wasserdamfes in Atmosphären	Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes, bezogen auf Luft	Temperatur des gesättigten Wasserdampfes nach		Differenz
		den Beobachtungen	der Formel Ia	
n	d_n	t_n	t_n	
$^1/_{128}$	0,623	3,61	3,77	−0,16
$^1/_{64}$	0,623	13,95	13,97	−0,02
$^1/_{32}$	0,623	25,14	25,17	−0,03
$^1/_{16}$	0,623	37,31	37,46	−0,15
$^1/_8$	0,623	50,64	50,90	−0,34
$^1/_4$	0,62780	65,36	65,57	−0,21
$^1/_2$	0,63357	81,71	81,83	−0,12
1	0,64016	100,00	100,00	±0,00
2	0,64838	120,60	120,49	+0,11
3	0,65400	133,91	133,76	+0,15
4	0,65860	144,00	143,83	+0,17
5	0,66244	152,22	152,08	+0,14
6	0,66586	159,22	159,11	+0,11
7	0,66903	165,34	165,30	+0,04
8	0,67168	170,81	170,81	±0,00
9	0,67430	175,77	175,86	−0,11
10	0,67673	180,31	180,48	−0,17

Man sieht, dass die grössten Abweichungen zwischen Beobachtung und Berechnung unterhalb 100° sich finden; das Maximum der Abweichung wird bei 50,64 erreicht, wo

es 0,34° beträgt. Nun ist aber wohl unzweifelhaft, dass der Werth 0,623 für die Dichte bei 50,64° zu klein ist, sodass mit diesem Werthe die berechnete Temperatur zu gross werden musste. Jedenfalls erkennt man aber, dass die Formel I_a die Beobachtungen im ganzen recht gut wiedergibt und sich denselben noch mehr anschliessen würde, wenn genauere Werthe für die Dichte d existirten.

Die Werthe, welche die mechanische Wärmetheorie für die Dichten unterhalb 100° liefert, nehmen mit abnehmender Temperatur zu schnell ab, und man kann daher anstatt bei der Temperatur 50,64, wie es oben geschehen ist, den Grenzwerth 0,623 eintreten zu lassen und diesen für niedrige Temperaturen beizubehalten, auch solche Werthe einführen, dass eine allmähliche Abnahme der Dichte während des ganzen Intervalls von 100° bis 0° eintritt.

Nimmt man an, dass bei 0° die Dichte den Werth 0,623 besitzt, und dass dieselbe allmählich wachsend bei 100° den Werth der mechanischen Wärmetheorie 0,64016 annehme, so lässt sich eine Formel aufstellen, welche für die übrigen zwischen 0° und 100° liegenden Temperaturen die Dichte zu berechnen gestattet.

Ich bin zur Darstellung dieses Werthe einer Formel von Clausius[1]) gefolgt und habe derselben die Form gegeben:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{d} = M - N \cdot \alpha^t,$$

wo $M = 1,6282$ $\quad N = 0,0231 \quad \log \alpha = 0,004\,565$

gesetzt ist.

Mittelst dieser Formel erhält man für die Dichten folgende Werthe, denen die nach Formel I_a berechneten Temperaturen d_n beigefügt sind.

---

1) Clausius, Abhandlung I. Zusatz C. p. 88.

Tabelle VIa.

Druck des gesättigten Wasserdampfes in Atmosphären n	Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes, bezogen auf Luft als Einheit $= d_n$	Temperatur des gesättigten Wasserdampfes		Differenz von Beobachtung und Berechnung
		nach den Beobachtungen	nach der Berechnung	
$^1/_{128}$	0,62337	3,61	3,73	−0,12
$^1/_{64}$	0,62441	13,95	13,82	+0,13
$^1/_{32}$	0,62573	25,14	24,92	+0,22
$^1/_{16}$	0,62734	37,31	37,11	+0,20
$^1/_8$	0,62937	50,64	50,54	+0,10
$^1/_4$	0,63194	65,36	65,37	−0,01
$^1/_2$	0,63544	81,71	81,76	−0,05
1	0,64016	100,00	100,00	±0,00

Eine Vergleichung der beiden Tabellen VI und VIa lässt sofort erkennen, dass die Werthe der berechneten Temperaturen in Tabelle VIa den Beobachtungen entschieden näher kommen, als dies bei den Beobachtungen in Tabelle VI der Fall war.

Es ist hierbei festzuhalten, dass **beide** Tabellen für die Dichte des gesättigten Wasserdampfes unterhalb 50° grössere Werthe eingeführt haben, als die mechanische Wärmetheorie dieselben liefert; jene Werthe ergaben sich aus der Ueberlegung, dass die Dichte nicht kleiner als die theoretische Dichte sein kann.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, ob der Widerspruch, welcher sich zwischen den Resultaten der mechanischen Wärmetheorie und der Erfahrung in Hinsicht der Dichten des gesättigten Wasserdampfes bei niedrigen Temperaturen zeigt, beseitigt werden kann. Zur Erörterung derselben werde ich im folgenden Paragraphen auf die Berechnung eingehen, welche die mechanische Wärmetheorie zur Bestimmung der Dichte anwendet, und besonders die Beobachtungsresultate beleuchten, welche von **Regnault** durch Bestimmung der Verdampfungswärmen geliefert wurden.

§ 7.

Die Werthe der mechanischen Wärmetheorie für die Dampfdichte hängen von drei Grössen ab, nämlich von

der Verdampfungswärme der Flüssigkeit, der Spannkraft des Dampfes und dem Arbeitsäquivalent für die Wärmeeinheit. Von diesen drei Grössen ist die Spannkraft wohl am genauesten bestimmt, besonders da die Versuche von Magnus und Regnault sehr nahe übereinstimmende Resultate geliefert haben. Das Arbeitsäquivalent ist in der obigen Berechnung gleich 424 gesetzt; um grössere Werthe für die Dampfdichten zu erhalten, müsste man dasselbe kleiner annehmen, wozu aber anderweitig kein genügender Grund vorliegt.

Es bleibt daher nur noch die Verdampfungswärme übrig, welche infolge einer fehlerhaften Bestimmung zu kleine Werthe für die Dampfdichte in den niedrigen Temperaturen geliefert haben könnte. Wenn man annimmt, dass die Verdampfungswärme von Regnault in den niedrigen Temperaturen um etwa 1,5 Proc. zu gross gefunden wurde, so würde hierdurch die Differenz erklärt sein. Es fragt sich, ob diese Annahme als begründet angesehen werden kann.

Die Werthe der Verdampfungswärmen, welche die mechanische Wärmetheorie verwendet, sind auf einer Formel begründet, welche Regnault für die Gesammtwärme der Verdampfung aufgestellt hat. Die Gesammtwärme für eine betimmte Temperatur t^0 ist nach Regnault die Wärme, welche nothwendig ist, um die Gewichtseinheit Wasser von 0^0 auf t^0 zu erwärmen und bei t^0 in Dampf von t^0 zu verwandeln, und wird durch die Formel:

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305 \, . \, t \tag{V}$$

dargestellt.

Diese Formel hat Regnault aus vier Versuchsreihen abgeleitet, von denen sich zwei auf Temperaturen unterhalb 100^0 beziehen, also für unsere Frage besonders in Betracht kommen. Die Tabelle III von Regnault[1]) umfasst die Temperaturen von 88^0 bis 63^0, und die Tabelle[2]) IV erstreckt sich auf Temperaturen von 16^0 bis -2^0.

1) Regnault, Mémoires de l'Académie. **21.** p. 710.

2) l. c. p. 720.

Berechnet man mittelst der oben angegebenen Formel (V) die Gesammtwärmen λ für die Temperaturen der Tabelle III von **Regnault**, so sieht man, dass die berechneten Werthe durchgehends grösser, als die beobachteten Werthe sind. Die folgende Tabelle, welche die Temperaturen t des Dampfes und die Gesammtwärme nach den Beobachtungen und nach der Berechnung enthält, beweist dies.

Tabelle VII.

Nr. des Versuches	Temperatur des Dampfes $= t$	Gesammtwärme nach den Beobachtungen von Regnault	Gesammtwärme nach der Berechnung der Formel von Regnault	Differenz der Werthe in 3 und 4
1	2	3	4	
1	88,11	633,4	633,4	±0,0
2	87,83	633,1	633,2	−0,1
3	85,97	628,4	632,7	−4,3
4	85,24	628,6	632,5	−3,9
5	85,20	631,7	632,5	−0,8
6	84,68	629,9	632,3	−2,4
7	83,08	628,9	631,8	−2,9
8	82,66	631,0	631,7	−0,7
9	81,03	628,0	631,2	−2,4
10	80,60	627,7	631,1	−3,4
11	80,37	628,8	631,0	−2,2
12	80,17	630,2	630,9	−0,7
13	79,55	630,1	630,8	−0,7
14	78,28	627,0	630,3	−3,3
15	76,50	628,6	629,8	−1,2
16	71,35	624,4	628,2	−3,8
17	71,11	622,2	628,1	−5,9
18	70,49	626,9	628,0	−1,1
19	69,70	626,4	627,7	−1,3
20	68,01	622,5	627,3	−4,8
21	66,30	624,7	626,7	−2,0
22	64,34	622,9	626,1	−3,2
23	63,02	625,5 [1]	625,7	−0,2

Aus der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle sieht man, dass die Differenzen sämmtlich das gleiche Vorzeichen

1) Dieser Werth, welcher nahe mit der Regnault'schen Formel übereinstimmt, wird auch von **Regnault** p. 727 angeführt, um zu zeigen, dass seine Formel mit den Beobachtungen gut übereinstimmt; es ist aber zu bemerken, dass diese Uebereinstimmung sich eben nur auf einen Werth bezieht und nicht auf die übrigen Werthe, welche zu wenig von **Regnault** berücksichtigt sind.

besitzen, und dass die berechneten Werthe nicht unbedeutende Unterschiede gegenüber den beobachteten Werthen zeigen. Bildet man das Mittel der Differenzen, so findet man für dasselbe — 2,2, sodass die berechneten Werthe durchschnittlich 2,2 Einheiten grösser als die beobachteten Werthe sich ergeben.

Berechnet man in ganz gleicher Weise die Werthe der vierten Regnault'schen Tabelle, so findet man, dass dort das Entgegengesetzte stattfindet. Die folgende Tabelle VIII enthält dieselben Grössen wie die Tabelle VII.

Tabelle VIII.

Nr. des Versuches	Temperatur des Dampfes = t	Gesammtwärme nach den Beobachtungen von Regnault	Gesammtwärme nach der Berechnung der Formel von Regnault	Differenz der Werthe in 3 und 4
1	2	3	4	
1	— 0,2	601,5	606,4	— 4,9
2	— 2,1	608,9	605,9	+ 3,0
3	± 0,0	605,8	606,5	— 0,7
4	+ 7,4	614,5	608,7	+ 5,8
5	8,5	613,5	609,1	+ 4,4
6	7,6	611,5	608,1	+ 3,4
7	8,6	603,0	609,1	— 6,1
8	11,8	605,1	610,1	— 5,0
9	7,6	613,8	608,8	+ 5,0
10	14,0	609,9	610,8	— 0,6
11	11,4	602,7	610,0	— 7,3
12	13,5	614,3	610,6	+ 3,7
13	5,2	611,9	608,1	+ 3,8
14	2,0	613,0	607,1	+ 5,9
15	14,7	615,4	611,0	+ 4,4
16	8,5	610,6	609,1	+ 1,5
17	8,5	609,7	609,1	+ 0,6
18	9,0	611,5	609,2	+ 2,3
19	8,9	611,7	609,2	+ 2,5
20	16,1	613,1	611,4	+ 1,7
21	8,6	614,1	609,1	+ 5,0
22	6,4	619,7	608,5	+11,3

Die letzte Reihe der Tabelle zeigt, dass die Vorzeichen der Differenzen zwar wechseln, dass aber das positive Zeichen ganz entschieden vorwaltet; als mittlere Differenz findet man + 1,8.

Man würde daher nach den directen Beobachtungen

Regnault's in dem Intervall von 88° bis 63° kleinere Werthe erhalten, als die Gleichung (V) sie liefert, in dem Intervall von ÷ 2° bis + 16° dagegen grössere Werthe. Da nun die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes um so kleiner wird, je grössere Werthe für die Verdampfungswärme eingesetzt werden, so würden die directen Beobachtungen Regnault's in den niedrigen Temperaturen zwischen — 2° und + 16° noch kleinere Werthe für die Dichtigkeit ergeben, als bisher aus der Regnault'schen Formel abgeleitet sind, in dem andern Intervall von 63° bis 88° dagegen grössere Werthe. Die Resultate der Regnault'schen Formel stehen von den Werthen beider Intervalle nahezu gleich weit und im entgegengesetzten Sinne ab. Es lässt sich aber leicht zeigen, und Regnault selbst hat darauf hingewiesen, dass die eine Gruppe von Beobachtungen eine viel geringere Sicherheit in dem Resultate repräsentirt, als die andere Gruppe.

Die Beobachtungen, welche in Tabelle VIII zusammengefasst wurden, sind nämlich nicht nach derselben Methode ausgeführt, wie jene der Tabelle VII, die hinsichtlich der Methode mit den übrigen Versuchen Regnault's über den Wasserdampf übereinstimmen.

Während Regnault in den höheren Temperaturen und auch in dem Intervall von 88° bis 63° den Wasserdampf im Calorimeter sich condensiren liess und die Condensationswärme bestimmte, war in der niedrigen Temperatur zwischen — 2° und + 16° die umgekehrte Einrichtung getroffen, sodass hier das Wasser, welches in einem Recipienten eingeschlossen war, im Calorimeter unter vermindertem Druck in einen durch eine Kältemischung abgekühlten Raum verdampfte, und so die Verdampfungswärme bestimmt wurde. Bei dieser letzten Methode lässt sich die Temperatur nicht genau bestimmen, bei welcher die Verdampfung des Wassers erfolgt. Regnault bestimmt an einem Manometer ausserhalb des Calorimeters den Druck des Dampfes und berechnet aus diesem die Temperatur, welche der Wasserdampf besitzt, wenn er bei diesem Drucke f ge-

sättigt ist. Diese so berechnete Temperatur muss nothwendig kleiner als die Temperatur sein, welche der Dampf im Moment der Verdampfung besitzt. Regnault sagt selbst: „Il est donc probable, que la force elastique f, observée sur le manomètre baromètrique, est notablement plus faible, que la pression moyenne F, sous laquelle la vapeur est distillée".

Da ferner die Temperatur des gesättigten Dampfes im Moment der Verdampfung niedriger als die Temperatur des Calorimeters ist, so nimmt er auf seinem Wege aus dem Recipienten von den Wänden des letztern Wärme auf und erniedrigt so die Temperatur des Calorimeters stärker, als die Verdampfung dies allein gethan hätte.

Hieraus geht hervor, dass die von Regnault berechnete Gesammtwärme innerhalb der Temperaturen -2^0 und $+16^0$ zu gross ist, und da infolge des ersten Umstandes die berechnete Temperatur niedriger als die thatsächliche ist, so ist auch die Temperatur, auf welche die zu grosse Gesammtwärme bezogen ist, zu niedrig. Es sind also zwei Gründe vorhanden, welche die Gesammtwärme in den niedrigen Temperaturen -2^0 bis $+16^0$ entschieden zu gross geliefert haben.

In ähnlicher Weise, wie oben angeführt, hat Regnault auch andere Flüssigkeiten untersucht und bei diesen eine Correction dafür angebracht, dass der Dampf bei seinem Austritt aus dem Calorimeter sich erwärmt und dadurch dem Calorimeter selbst Wärme entzieht. Da die Temperatur des Calorimeters während des Versuches sinkt, lässt sich die Wärmemenge, welche von den Dämpfen aufgenommen wird, selbst unter der Annahme, dass sie sich immer gerade bis zur Temperatur des Calorimeters erwärmen, nicht genau bestimmen. Regnault macht die Annahme, dass die Dämpfe ebenso viel Wärme aufgenommen haben, wie wenn sie sich bis zur mittlern Temperatur $\frac{t_0 + t_1}{2}$ erwärmt hätten, wo t_0 die Anfangstemperatur und

t_1 die Endtemperatur bezeichnet. Bedeutet k die specifische Wärme des Dampfes und t die Temperatur, bei der die Verdampfung erfolgt, so ist die genannte Wärme für die Gewichtseinheit gleich:

$$k\left(\frac{t_0 + t_1}{2} - t\right),$$

und diese Grösse ist von der Gesammtwärme abzuziehen.

Die eben erwähnte Correction ist von Regnault an den Werthen, welche für Wasser sich ergeben, nicht angebracht. Zwar ist bei den Versuchen mit Wasser keine besondere Vorrichtung getroffen, welche die Dämpfe, ehe sie das Calorimeter verlassen, auf die Temperatur des Calorimeters erwärmen, — wie dies bei den andern Flüssigkeiten mit Hülfe von Spiralen, welche im Calorimeter lagen, und welche die Dämpfe zu passiren hatten, geschehen ist, — aber trotzdem haben auch bei dem Wasser die Dämpfe sich auf Kosten des Calorimeters erwärmt, und es ist deshalb auch hier eine Correction nothwendig.

Es lässt sich indessen diese Correction mit einer irgendwie begründeten Genauigkeit an den Versuchen nicht anbringen. Hätte man dieselbe aber auch ausgeführt, so bliebe doch die andere Ungenauigkeit bestehen, dass die Temperaturen, auf welche die Gesammtwärmen zu beziehen sind, nicht bekannt sind; nur weiss man, dass sie höher sind, als sie Regnault angegeben hat. Dieser letzte Umstand ist von grosser Bedeutung, weil es sich dabei nicht um eine kleine Grösse, sondern um viele Grade handelt. Denn da Regnault die Temperatur durch den Druck des Dampfes bestimmte, dieser selbst aber nur sehr klein ist, so übt eine Druckdifferenz, welche zwischen dem Druck des gesättigten Wasserdampfes im Recipienten und dem Druck im Manometer vorhanden ist, einen grossen Einfluss auf die Temperaturbestimmung aus. Regnault selbst bemerkt diesen Umstand, indem er sagt: la différence de pression peut être une fraction notable de la pression totale, parce que celle-ci est très-petite.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass sich, wie schon bemerkt wurde, eine Correction an den von Regnault in dem Temperaturintervall von -2^0 bis $+16^0$ beobachteten Werthen mit Genauigkeit nicht anbringen lässt, dass die uncorrigirten Werthe aber entschieden zu gross sind.

Es ist nun möglich, die Gesammtwärme der Verdampfung für Wasser aus den Regnault'schen Beobachtungen zu berechnen, ohne auf die eben erwähnten Beobachtungen zwischen den Temperaturen -2^0 und $+16^0$ Rücksicht zu nehmen; es ist dieser Schritt sogar nothwendig, weil erkannt ist, dass die fraglichen Beobachtungen zu ungenau sind, um ihnen das Recht zu geben, auf das ganze Resultat einen Einfluss auszuüben.

§ 8.

Um mir ein Bild zu machen, in welcher Weise die Beobachtungen Regnault's durch die gerade Linie, welche seiner Formel entspricht, dargestellt werden, habe ich beide graphisch aufgezeichnet und dabei erfahren, dass die meisten Beobachtungen kleinere Werthe aufweisen, als die entsprechenden Werthe der Linie sie zeigen; nur einige Beobachtungen in den höheren Temperaturen über 170^0 und jene in dem Intervall von $-2{,}2^0$ bis $+16^0$ liegen oberhalb der verzeichneten Linie. Lässt man die letzteren Beobachtungen aus den im vorigen Paragraphen angegebenen Gründen ausser Betracht und setzt voraus, dass statt ihrer viel kleinere Werthe der Wirklichkeit entsprechen müssen, so sieht man, dass eine gerade Linie die Beobachtungen nicht mit hinreichender Genauigkeit darstellen kann. Ich habe daher statt einer Gleichung mit zwei Constanten eine solche mit vier Constanten zur Darstellung der Gesammtwärme λ gewählt. Es tritt indess hierdurch für die Berechnung der Verdampfungswärme, welche gerade für die mechanische Wärmetheorie von Bedeutung ist, keine Complication ein, weil diese ja auch bisher wegen der Aenderung der specifischen Wärme des Wassers mit wachsender Tem-

peratur durch eine Gleichung mit vier Constanten dargestellt wurde.

In der Gleichung:

$$\text{(VI)} \qquad \lambda = A + B.t + C.t^2 + D.t^3$$

wurde die Constante A gleich 589,5 gesetzt; mit diesem Werthe wird die Dichte des Wasserdampfes bei 0° gleich 0,6235. Die übrigen Constanten erhielten folgende Werthe:

$$A = 589{,}5 \qquad C = -0{,}003\,194\,7$$
$$B = 0{,}7028 \qquad D = 0{,}000\,008\,447.$$

Bezeichnet man mit q die Wärmemenge, welche nothwendig ist, um die Gewichtseinheit Wasser von 0° auf t^0 zu erwärmen, so ist die Verdampfungswärme r bei der Temperatur t^0 gleich:

$$r = \lambda - q$$

und da:

$$q = t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}000\,000\,3\,t^3,$$

so ist:

$$\text{(VII)} \quad r = 589{,}5 - 0{,}2972\,t - 0{,}003\,214\,7\,t^2 + 0{,}000\,008\,147\,t^3.$$

Es ist nun zunächst nachzuweisen, dass die Werthe, welche die von uns aufgestellte Formel für λ in den verschiedenen Temperaturen liefert, mit den Beobachtungen Regnault's wenigstens ebenso gut übereinstimmen, wie die Werthe, welche nach der Regnault'schen Formel berechnet sind.

In der folgenden Tabelle IX habe ich eine Zusammenstellung der Beobachtungen und Berechnungen gemacht, welche eine Vergleichung der Resultate nach beiden Formeln zulässt.

Die Tabelle zerfällt in drei Abschnitte. Der erste Abschnitt bezieht sich auf Temperaturen zwischen 63° und 88°. Die Beobachtungen sind der Tabelle III Regnault's (p. 710) entnommen. Der zweite Abschnitt enthält den Beobachtungswerth für 99,88°, welcher von Regnault aus 38 Beobachtungen in der Nähe von 100° abgeleitet ist; die Beobachtungen finden sich in Tabelle I Regnault's (p. 694 bis 697). Der dritte Abschnitt bezieht sich auf die

Beobachtungen über 100°, die von Regnault in Tabelle II (p. 702 bis 707) niedergelegt sind. Diese Tabelle enthält bei Regnault 73 Versuche; ich habe dieselbe dadurch abgekürzt, dass ich die Werthe der Gesammtwärme, welche von Regnault für nahe übereinstimmende Temperaturen gefunden waren, in einen Mittelwerth zusammengefasst, und den dazu gehörigen Mittelwerth der Temperatur gebildet habe. Aus der ersten Rubrik des dritten Abschnittes der folgenden Tabelle unter Nr. ersieht man, wie viele Versuche jedesmal zu einem Mittelwerthe zusammengefasst wurden.

Tabelle IX.

1. Abschnitt.

Nr. des Versuchs	Temperatur des Dampfes $= t$	Gesammtwärmen nach			Differenz von	
		den Beobachtungen von Regnault	der Formel von Regnault	der Formel von Winkelmann	3 und 4	3 und 5
1	2	3	4	5		
1	88,11	633,4	633,4	632,4	±0,0	+0,9
2	87,83	633,1	633,2	632,3	−0,1	+0,8
3	85,97	628,4	632,7	631,7	−4,3	−3,3
4	85,24	628,6	632,5	631,5	−3,9	−2,9
5	85,20	631,7	632,5	631,5	−0,8	+0,2
6	84,68	629,9	632,3	631,2	−2,4	−1,3
7	83,08	628,9	631,8	630,7	−2,9	−1,8
8	82,66	631,0	631,7	630,6	−0,7	+0,4
9	81,03	628,8	631,2	630,0	−2,4	−1,2
10	80,60	627,7	631,1	629,9	−3,4	−2,2
11	80,37	628,8	631,0	629,8	−2,2	−1,0
12	80,17	630,2	630,9	629,7	−0,7	+0,5
13	79,55	630,1	630,8	629,5	−0,7	+0,7
14	78,28	627,0	630,3	629,0	−3,3	−2,0
15	76,50	628,6	629,8	628,3	−1,2	+0,3
16	71,35	624,4	628,2	626,4	−3,8	−2,0
17	71,11	622,2	628,1	626,3	−5,9	−4,1
18	70,49	626,9	628,0	626,1	−1,1	+0,8
19	69,70	626,4	627,7	625,7	−1,3	+0,7
20	68,01	622,5	627,3	625,1	−4,8	−2,6
21	66,30	624,7	626,7	624,5	−2,0	+0,2
22	64,34	622,9	626,1	623,9	−3,2	−1,0
23	63,02	625,5	625,7	623,2	−0,2	+2,3

2. Abschnitt.

7—44	99,88	636,67	636,96	636,22	−0,29	+0,45

Tabelle IX.

3. Abschnitt.

Nr. des Versuchs	Temperatur des Dampfes $= t$	Gesammtwärmen nach den Beobachtungen von Regnault	der Formel von Regnault	der Formel von Winkelmann	Differenz von 3 und 4	3 und 5
1.	2	3	4	5		
1, 2	119,42	642,05	642,92	642,23	−0,87	−0,18
3—5	124,32	643,23	644,40	643,72	−1,17	−0,49
6, 7	128,10	644,95	645,57	647,86	−0,62	−0,09
8—14	135,02	648,00	647,68	646,94	+0,32	+0,94
15—18	137,55	647,65	648,45	647,85	−0,80	±0,00
19—21	142,23	648,63	649,85	649,13	−1,22	−0,50
22—24	144,00	649,80	650,42	649,68	−0,62	+0,12
25—27	145,43	650,00	650,86	650,13	−0,86	−0,13
28, 29	147,05	650,35	651,35	650,63	−1,00	−0,28
30, 31	149,60	652,70	652,15	651,48	+0,57	+1,23
32, 33	153,80	650,15	653,41	652,78	−3,26	−2,63
34—38	155,30	651,14	653,87	653,25	−2,73	−2,11
39—41	157,13	652,10	654,43	653,83	−2,33	−1,73
42—44	160,83	653,60	655,55	655,03	−1,95	−1,43
45, 46	164,75	654,45	656,75	656,33	−2,30	−1,88
47—50	172,40	655,55	659,20	658,99	−3,77	−3,44
51—54	173,80	656,00	659,51	659,48	−3,51	−3,48
55, 56	175,40	656,10	660,00	660,08	−3,90	−3,98
57—60	179,62	662,35	661,28	661,62	+1,07	+0,73
61—64	183,52	662,45	662,47	663,09	−0,02	−0,64
65, 66	186,00	664,70	663,23	664,05	+1,42	+0,65
67—69	188,10	664,83	663,87	664,89	+0,97	−0,06
70—73	194,37	665,70	665,78	667,43	−0,08	−1,73

Eine Vergleichung der Differenzen lässt leicht erkennen, dass die von mir aufgestellte Formel für die Gesammtwärme λ den Beobachtungen besser entspricht als die von Regnault berechnete Formel.

Was zunächst den ersten Abschnitt der Tabelle IX betrifft, so wurde schon bemerkt, dass bei Regnault die Differenzen durchgehends das negative Vorzeichen besitzen; bei den Differenzen für meine Formel kommen dagegen beide Vorzeichen fast gleichmässig vor. Die mittlere Differenz ist −2,2 bei Regnault; bei mir ist dieselbe ohne Rücksicht auf das Vorzeichen 1,4, mit dieser Rücksicht dagegen −0,7, sodass also auch meine Werthe durchschnittlich grösser, als die beobachteten sind. Die Ursache

hiervon liegt in der Grösse des Werthes, welcher in dem zweiten Abschnitt enthalten ist.

Der zweite Abschnitt umfasst 38 Versuche in der Nähe von 100°. Der Mittelwerth 636,67 ist von Regnault selbst angegeben, während die mittlere Temperatur 99,88° von mir berechnet wurde; es hat indessen kaum einen Einfluss (nämlich nur 0,03), ob der Mittelwerth für 100° oder für 99,88° angenommen wird. Die Formel Regnault's liefert auch diesen Mittelwerth grösser, als die Beobachtung, während meine Formel einen kleinern Werth darstellt. Fasst man die Beobachtungen der beiden ersten Abschnitte zusammen, und berücksichtigt man, dass der Mittelwerth für die Temperatur 99,88° aus 38 Beobachtungen resultirt, also auch das 38fache Gewicht gegenüber den Einzelbeobachtungen im ersten Abschnitte hat, so findet man nach meiner Formel als mittlere Abweichung + 0,025, während die Regnault'sche Formel die mittlere Abweichung − 1,01 ergibt.

Der dritte Abschnitt der obigen Tabelle zeigt ebenfalls eine genügende Uebereinstimmung. Ohne Rücksicht auf das Vorzeichen beträgt bei Regnault's Formel die mittlere Differenz 1,46, bei meiner Formel 1,24; mit Rücksicht auf das Vorzeichen erhält man bei der erstern − 1,13, bei der letztern dagegen − 0,92. Es stimmt also auch bei diesem Abschnitte meine Formel besser als die Regnault'sche Formel mit den Beobachtungen, wenn auch der Unterschied nicht so gross wie oben ist. Die Beobachtungen, welchen die Nummern 47 bis 56 entsprechen, haben auffallend kleine Werthe geliefert, und sie sind es, welche besonders die immerhin noch grosse negative mittlere Abmachung hervorrufen.

Jedenfalls ist durch die Tabelle IX bewiesen, dass meine Formel den Beobachtungen Regnault's sich entschieden besser anschliesst als die Formel von Regnault. Ich habe geglaubt, diesen Nachweis so ausführlich liefern zu müssen, weil bisher überall die Formel von Regnault angewandt ist, und weil man sich nur dann entschliessen

wird, von dieser Formel abzugehen, wenn man die Ueberzeugung gewonnen hat, dass dieselbe nicht hinreichend den Beobachtungen entspricht und durch eine bessere ersetzt werden kann.

§ 9.

Mit Hülfe der Formel VII für die Verdampfungswärme r lässt sich neuerdings die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes berechnen. Nach der mechanischen Wärmetheorie ist:

$$\frac{r}{u} = A \, . \, T \cdot \frac{dp}{dt}, \qquad \text{wo } u = \frac{1}{\gamma} - 0{,}001 \text{ ist,}$$

und γ die Dichtigkeit des Wasserdampfes bedeutet.

Bezeichnet man mit r_1 den Regnault'schen Werth der Verdampfungswärme bei der Temperatur t und den daraus sich ergebenden Werth von u mit u_1, und ebenso den Werth meiner Formel mit r_2 und dem entsprechend den Werth von u mit u_2, so ist:

$$\frac{r_2}{u_2} = \frac{r_1}{u_1}, \quad \text{und daher} \quad u_2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot u_1 \, .$$

Nach dieser Gleichung habe ich die Werthe von u neu berechnet und aus diesen die Dichte des gesättigten Wasserdampfes, bezogen auf Luft als Einheit, abgeleitet. Bei dieser Berechnung ist Rücksicht darauf genommen, dass das specifische Volumen des flüssigen Wassers mit wachsender Temperatur wächst. Solange der Werth von u nicht klein ist, hat die Aenderung des specifischen Volumens keinen Einfluss auf die Werthe, welche sich für die Dichte des Wasserdampfes ergeben; es gilt dies bis zu der Temperatur von etwa 130°, bei höheren Temperaturen macht sich aber dieser Einfluss geltend. Um bei höheren Temperaturen das specifische Volumen des Wassers zu berechnen, habe ich die Beobachtungen von Hirn benutzt, welcher die Ausdehnung des Wassers bis zu 182° verfolgt hat und das Volumen des Wassers oberhalb 100° durch die folgende Gleichung darstellt:

$$v = 1 + a\,t + b\,t^2 + ct^3 + dt^4,$$

wo $\log a = 0{,}03611 - 4$ $\log b = 0{,}48817 - 6$

$\log c = 0{,}45833 - 9$ $\log d = 0{,}82254 - 12$

und d negativ zu setzen ist.

Nach dieser Formel wurden für das specifische Volumen des Wassers folgende Werthe berechnet:

Temperatur	Specifisches Volumen	Temperatur	Specifisches Volumen
133,91	0,00107	175,77	0,00112
144,00	0,00108	180,31	0,00113
152,22	0,00109	184,50	0,00113
159,22	0,00110	188,41	0,00114
165,34	0,00110	192,08	0,00114
170,81	0,00111	195,53	0,00115

Um den Einfluss zu zeigen, welchen diese Werthe haben, sei bemerkt, dass man bei 195,53° mit dem Werthe 0,00115 für die Dichte des Wasserdampfes 0,68190 erhält, während sich mit dem Werthe 0,001, also ohne Rücksicht auf die Aenderung des specifischen Volumens, für die Dichte 0,68265 ergibt: die entsprechenden Zahlen bei 133,91° sind 0,65487 und 0,65491. Wie man sieht, ist hier der Einfluss der Aenderung des specifischen Volumens mit der Temperatur schon fast verschwindend, und ich habe in den tieferen Temperaturen für das specifische Volumen die constante Grösse 0,001 eingeführt.

In den Zahlen, welche sich in der 5. Reihe der folgenden Tabelle finden, und welche für die Dichte des Wasserdampfes nach der Formel Regnault's grösstentheils von Zeuner berechnet sind, ist überall für das specifische Volumen 0,001 eingeführt.

Die folgende Tabelle enthält neben den Werthen der Dichte auch die Temperaturen des gesättigten Wasserdampfes berechnet nach der Formel $\mathrm{I_a}$:

$$(\mathrm{I_a}) \qquad t_n = 200 \, . \, n^{\frac{d_n}{d} \, . \, A} - 100,$$

wo n den Druck in Atmosphären, d_n die Dichte des gesättigten Wasserdampfes bei dem Drucke von n Atmosphären, bezogen auf Luft als Einheit, d die constante

Dichte des Dampfes im überhitzten Zustande = 0,6225 bezeichnet und

$$A = 0{,}13507$$

gesetzt ist.

Tabelle X.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmosphären = n	Temperatur des Dampfes = t_n nach den Beobachtungen	Verdampfungswärmen nach der Formel von		Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bezogen auf Luft als Einheit = d_n nach der Formel von		Temperatur des gesätt. Wasserdampfes = t_n, berechnet nach Formel I a	Differenz der Werthe in 2 und 7
		Regnault	Winkelmann	Regnault	Winkelmann		
1	2	3	4	5	6	7	8
$^1/_{128}$	3,61	603,94	588,40	0,60740	0,62344	3,75	−0,14
$^1/_{64}$	13,95	596,90	584,74	0,61077	0,62344	13,95	±0,00
$^1/_{32}$	25,14	589,03	580,13	0,61427	0,62370	25,12	+0,02
$^1/_{16}$	37,31	580,56	574,35	0,61836	0,62506	37,32	−0,01
$^1/_8$	50,64	571,22	567,26	0,62283	0,62717	50,72	−0,08
$^1/_4$	65,36	560,91	558,62	0,62780	0,63024	65,46	−0,10
$^1/_2$	81,71	549,42	548,19	0,63357	0,63501	81,78	−0,07
1	100,00	536,50	535,78	0,64016	0,64251	100,00	±0,00
2	120,60	521,88	521,16	0,64838	0,64926	120,51	+0,09
3	133,91	512,35	511,63	0,65400	0,65487	133,79	+0,12
4	144,00	505,12	504,37	0,65860	0,65951	143,89	+0,11
5	152,22	499,20	498,50	0,66244	0,66320	152,13	+0,09
6	159,22	494,13	493,57	0,66586	0,66638	159,14	+0,08
7	165,34	489,69	489,30	0,66903	0,66930	165,32	+0,02
8	170,81	485,72	485,54	0,67168	0,67160	170,79	+0,02
9	175,77	482,10	482,18	0,67430	0,67383	175,77	±0,00
10	180,31	478,79	479,16	0,67673	0,67574	180,32	−0,01
11	184,50	475,73	476,41	0,67900	0,67769	184,55	−0,05
12	188,41	472,85	473,88	0,68120	0,67911	188,43	−0,02
13	192,08	470,13	471,52	0,68332	0,68066	192,11	−0,03
14	195,53	467,60	469,38	0,68527	0,68190	195,50	+0,03

Die Verdampfungswärmen r in den Reihen 3 und 4 der vorstehenden Tabelle zeigen in den niedrigen Drucken grosse Unterschiede; die Werthe meiner Formel sind durchgehends kleiner, als die Werthe nach der Formel Regnault's. Es entspricht dies dem veränderten Gang in der Gesammtwärme λ, welche in den niedrigen Drucken aus dem früher angegebenen Grunde von Regnault entschieden zu gross angenommen wurde. In den höheren Drucken (grösser als $^1/_2$ Atmosphäre) sind die Differenzen der beiden Formeln nur gering.

Ein ähnlicher Gang wie bei der Verdampfungswärme

findet sich auch bei den Dichten. Während die Formel Regnault's unterhalb 50° kleinere Werthe für die Dichte liefert, als die theoretische Dichte 0,6225 beträgt, liefert meine Formel grössere Werthe und hebt somit den Widerspruch zwischen dem Resultate der mechanischen Wärmetheorie und dem theoretisch abgeleiteten Werthe auf. Sobald die Temperatur auf 81° steigt, sind die Unterschiede beider Werthe nach Regnault und mir nur gering, sie erreichen nirgends 0,5 Proc.; bis zu der Temperatur von 170,81° sind die Dichten, welche nach meiner Formel berechnet sind, grösser, als die älteren Werthe; über 170,81° tritt das Umgekehrte ein. Weiter als bis 195° ist die Berechnung nicht geführt, weil die Beobachtungen Regnault's über die Gesammtwärmen sich nicht weiter erstrecken.

Was endlich die Temperaturen des gesättigten Wasserdampfes betrifft, welche nach der Formel I_a mit Hülfe der in der 6. Reihe der Tabelle X gegebenen Werthe der Dichten berechnet wurden, so sieht man, dass dieselben mit den Beobachtungen recht gut übereinstimmen. Die Differenz (siehe die letzte Reihe der obigen Tabelle) überschreitet nirgends 0,14°; die mittlere Differenz beträgt ohne Rücksicht auf das Vorzeichen 0,05°, und mit Rücksicht auf dasselbe Null. Die vorhandenen Differenzen würden durch sehr kleine Aenderungen in den Dichten vollständig verschwinden. Uebrigens ist auch zu bemerken, dass in den unteren Temperaturen die Beobachtungen eine geringere Genauigkeit besitzen, weil eine sehr geringe Vermehrung der Spannkraft schon eine bedeutende Temperaturerhöhung bedingt; so entspricht beispielsweise bei 4° einer Aenderung der Spannkraft von 0,04 mm schon eine Temperaturerhöhung von 0,1°. Dies ist auch der Grund, weshalb die beiden Beobachtungen von Magnus und Regnault, obwohl sie vorzüglich übereinstimmen, in den niedrigen Temperaturen doch Abweichungen zeigen, welche 0,1° übersteigen; während nach Regnault dem Drucke von $^1/_{128}$ Atmosphäre die Temperatur 3,61° (wie Reihe 2

der Tabelle X angegeben) entspricht, erhält man nach Magnus für denselben Druck 3,77°. Die berechnete Temperatur (Reihe 7 der Tabelle X) 3,75 liegt zwischen beiden Beobachtungen. Jedenfalls wird man behaupten können, dass zwischen der Beobachtung und der Berechnung (nach der Formel I_a § 4) der Temperaturen des gesättigten Wasserdampfes eine Uebereinstimmung besteht, wie sie grösser gar nicht erwartet werden konnte. Die einfache Beziehung, welche in der Formel I_a zwischen Temperatur, Druck und Dichte des gesättigten Wasserdampfes aufgestellt ist, entspricht den Beobachtungen; die geringen noch vorhandenen Differenzen lassen sich leicht erklären. Schliesslich sei noch bemerkt, dass wenn genauere Versuche über die Dichte des gesättigten Wasserdampfes diese grösser als in der 6. Reihe der Tabelle X liefern würden, dieses Resultat dann keinen Einfluss auf die Formel I_a ausüben könnte, wenn die Dichten für alle Temperaturen in gleichem Verhältnisse zunähmen; in diesem Falle würde es hinreichen, den Werth A in gleichem Verhältnisse abnehmen zu lassen, um für $\frac{d_n}{d} \cdot A$ die früheren Werthe wieder zu erhalten.

Vorläufig wird man aber bei dem angegebenen Werthe von A stehen bleiben und diesen auch für die anderen Dämpfe verwenden.

Schluss im nächsten Heft.

III. *Ueber die Newton'schen Staubringe; von Karl Exner.*

In meiner Abhandlung „Ueber die Fraunhofer'schen Ringe, die Quetelet'schen Streifen und verwandte Erscheinungen"[1]), habe ich die Gründe auseinandergesetzt, aus welchen ich einige von Hrn. E. Lommel über den-

1) Exner, Wien. Ber. **76.** 1877.

selben Gegenstand ausgesprochene Ansichten für unrichtig halte. Hr. Lommel vertheidigt nun seine Resultate in einer eben erschienenen Abhandlung „Ueber die Newton'schen Staubringe“.[1])

Hr. Lommel hat es nicht versucht, die von mir gegebenen Beweise der Unrichtigkeit seiner Resultate zu widerlegen, hat vielmehr neue Beweise für seine Behauptungen erbracht. Ich werde im Folgenden zeigen, dass auch die neuen Beweise unrichtig sind und überdies Hrn. Lommel's Theorie direct durch das Experiment widerlegen.

Vorerst erlaube ich mir die folgende Bemerkung:

Hr. Lommel macht mir an verschiedenen Stellen seiner Abhandlung Vorwürfe, welche darauf abzielen, ich hätte den Grundsatz der geometrischen Optik, nach welchem Lichtstrahlen bei ihrer Vereinigung ihre Intensitäten summiren, auf die Berechnung von Interferenzerscheinungen angewendet. Da Hr. Lommel diese Behauptung nicht weiter begründet, kann ich mich damit begnügen, zu bemerken, dass eine solche Verwechselung in keiner meiner Abhandlungen vorkommt.

Ich wende mich zunächst zu jenem Theile der Abhandlung des Hrn. Lommel, in welchem eine neue Berechnung der Newton'schen Staubringe bei beliebig gestellter Bestäubungsebene gegeben ist. Hr. Lommel leitet seine Berechnung mit den folgenden Worten ein:

„Befindet sich ein beugender Schirm vor einem ebenen Spiegel, und fällt ein Lichtbündel durch den Schirm auf den Spiegel, so durchdringt dasselbe den Schirm zweimal, nämlich auf dem Hinwege vor der Reflexion und auf dem Rückwege nach der Reflexion. Das gebeugte Licht, welches bei dem ersten Durchgange entstanden ist, gelangt, nachdem es an dem Spiegel zurückgeworfen worden, durch den Schirm hindurch wieder nach vorn und interferirt mit dem gebeugten Lichte, welches beim Durchgange des reflectirten

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 193. 1879.

Lichtbündels durch den Schirm entsteht. Es handelt sich darum, das Resultat dieser Interferenz zu ermitteln".

Hr. Lommel führt nun eine bekannte Art, den Gegenstand zu behandeln, ein, indem er fortfährt:

„Mit dieser Anordnung ist die folgende, welche wir unserer Betrachtung zu Grunde legen, vollkommen gleichbedeutend. Wir denken uns 2 Schirme, von welchen der eine das Spiegelbild des andern ist, auf dem Wege des einfallenden Lichtes hintereinander aufgestellt. Wir bezeichnen die beiden Schirme in der Reihenfolge, in welcher sie von dem einfallenden Lichtbündel getroffen werden, als ersten und zweiten Schirm. Alsdann interferiren sämmtliche am ersten Schirme gebeugte Strahlen, welche in einem Punkte der Bildfläche zusammentreffen, mit allen am zweiten Schirme gebeugten Strahlen, welche in demselben Bildpunkte vereinigt werden. Wir setzen ferner voraus, dass das einfallende Lichtbündel von einem unendlich fernen Lichtpunkte herkomme, dass es also aus parallelen Strahlen bestehe, oder, was dasselbe ist, dass die zugehörige Welle eine Ebene sei."

Es wird nun die Voraussetzung gemacht, dass sich das Phänomen auf einen unendlich entfernten Schirm projicire, oder vermittelst eines auf unendlich eingestellten Fernrohres betrachtet werde, sodass in jedem Punkte des Phänomens parallel austretende gebeugte Strahlen zur Interferenz kommen. Es wird ein rechtwinkliges Coordinatensystem in die Figur gelegt, dessen xy-Ebene in der Spiegelebene liegt, und dessen positive z-Axe gegen den Beobachter gerichtet ist. Es wird vorausgesetzt, dass die Richtung der einfallenden Strahlen von der Spiegelnormale nur wenig abweiche, dass die Staubplatte die Gestalt einer Ebene habe von der Gleichung;

$$(A) \qquad z = e + fx + gy$$

und angenommen, dass die Bestäubung eine spärliche sei, oder dass die einzelnen Staubtheilchen durch verhältnissmässig grosse Zwischenräume voneinander getrennt seien,

und dass der Umstand, dass die einfallende Welle an dem zweiten Schirme bereits durchlöchert ankommt, unberücksichtigt bleiben dürfe. Es wird hierauf, wie ich dies früher schon gethan habe, das Babinet'sche Princip in die Rechnung eingeführt und als Resultat der Interferenz der vom ersten Schirme in irgend einer Richtung gebeugten Strahlen auf dem gewöhnlichen Wege der Zusammensetzung der Elementarstrahlen erhalten:

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= -\tfrac{1}{2} n \sqrt{C_1^{\,2} + S_1^{\,2}} \sin\left(p + es - \operatorname{arc\,tg} \frac{S_1}{C_1}\right) \\ &\qquad \text{und für den zweiten Schirm:} \\ E_2 &= -\tfrac{1}{2} n \sqrt{C_2^{\,2} + S_2^{\,2}} \sin\left(p - es - \operatorname{arc\,tg} \frac{S_2}{C_2}\right). \end{aligned} \right.$$

Hier bedeuten E_1 und E_2 die resultirenden Excursionen der von den beiden Schirmen in irgend einer Richtung gebeugten Elementarstrahlen und ist gesestzt:

$$(C)\quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= \iint \cos\big((q - fs)x + (r - gs)y\big)\,\partial x\,\partial y \\ S_1 &= \iint \sin\big((q - fs)x + (r - gs)y\big)\,\partial x\,\partial y \\ C_2 &= \iint \cos\big((q + fs)x + (r + gs)y\big)\,\partial x\,\partial y \\ S_2 &= \iint \sin\big((q + fs)x + (r + gs)y\big)\,\partial x\,\partial y\ , \end{aligned} \right.$$

wo sich die Doppelintegrale über die Projectionen der Staubtheilchen auf die Spiegelebene erstrecken und:

$$(D)\quad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{2\pi}{\lambda}(vt - k), \qquad & q &= \frac{2\pi}{\lambda}(l - a), \\ r &= \frac{2\pi}{\lambda}(m - b), \qquad & s &= \frac{2\pi}{\lambda}(n - c). \end{aligned} \right.$$

a, b, c sind die Richtungscosinus der gebeugten Strahlen, l, m, n die der einfallenden Strahlen, k die Entfernung des Coordinatenanfanges vom Vereinigungspunkte der Strahlen.

Hr. Lommel fährt fort:

„Wir denken uns jetzt die xy-Ebene durch zwei Schaaren äquidistanter Geraden, welche resp. parallel der x- und y-Axe laufen, in lauter gleiche Rechteckchen zer-

legt, deren Seiten parallel der x- und y-Axe, resp. $= u$ und v seien, und die Schirmebene mit unter sich gleichen etwa kugelrunden Partikelchen (z. B. Bärlappsamen) derart bestäubt, dass auf ein jedes Rechteckchen die kreisförmige Projection je eines Körperchens treffe und zwar so, dass diese Projection innerhalb des Rechteckchens beliebig gelagert sei, jedoch nirgends über dessen Umfang hinausrage. Diese Art der Bestäubung, bei welcher, obschon der Willkür in der Anordnung noch ein grosser Spielraum gelassen ist, . . ."

Hr. Lommel hat zwar nicht das Recht, anzunehmen, dass je ein Partikelchen auf eines seiner Rechteckchen falle, da bei der Erzeugung des Phänomens die Bestäubung eine völlig unregelmässige ist; da ich jedoch aus meinen eigenen Rechnungen weiss, dass durch die gemachte Annahme das Resultat so lange nicht geändert wird, als die Unregelmässigkeit der Bestäubung nicht als nahezu aufgehoben erscheint, so erhebe ich gegen diese Annahme keinen Einspruch.

Hr. Lommel berechnet nun die Excursion E_1', welche von zwei Partikelchen des ersten Schirmes herrührt, welche so liegen, dass ihre Projectionen auf die xy-Ebene in zwei bezüglich des Coordinatenanfanges einander diametral gegenüberliegende Rechteckchen fallen und findet:

$$
(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} E_1' = n\,\Gamma_1 \cos\left[q_1\left((i+\tfrac{1}{2})\,u + \frac{\delta+\delta'}{2}\right) + r_1\left((k+\tfrac{1}{2})\,v + \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}\right)\right] \\ \times \sin\left(p - q_1\,\frac{\delta-\delta'}{2} - r_1\,\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2} + es\right). \end{aligned}\right.
$$

Hier ist gesetzt:

$$
(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{aligned} &\Gamma_1 = \iint \cos(q_1\,\xi + r_1\,y)\,\partial\xi\,\partial\eta, \\ &q_1 = q - fs, \qquad r_1 = r - gs, \end{aligned}\right.
$$

und bedeuten ξ und η die vom Mittelpunkte der kreisförmigen Projection eines Stäubchens auf die xy-Ebene als Anfang gezählten Coordinaten der Punkte im Innern dieser Projection, i und k positive ganze Zahlen, δ und ε die von

dem Mittelpunkte des Rechteckchens aus gezählten Coordinaten des Mittelpunktes der Projection des einen Stäubchens, δ' und ε' dasselbe in Bezug auf das andere Stäubchen.

Hr. Lommel schliesst hieraus:

„Die beiden betrachteten Rechteckchen liefern demnach, wenn sie dem ersten Schirme zugehören, einen resultirenden Strahl E_1', dessen Phase die nämliche ist wie diejenige des Elementarstrahles, welcher von dem Punkte des ersten Schirmes ausgeht, dessen Coordinaten nach der x-, y- und z-Axe resp. sind:

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{\delta - \delta'}{2}, \qquad y' = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}, \\ z' = -\left(e + f\dfrac{\delta - \delta'}{2} + g \cdot \dfrac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}\right). \end{cases}$$

Construirt man daher auf der xy-Ebene um den Anfangspunkt ein kleines Rechteck, welches sich von:

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} x' = -(\tfrac{1}{2}u - R) \text{ bis } x'' = +(\tfrac{1}{2}u - R) \text{ und von} \\ y' = -(\tfrac{1}{2}v - R) \text{ bis } y'' = +(\tfrac{1}{2}v - R) \text{ erstreckt,} \end{cases}$$

(wo u und v die Seiten der angenommenen Rechteckchen und R den Radius der Projection eines Stäubchens vorstellen) so projicirt sich der Punkt des ersten Schirmes, welcher in der angegebenen Weise für die Phase des Strahles E_1' massgebend ist, nothwendig in das Innere dieses Rechteckchens . . .“

Ehe ich Hrn, Lommel weiter folge, will ich die Bedeutung der obigen Gleichungen (H) ins Auge fassen, indem ich numerische, dem Experimente entnommene Werthe substituire.

Befinde sich also die Bestäubungsebene in der Parallellage, sei die mittlere Entfernung benachbarter Partikelchen ungefähr 0,2 mm, der Radius eines Partikelchens 0,016 mm, dann ist:

$$u = v = 0{,}2 \text{ mm} \qquad R = 0{,}016 \text{ mm},$$

und wir haben nach Hrn. Lommel's Formeln:

$$x' = y' = -(\tfrac{1}{2}u - R) = -0{,}084 \text{ mm},$$
$$x'' = y'' = +(\tfrac{1}{2}u - R) = +0{,}084 \text{ mm},$$

sodass sich für die Seiten des Rechteckchens, in dessen Inneres der für die Phase des resultirenden Strahles massgebende Punkt des ersten Schirmes fallen muss, wir wollen sie α und β nennen, ergibt:

$$\alpha = \beta = 0{,}17 \text{ mm.}$$

Der nach Hrn. Lommel für die resultirende Phase massgebende Punkt hat sonach auf dem Schirme einen Spielraum von mindestens 0,17 mm. Sehen wir, welchen Spielraum sonach die Phase des resultirenden Strahles hat. Lassen wir den für die Phase des resultirenden Strahles massgebenden Punkt seine verschiedenen möglichen Positionen einnehmen, so ändert sich bei einem Beugungswinkel ψ die Phase des resultirenden Strahles um mindestens:

$$\frac{0{,}17 \text{mm}}{\lambda} \sin\psi \, . \, 2\pi \, ,$$

also für $\lambda = 0{,}0006$ mm um $283 \sin\psi \, . \, 2\pi$.

Setzen wir beispielsweise $\psi = 1^0$, so wird dieser Betrag ungefähr 10π.

Wir sehen: Während die beiden Partikelchen innerhalb der Rechteckchen, in welche sie Hr. Lommel verwiesen hat, in welchen selbst aber ihre Lage eine zufällige ist, ihre verschiedenen möglichen Positionen einnehmen, durchläuft die Phase des von den beiden Partikelchen herrührenden resultirenden Strahles mehr als einmal alle Werthe, die es gibt.

Ich ziehe also aus den Gleichungen des Hrn. Lommel den Schluss: „Die Phase des von den beiden Partikelchen herrührenden resultirenden Strahles ist so sehr durch den Zufall (die zufällige Lage der Partikelchen in ihren Rechteckchen) bestimmt, als wenn um dieselbe gewürfelt würde.

Ich schliesse weiter: Dasselbe gilt von allen ähnlichen Resultanten, welche aus dem Zusammenwirken je zweier in Beziehung auf den Anfangspunkt diametral einander gegenüberliegender Rechteckchen hervorgehen. Existirt daher zu jedem der Rechteckchen ein diametral gegenüberliegen-

des, wie Hr. Lommel annimmt, so können die unendlich vielen an der Staubschicht nach irgend einer Richtung gebeugten Elementarstrahlen durch eine endliche Zahl (gleich der Hälfte der Zahl der Staubtheilchen) gleichgerichteter Lichtstrahlen ersetzt werden, deren Phasen völlig zufällig sind. Aus der Vereinigung aller dieser Lichtstrahlen geht der resultirende Strahl E_1 hervor, dessen Phase folglich ebenfalls völlig zufällig (von der zufälligen Vertheilung der Partikelchen abhängig) ist. Hr. Lommel schliesst anders. Er sagt:

„Die Phase dieser Resultante wird nothwendig durch einen Punkt des Schirmes bestimmt, der sich auf die Spiegelebene ebenfalls im Innern des genannten Rechteckchens projicirt. Da nun die Phasen der zahlreichen Componenten zum Theil grösser, zum Theil kleiner sind als die dem Mittelpunkte entsprechende Phase, so wird der für die Phase der Resultante charakteristische Punkt diesem Mittelpunkte sehr nahe liegen. Lassen wir die kleine Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte vorerst ausser Acht, so gelangen wir zu dem folgenden mit grosser Annäherung gültigen Satze:

Wenn das bestäubte Flächenstück einen Mittelpunkt besitzt, und die Bestäubung eine gleichmässige ist, so hat der aus sämmtlichen an dieser Staubfläche gebeugten Strahlen resultirende Strahl die nämliche Phase wie der durch den Mittelpunkt der Bestäubung gebeugte Elementarstrahl.

Hr. Exner erklärt diesen in meiner frühern Abhandlung bereits angeführten Satz für offenbar unrichtig, ohne jedoch diesen Ausspruch irgendwie zu begründen."

Ohne Zweifel liegt der für die Phase der Resultante charakteristische Punkt dem Mittelpunkte sehr nahe, da für alle Phasen, die es gibt, charakteristische Punkte dem Mittelpunkte sehr nahe liegen. Aber eben deshalb durfte Hr. Lommel die kleine Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte nicht ausser Acht lassen. Er musste vielmehr den Grad der „grossen Annäherung", mit welcher sein Satz gelten soll, ermitteln, was keiner Schwierigkeit

unterlag, und würde hierbei, wie ich gezeigt habe, zu dem Resultate gelangt sein, dass dieser Satz mit gar keiner Annäherung richtig, dass er vielmehr einfach unrichtig ist.

Hr. Lommel hat diesen Satz schon in einer frühern Abhandlung hingestellt und wichtige Consequenzen aus demselben gezogen, ohne ihn zu beweisen, und ohne wie jetzt von einer nur annähernden Gültigkeit desselben zu sprechen.

Zu diesem Satze bemerkte ich damals, dass er unrichtig sei. Wir haben in der That gesehen, dass der Versuch eines Beweises missglückt ist.

Hr. Lommel fährt fort:

„Wie übrigens der beugende Schirm auch beschaffen sein mag, immer wird sich für jede Beugungsrichtung ein Punkt desselben oder eine Reihe von Punkten derart angeben lassen, dass der resultirende Strahl dieselbe Phase hat, wie der von einem dieser Punkte nach derselben Richtung ausgehende Elementarstrahl. Bezeichnen wir nämlich (für den ersten Schirm) die Coordinaten eines solchen Punktes mit x_1, y_1, z_1, so brauchen wir . . . die Werthe x_1 und y_1 nur so zu wählen, dass die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad q_1 x_1 + r_1 y_1 = \text{arc tg} \frac{S_1}{C_1}$$

erfüllt sei".

Aus dieser Gleichung wird der folgende, zwar richtige, doch selbstverständliche Satz abgeleitet:

„Als massgebend für die Phase der Resultante aus den direct einfallenden Strahlen ist der durch den Schwerpunkt des Schirms gehende Elementarstrahl anzusehen".

Wie aus der Ableitung dieses Satzes, in welcher $q_1 = 0$ und $r_1 = 0$ gesetzt wird, hervorgeht, versteht Hr. Lommel unter den „direct einfallenden Strahlen" die direct einfallenden und sich direct, d. i. ungebeugt fortpflanzenden Strahlen. Diese Strahlen treffen sich in einem Punkte der Bildfläche ohne Phasendifferenz. Der resultirende Strahl stimmt also der Phase nach mit jedem einzelnen der

Strahlen, aus welchen er resultirt, überein, also auch mit jenem, welcher vom Schwerpunkte des Schirmes kommt. Deshalb sagte ich, der obige Satz sei selbstverständlich.

Hr. Lommel wählt von nun an die Projection dieses Schwerpunktes auf die Spiegelebene zum Coordinatenanfang. Er schreibt für eine beliebige Beugungsrichtung die Gleichung (J) unter der Form:

$$\text{(K)} \qquad q_1 x_1 + r_1 y_1 = \tfrac{1}{2} \varepsilon_1 \pi + k\pi,$$

wo „ε_1 eine Function von q_1 und r_1 vorstellt, deren numerische Werthe stets zwischen -1 und $+1$ liegen, und k alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeutet."

Ich habe, ehe ich weiter gehe, die Gleichung (K) richtig zu stellen. Wir haben für den resultirenden Strahl:

$$\text{(B)} \qquad E_1 = -\tfrac{1}{2} n \sqrt{C_1^2 + S_1^2} \sin\left(p + es - \operatorname{arc\,tg} \frac{S_1}{C_1}\right),$$

oder:

$$\text{(L)} \qquad E_1 = -\tfrac{1}{2} n \sqrt{C_1^2 + S_1^2} \sin(p + es - q_1 x_1 - r_1 y_1).$$

Nehmen wir an, die Grössen ε_1 und k seien so gewählt, dass die Gleichungen (B) und (L) gleiche Werthe für E_1 ergeben, so wird dies nicht mehr der Fall sein, wenn wir für k die Zahl $k \pm 1$ setzen, da dann der Ausdruck (L) das Zeichen wechselt. Es ist also nicht möglich, dass k alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeute. Die richtig gestellte Gleichung (K) lautet:

$$\text{(K')} \qquad q_1 x_1 + r_1 y_1 = \varepsilon_1 \pi + k \, . \, 2\pi,$$

wo k jede positive und negative ganze Zahl, ε_1 einen von den Grenzen der Integrale C_1 und S_1, und von q_1 und r_1 abhängige, innerhalb der Grenzen $+1$ und -1 liegende Grösse ist.

Hr. Lommel folgert aus der Gleichung (K):

$$\text{(L)} \qquad x_1 = \frac{\varepsilon_1 q_1}{q_1^2 + r_1^2} \frac{\pi}{2}, \qquad y_1 = \frac{\varepsilon_1 r_1}{q_1^2 + r_1^2} \frac{\pi}{2}$$

und weiter den Satz:

„Beschreiben wir daher in der xy-Ebene (Spiegel-

ebene) um die Projection des Schwerpunktes des Schirmes einen Kreis mit dem Radius:

(M) $$\frac{\pi}{2\sqrt{q_1^2 + r_1^2}},$$

so projicirt sich der Punkt, welcher für die Phase des resultirenden Strahles massgebend ist, ins Innere oder auf den Umfang dieses Kreises."

Hr. Lommel berechnet nun für den Fall der Parallellage der Bestäubung und der senkrechten Incidenz den Radius dieses Kreises näher und findet:

(N) $$\delta = \frac{\lambda}{4 \sin \psi},$$

wo ψ den Beugungswinkel bedeutet, berechnet δ für verschiedene Werthe von ψ und fügt hinzu:

„Für wachsende Beugungswinkel wird diese Grenze immer enger."

Es wäre lehrreich gewesen, hätte Hr. Lommel nicht die Grenzen berechnet, innerhalb deren die Lage des für die Phase des resultirenden Strahles massgebenden Punktes zufällig ist, vielmehr auch die Grenzen, innerhalb deren infolge dessen die Phase des resultirenden Strahles selbst zufällig ist. Es würde hierdurch die Bedeutung des obigen Satzes klar geworden sein. Wir wollen dies also nachtragen. Während der für die Phase des resultirenden Strahles massgebende Punkt sich innerhalb seiner Grenzen bewegt, ändert sich die Phase des resultirenden Strahles um:

(O) $$2\pi \frac{2\delta \sin \psi}{\lambda} = 2\pi \frac{2 \sin \psi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2 \sin \psi} = \pi,$$

d. i. für jeden beliebigen Beugungswinkel um volle 180°, und hätte Hr. Lommel statt der Gleichung (K) die richtige Gleichung (K') zu Grunde gelegt, so würden sich sogar volle 360° ergeben haben. Hr. Lommel konnte es sich also ersparen, durch numerische Substitutionen zu zeigen, dass für wachsende Beugungswinkel die Grenzen, innerhalb deren die Lage des für die Phase des resultirenden Strahles massgebenden Punktes zufällig ist, immer enger werden. Die Grenzen, innerhalb deren

die Phase des resultirenden Strahles selbst zufällig ist, sind bei wachsendem Beugungswinkel stets um 360° voneinander getrennt, d. h. die Phase kann jeden beliebigen Werth haben.

Was bedeutet also der richtig gestellte Satz des Hrn. Lommel?

Er besagt nicht mehr, als dass die Phase des resultirenden Strahles irgend einen Werth hat, also eigentlich gar nichts, ein Resultat, welches nach der der Rechnung zu Grunde gelegten Voraussetzungen zu erwarten war.

Hr. Lommel beweist nun den Satz:

„dass, wenn der beugende Schirm einen Mittelpunkt besitzt, die Resultante dieselbe Phase hat wie der durch den Mittelpunkt in derselben Richtung gebeugte Elementarstrahl."

Der Beweis selbst ist nur angedeutet. Ich kann also den Fehler in demselben nur vermuthen, nicht nachweisen. Doch genügt ein einfaches Beispiel, die Unrichtigkeit dieses Satzes vor Augen zu legen.

Nehmen wir einen beugenden Schirm mit zwei punktförmigen Oeffnungen an; derselbe besitzt nach Hrn. Lommel's Definition einen Mittelpunkt, welcher in der Mitte zwischen den beiden Oeffnungen liegt. Mögen die Lichtstrahlen senkrecht einfallen und der Beugungswinkel so gewählt sein, dass die Wegdifferenz zwischen den von den beiden Oeffnungen kommenden Elementarstrahlen einer Wellenlänge gleich sei. Indem sich die beiden Strahlen auf einem unendlich entfernten Schirme oder im Brennpunkte einer Linse treffen, befinden sie sich sowohl untereinander als mit der resultirenden Bewegung in Uebereinstimmung der Phase. Es besteht sonach zwischen dem resultirenden Strahle und dem vom Mittelpunkte des Beugungsschirmes kommenden Strahle eine Phasendifferenz von 180° oder einer halben Schwingungsdauer. Der obige Satz ist also unrichtig.

Im Verfolge seiner Entwickelung setzt Hr. Lommel:

(P) $\sqrt{C_1^2 + S_1^2} = N_1, \qquad \sqrt{C_2^2 + S_2^2} = N_2,$

findet:

$$\text{(Q)} \quad \begin{cases} E_1 = -\tfrac{1}{2} n N_1 \sin\big(p - q x_1 - r y_1 + s(e + f x_1 + g y_1)\big) \\ E_2 = -\tfrac{1}{2} n N_2 \sin\big(p - q x_2 - r y_2 - s(e + f x_2 + g y_2)\big) \end{cases}$$

und hieraus für die Intensität der Lichterscheinung, welche aus dem Zusammenwirken dieser beiden Strahlen hervorgeht:

$$\text{(R)} \quad \begin{cases} M^2 = \tfrac{1}{4} n^2 \Big[N_1^2 + N_2^2 + 2 N_1 N_2 \cos\Big(2s\Big(e + f\frac{x_1 + x_2}{2} + g\frac{y_1 - y_2}{2}\Big) \\ \qquad\qquad - q(x_1 - x_2) - r(y_1 - y_2)\Big)\Big] \end{cases}$$

Hr. Lommel folgert:

„Wenn die Schirmebene zur Spiegelebene parallel .... ist, so hat man ....

(T) $$M^2 = n^2 N^2 \cos^2 se,$$

(wo $N = N_1 = N_2$).

In diesem Ausdrucke stellt der Factor $n^2 N^2$ die Intensität des Beugungsbildes dar, welches der beugende Schirm allein hervorbringen würde. Der Factor $\cos^2 se$ dagegen liefert das bekannte kreisförmige Ringsystem, welches den der Spiegelnormale entsprechenden Punkt des Gesichtsfeldes concentrisch umgibt. Das Beugungsbild wird, wie man sieht, von diesen Ringen durchschnitten, d. h. längs eines dunkeln Ringes wird die Beugungserscheinung ausgelöscht. Dieser Umstand, welcher durch die Beobachtungen bestätigt wird (Exner, Ueber die Quetelet'schen Interferenzstreifen, Wien. Ber. 71., Lommel, Erlanger Ber. vom 12. Juli 1875; Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 103. 1878), spricht entscheidend zu Gunsten der Beugungstheorie; denn entstünden die Ringe durch Interferenz des an den Staubtheilchen diffundirten Lichtes, so könnte die gleichzeitig gesehene Beugungserscheinung nirgends ausgelöscht werden."

Dieser Beweis rührt von mir her. Ich habe densel-

ben in meiner ersten Abhandlung gegeben und in meiner letzten Abhandlung wiederholt.

Hr. Lommel schliesst weiter:

„Derselbe (der Ausdruck (R)) kann, wenn f und g nicht zu gross, und die Grössen x_1, y_1, x_2, y_2 so klein sind, dass die mit ihnen behafteten Glieder unter dem Cosinuszeichen gegen $2se$ vernachlässigt werden können (was namentlich der Fall sein wird, wenn die gleichmässig bestäubte Fläche einen Mittelpunkt besitzt), durch den folgenden Ausdruck angenähert ersetzt werden:

$$M^2 = \frac{1}{4} n^2 (N_1{}^2 + N_2{}^2 + 2 N_1 N_2 \cos 2 se). \tag{S}$$

Lassen wir diese Annäherung zu, so erscheint das Problem der Newton'schen Staubringe auf die Interferenz zweier Lichtstrahlen . . . . zurückgeführt, deren jeder von dem Schwerpunkte (Mittelpunkte) des zugehörigen Schirmes ausgeht.“

Hr. Lommel ist also in der That bei der Intensitätsgleichung (S) angelangt. Wir wollen die Schlüsse prüfen, durch welche das geschah.

Hr. Lommel sagt: „. . . . wenn . . . . die Grössen . . . . so klein sind, dass die mit ihnen behafteten Glieder unter dem Cosinuszeichen gegen $2se$ vernachlässigt werden können . . .“

Wir können nicht zugeben, dass $\cos(A + a) = \cos A$ gesetzt werden könne, wenn a gegen A sehr klein ist.

Diess ist nicht der Fall, es muss vielmehr die Bedingung erfüllt sein, dass a gegen π sehr klein sei.

Nun hat zwar Hr. Lommel gezeigt, dass die in dem vernachlässigten Gliede vorkommenden Grössen x_1, x_2, y_1, y_2 innerhalb gewisser Grenzen liegen, welche sich von der Null sehr wenig unterscheiden, hat es aber unterlassen, durch Substitution nachzuweissen, dass dasselbe von dem vernachlässigten Gliede gelte. Wir werden sehen, dass dies in keiner Weise der Fall ist, dass vielmehr das von Hrn. Lommel unter dem Cosinuszeichen vernachlässigte Glied jeden Werth zwischen $-\pi$ und $+\pi$ annehmen kann.

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die Lichtstrahlen parallel zur z-Axe einfallen, dass die Durchschnittslinie der Bestäubungsebene und der xy-Ebene der y-Axe parallel sei, und betrachten wir gebeugte Strahlen, welche in einer der xz-Ebene parallelen Richtung austreten.

Dann ist, wenn wir durch ψ den Beugungswinkel bezeichnen, näherungsweise:

(U) $$a = \psi, \qquad b = 0, \qquad c = 1 - \frac{\psi^2}{2}, \qquad g = 0.$$

x_1 ist eine Grösse, welche nach Gleichung (L) einen, zwischen den Grenzen:

$$\frac{q_1}{q_1^2 + r_1^2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{q_1}{q_1^2 + r_1^2}\,\frac{\pi}{2}$$

zufälligen Werth hat, während die Grenzen für x_2 sind:

$$+\frac{q_2}{q_2^2 + r_2^2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{q_2}{q_2^2 + r_2^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Nun ist:

$$q_1 = q - fs, \qquad q_2 = q + fs,$$
$$r_1 = r - gs, \qquad r_2 = r + gs.$$

Setzen wir für q, r, s, g ihre Werthe, so wird:

$$q_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(l - a) - f\frac{2\pi}{\lambda}(n - c) = -\frac{2\pi}{\lambda}\psi - f\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\psi^2}{2}, \qquad r_1 = 0,$$

$$q_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(l - a) + f\frac{2\pi}{\lambda}(n - c) = -\frac{2\pi}{\lambda}\psi + f\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\psi^2}{2}, \qquad r_2 = 0,$$

oder näherungsweise:

(V) $$q_1 = q_2 = -\frac{2\pi}{\lambda}\psi, \qquad r_1 = r_2 = 0.$$

Setzen wir diese Werthe in die oben angeführten Grenzwerthe von x_1 und x_2 ein, so ergibt sich: sowohl für x_1 als für x_2 sind die beiden Grenzen:

(W) $$\pm\frac{\lambda}{2\pi\psi}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Um also zu sehen, innerhalb welcher Grenzen der von Hrn. Lommel vernachlässigte Ausdruck:

$$2s\left(f\frac{x_1 + x_2}{2} + g\frac{y_1 + y_2}{2}\right) - q(x_1 - x_2) - r(y_1 - y_2)$$

liegt, welcher sich in unserem Falle, da g und r der Null gleich sind, zu:

$$2sf\frac{x_1+x_2}{2} - q(x_1-x_2)$$

vereinfacht, setzen wir in diesem Ausdrucke einmal:

(X) $$x_1 = +\frac{\lambda}{2\pi\psi}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad x_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\psi}\cdot\frac{\pi}{2},$$

sodann:

$$x_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\psi}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad x_2 = +\frac{\lambda}{2\pi\psi}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Wir erhalten im ersten Falle:

$$-q\frac{\lambda}{\pi\psi}\frac{\pi}{2} = -\left(-\frac{2\pi\psi}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\pi\psi}\frac{\pi}{2} = +\pi,$$

und im zweiten Falle:

$$+q\frac{\lambda}{\pi\psi}\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Also: Das von Hrn. Lommel unter dem Cosinuszeichen vernachlässigte Glied kann jeden Werth zwischen $-\pi$ und $+\pi$ annehmen.

Wenn also Hr. Lommel sagt: „Lassen wir diese Annäherung zu ....“, so können wir diese Annäherung nicht nur nicht zugeben, wir müssen sogar bestreiten, dass es sich hier um eine Annäherung handele. Indem Hr. Lommel, um zur Gleichung (S) zu gelangen, in der Gleichung (R) für den Cosinus, welcher jeden Werth zwischen -1 und $+1$ annehmen kann, den bestimmten Werth $\cos 2se$ setzt, wendet er nicht eine Vernachlässigung an, sondern begeht einen Irrthum. Hr. Lommel sagt zwar an anderer Stelle, dass x_1 und x_2, y_1 und y_2 voneinander nicht unabhängig seien, ist jedoch nicht in der Lage, irgend eine Grössenbeziehung zwischen diesen Coordinaten anzugeben.

Hrn. Lommel's Intensitätsgleichung S reducirt sich sonach zunächst darauf, dass die Intensität sich innerhalb der Grenzen:

$$M^2 = \tfrac{1}{4}n^2(N_1^2 + N_2^2 + 2N_1N_2)$$

und:

$$M^2 = \tfrac{1}{4}n^2(N_1^2 + N_2^2 - 2N_1N_2)$$

befindet; und da schliesslich Hr. Lommel nicht in der Lage ist, die Werthe von N_1 und N_2 in irgend einem Grade der Annäherung anzugeben, so zerfällt Hrn. Lommel's Intensitätsgleichung völlig in nichts.

Ich habe sonach keinen Grund, auf die Consequenzen einzugehen, welche Hr. Lommel aus dieser Intensitätsgleichung zieht, will jedoch Folgendes bemerken.

Hr. Lommel sagt:

„Bei schiefer Stellung der Staubplatte sind die Amplituden . . . der beiden zusammenwirkenden Strahlen im allgemeinen einander ungleich. Für Hrn. Exner ist dieser ganz selbstverständliche Satz „„nicht annehmbar““ . . . .“. Ich habe jedoch nicht sowohl diesen Satz, welcher, in solcher Allgemeinheit ausgesprochen, allerdings selbstverständlich ist, für unannehmbar erklärt, als vielmehr die Consequenzen, welche Hr. Lommel aus demselben gezogen hat. Die betreffende Stelle lautet: „Diese Erklärung ist nicht annehmbar.“ Hr. Lommel erklärt nämlich das Verschwinden der Ringe bei wachsender Neigung der Bestäubungsebene aus dieser Ungleichheit der Amplituden. Da Hr. Lommel nicht in der Lage ist, die Grösse dieser Ungleichheit in irgend einem Grade der Annäherung anzugeben, so werde ich diese Erklärung auch in Zukunft für unannehmbar halten müssen.

Eine weitere Consequenz, welche Hr. Lommel aus seiner Intensitätsgleichung zieht, ist ein neuer Beweis für die Beugungstheorie, welcher sich kurz so sagen lässt: Nach der Diffusionstheorie müssten bei der Ueberführung der Bestäubungsebene in die schiefe Lage die Ringe sich zusammenziehen, nach der Beugungstheorie müssen sie dieselben Durchmesser behalten. Ich werde auf diesen Beweis in einer spätern Abhandlung besonders zurückkommen. Hr. Lommel fügt hinzu: „Die Erscheinung der Ringe bei schiefstehender Platte liefert sonach einen Beweis für die Beugungstheorie, obgleich Hr. Exner sagt: „„Lommel hat den von mir oben widerlegten Satz dazu benutzt, einen Beweis für die Beugungstheorie herzustellen.

Allein mit jenem Satze fällt auch der aus ihm gezogene Beweis."" Ich habe hierzu zu bemerken, dass meine Widerlegung sich selbstverständlich auf den von Hrn. Lommel nicht jetzt, sondern damals gegebenen Beweis bezieht, welcher ein ganz anderer war und sich kurz so sagen lässt: Nach der Diffusionstheorie müssten bei der Ueberführung des Bestäubungsblättchens in die schiefe Lage die Ringe verschwinden, nach der Beugungstheorie müssen sie sichtbar bleiben.

Eine Consequenz der Theorie des Hrn. Lommel ist, dass auch zwei voneinander unabhängige Bestäubungen Ringe hervorbringen müssten, was nicht der Fall ist. Hr. Lommel sagt:

„Wenn das beleuchtete Stück der bestäubten Fläche einen Mittelpunkt ..... besitzt, wenn z. B. sein Umriss eine kreisförmige ..... Gestalt hat, und die Bestäubung eine gleichmässige ist, so lässt sich ..... der Nachweis führen, dass der resultirende Strahl die nämliche Phase hat, wie der durch den Mittelpunkt der bestäubten Fläche gebeugte Elementarstrahl ..... Auch wenn die ..... über die Gestalt des beleuchteten Theiles der gleichmässig bestäubten Fläche gemachte Voraussetzung nicht ganz strenge, sondern nur nahezu erfüllt ist, wird dieser Satz noch mit grosser Annäherung gelten." Man müsste also, indem man die Lichtstrahlen nacheinander durch zwei verschiedene Bestäubungsflächen treten lässt, Ringe erhalten können, deren Centrum auf die Richtung der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte der Bestäubungen fiele, und welche dieselbe Lage hätten wie die durch zwei in den beiden Mittelpunkten befindlichen Partikelchen hervorgebrachten Ringe. Dies ist bekanntlich nicht der Fall, man erhält keine Ringe, und hierdurch ist Hrn. Lommel's Theorie abermals widerlegt.

Ich habe gezeigt, dass Hrn. Lommel's Intensitätsgleichung unrichtig ist. In der That gibt es eine solche überhaupt nicht, wenigstens nicht im gewöhnlichen Sinne.

Hiervon kann man sich durch ein einfaches Experiment überzeugen."

Betrachtet man das Phänomen Fraunhofer'scher Ringe, welches eine vor das Objectiv eines auf einen Lichtpunkt eingestellten Fernrohrs gebrachte, mit Bärlappsamen bestäubte Glasplatte gibt, mit einiger Aufmerksamkeit, so bemerkt man eine, bezüglich des Bildes der Lichtquelle radiale Faserung der erhellten Theile des Gesichtsfeldes. Dreht man die Platte um die Axe des Fernrohres, so findet eine Rotation der Faserung um das Bild der Lichtquelle statt. Wendet man homogenes Licht an, so verwandelt sich die Faserung in eine Granulation. Verschiebt man die Platte langsam vor dem Objectiv, so geräth diese Granulation in lebhafte Bewegung, indem die alten Maxima der Intensität verschwinden und sich neue Maxima an anderen Stellen bilden. Der Uebergang von einem hellen Fraunhofer'schen Ringe zu einem folgenden dunkeln besteht also keineswegs in einer continuirlichen Abnahme der Intensität, es geht vielmehr die Intensität durch zahlreiche, sehr nahe aneinander liegende, unregelmässig vertheilte, der Lage nach von der zufälligen Vertheilung der Staubtheilchen abhängige Maxima und Minima. Diese Granulation ist, wie ich an anderem Orte gezeigt habe, das Resultat der Interferenz der congruent übereinander liegenden, von den einzelnen Staubtheilchen herrührenden elementaren Ringsysteme. Es folgt, dass die Intensität in jedem einzelnen Punkte des Phänomens innerhalb des Nullwerthes und eines Maximalwerthes vom Zufalle, der zufälligen Vertheilung der Staubtheilchen abhängig ist, woraus nicht folgt, dass auch die mittlere Intensität auf einem verhältnissmässig kleinen Theile des Gesichtsfeldes eine zufällige ist. Eine ebensolche Granulation zeigen die Staubringe. Dieselbe ist das Resultat der Interferenz der übereinander liegenden, durch die einzelnen Staubtheilchen hervorgebrachten elementaren Beugungsringe, und die Intensität des Phänomens ist in der That in jedem einzelnen Punkte des Gesichtsfeldes eine zufällige. Hr. Lommel

mag hieraus schliessen, dass es weder für die Fraunhofer'schen Ringe noch für die Newton'schen Staubringe eine Intensitätsformel im gewöhnlichen Sinne gibt.

Um Hrn. Lommel's Theorie in directester Weise experimentell zu prüfen, habe ich den folgenden Versuch angestellt.

Schaltet man bei der schiefen Stellung der Bestäubungsebene in den Gang der Strahlen einen Schirm ein, in welchem sich zwei zur Spiegelebene parallele, gleich breite Spaltöffnungen befinden, und bedeckt man abwechselnd die eine und die andere der Spaltöffnungen, so gewahrt man abwechselnd zwei Ringsysteme mit demselben Mittelpunkte, von welchen das eine aus verhältnissmässig breiten, das andere aus verhältnissmässig schmalen Ringen besteht. Nehmen wir an, eine der Spaltöffnungen gebe innerhalb eines gewissen Theiles R des Gesichtsfeldes m Maxima der Intensität, die andere Spaltöffnung innerhalb desselben Theiles des Gesichtsfeldes n Maxima, und sei $m > n$. Welches ist nun die Zahl r der innerhalb des Theiles R des Gesichtsfeldes wahrnehmbaren Maxima der Intensität, wenn keine der beiden Spaltöffnungen bedeckt wird? Nach Hrn. Lommel's Theorie müsste:

$$m > r > n$$

sein, mit anderen Worten, es müsste sich ein Ringsystem von einer mittlern, dem Schwerpunkte der beiden Spaltöffnungen entsprechenden Ringbreite zeigen. Der Versuch bestätigte diese Consequenz der Theorie des Hrn. Lommel keineswegs. Als Resultat des Versuches ergab sich vielmehr:

$$r = m + n,$$

mit anderen Worten, es fand eine Uebereinanderlagerung der beiden Ringsysteme statt.

Ich habe noch auf einige Bemerkungen des Hrn. Lommel einzugehen.

Hr. Lommel wirft mir vor, dass ich mein Versuchsresultat bezüglich der schiefen Stellung der Bestäubungsfläche dem seinigen als widersprechend entgegenstellte, obgleich mir Spuren der beiden innersten Ringe sichtbar blieben, während Hr. Lommel nur angibt, dass ihm äussere Ringe verschwanden, was auf dasselbe hinausläuft oder wenigstens keinen Widerspruch bedingt. Ich hatte gleichwohl einen guten Grund, mein Resultat dem seinigen entgegen zu setzen. Hr. Lommel führte nämlich einen Beweis für die Beugungstheorie, des Inhaltes, dass nach der Diffusionstheorie bei der schiefen Lage der Bestäubungsfläche die Ringe verschwinden müssten, nach der Beugungstheorie nicht. Da nun auch nach der Diffusionstheorie bei der äussersten Neigung der Bestäubungsebene ungefähr so viel Ringe sichtbar bleiben müssen, als ich wahrnahm, Hr. Lommel nimmt in seiner letzten Abhandlung sogar noch mehr an, so hatte ich die Wahl, wenn Hrn. Lommel's Beweis nicht gegenstandslos sein sollte, seine Angabe so zu verstehen, dass er beträchtlich mehr Ringe wahrgenommen habe, als ich.

Hr. Lommel wiederholt seinen Versuch mit dem Prisma, dessen eine Fläche bestäubt wurde, während die andere als Spiegel diente, und fügt hinzu: „Ich komme hier auf diesen Versuch mit genauer Angabe seiner Ausführung zurück, da Hr. Exner denselben ohne allen Grund, und ohne sich die Mühe gegeben zu haben, ihn zu wiederholen, in Zweifel zieht."

Dieser Versuch, über dessen Zweck sich Hr. Lommel nicht ausgesprochen hat, ist eine unwesentliche Variation des gewöhnlichen Versuches bei geneigter Bestäubungsebene. Schon aus diesem Grunde konnte ich bei dem kleinen Winkel des Prismas nicht bezweifeln, dass Ringe wahrgenommen werden, auch wenn mir wirklich, wie Hr. Lommel glaubt, und was durchaus nicht der Fall ist, entgangen wäre, dass Hr. Lommel im VI. Abschnitte seiner Abhandlungen sich die Mühe gegeben hat, den Versuch zu beschreiben. Hr. Lommel berechnet jedoch das Phä-

nomen, als wenn es mit dem von einem mittlern Partikelchen hervorgebrachten Phänomen identisch wäre, was durchaus nicht der Fall ist, und meine Bemerkung wollte nur sagen, dass das von Hrn. Lommel wahrgenommene Phänomen mit dem von ihm berechneten nicht identisch sein konnte.

Zum Schlusse erlaube ich mir eine kurze historische Bemerkung. Die in Rede stehenden Beugungserscheinungen, d. i. die sogenannten Interferenzerscheinungen diffusen Lichtes oder Farben dicker Platten oder Whewell'schen Streifen oder Quetelet'schen Streifen oder Newton'schen Staubringe sind von Newton entdeckt, ihre experimentellen Bedingungen vom Herzog von Chaulnes festgestellt. Th. Young wandte zuerst das Princip der Interferenzen auf dieselben an, Schläfli berechnete sie vollständig, Mousson bestätigte die Resultate der Rechnung durch sorgfältige Messungen, Stokes behandelte diese Erscheinungen als Beugungserscheinungen. Hiermit war die Theorie dieses Gegenstandes, welcher eine unverhältnissmässig grosse Literatur aufzuweisen hat, im wesentlichen abgeschlossen. Gleichwohl fehlte noch ein experimentum crucis, welches jede andere als die Beugungstheorie ausschliesst, und war es stets misslungen, die Ringe, wie es die Theorie verlangt, im durchgehenden Lichte zu erhalten. Indem ich diese beiden Lücken ausfüllte, konnte ich es nicht vermeiden, zugleich auf die Unrichtigkeit der Theorie des Hrn. Lommel hinzuweisen.

IV. *Bemerkungen zu den electrodynamischen Grundgesetzen von Clausius, Riemann und Weber; von J. Fröhlich in Budapest.*

Die bisher aufgestellten electrodynamischen Grundgesetze, welche dem Principe der Erhaltung der Energie genügen[1]) und gegenwärtig noch Gültigkeit haben, sind diejenigen von Clausius, Riemann und Weber.

Dieselben enthalten alle das Ampère'sche Gesetz, wenn man die Wirkung geschlossener Ströme aufeinander berechnet, ebenso das Neumann'sche Inductionsgesetz für geschlossene Ströme. Von den beiden letzteren hat Clausius[2]) nachgewiesen, dass bei Annahme der unitarischen Hypothese dieselben zu Kräften führen, welche in Wirklichkeit noch nicht beobachtet worden. Daraus entspann sich zwischen Clausius und Zöllner eine Controverse, welche, wie es scheint, noch nicht zu Ende geführt ist.

Clausius' Gesetz ist für die unitarische wie für die dualistische Hypothese gleicherweise geeignet; zur Entscheidung der Richtigkeit derselben wäre man genöthigt, Untersuchungen vorzunehmen, wo etwa ein geschlossener Strom auf bewegte freie Electricität oder vice versa Wirkung ausübt.

Auf den ersten Anblick scheint es, als ob die in jüngster Zeit vielfach genannten Experimente Rowland's über die electromagnetische Wirkung freier Electricität durch Convection[3]) in Bezug auf diese Theorien entscheidend seien; aber eine leichte Ueberlegung zeigt, dass dazu diese Versuche nicht gut geeignet sind. Der aufgehängte astatische Magnet befand sich nämlich ganz eingeschlossen in einem zur Erde abgeleiteten Messinggehäuse zur Verhütung der electrostatischen Einwirkung von aussen auf

1) Clausius Repert. d. reinen u. angew. Math. 1. p. 291. 1877.

2) Clausius, Borchardt's Journ. 82. p. 87. 1876.

3) Rowland, Pogg. Ann. 158. p. 487. 1876. Silliman's Journ. (III) 15. p. 30. 1878.

innere freie electrische Quanta. Man hätte nun die Wirkung der gesammten statischen Electricität auf die im Gehäuse befindlichen Ströme zu berechnen, wobei aber die vollständige Kenntniss des Gleichgewichtszustandes der inducirten freien Electricität auf diesem Gehäuse vorausgesetzt werden müsste etc.

Indem ich nun ein Experiment suchte, bei welchem die electrostatisch inducirte Electricität keinen Einfluss auf den zu beobachtenden Ausschlag ausübt, fand sich ein einfacher, bestimmter Fall, an dem gezeigt werden soll, dass Clausius' Gesetz überhaupt, Riemann's und Weber's Gesetz hingegen nur unter der Voraussetzung der verschiedenen Geschwindigkeiten der positiven und negativen electrischen Quanta im galvanischen Strome zu gänzlich unzulässigen Resultaten führt.

Vorher sei es jedoch gestattet, die aus den Gesetzen von Riemann und Weber folgenden Kraftcomponenten in derselben übersichtlichen Weise zu berechnen, wie dies Clausius für sein Gesetz durchgeführt; dabei sollen die drei Gesetze immer gleichzeitig behandelt und fast alle Bezeichnungen beibehalten werden, welche Clausius benutzte. Auch soll allgemein angenommen werden, dass bei Riemann's und Weber's Gesetz die beiden Electricitäten im galvanischen Strome sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortbewegen.

1. Kraftcomponenten zwischen Electricitäten, welche in bewegten linearen Leitern strömen, nach den Grundgesetzen von Clausius, Riemann und Weber.

Die electrodynamischen Potentiale, welche zu den obigen Gesetzen gehören, sind:

$$V^C = k\frac{ee'}{r}\left[\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right],$$

$$V^R = -\frac{k}{2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

$$V^W = -\frac{k}{2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Es bedeutet k im ersten Gesetze eine vorläufig unbestimmte Constante, in den beiden anderen: $\frac{2}{C^2}$. Man bemerkt, dass:

$$V^R = V^C - \frac{k}{2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right] = V^C - V'^R.$$

Die Kraftcomponente $X ee'$, welche auf das Theilchen e wirkt, findet sich bekanntlich:

$$X ee' = \frac{d(V-U)}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right); \qquad U = \frac{ee'}{r}.$$

Die Ausdrücke für das Gesetz von Clausius sind von ihm selbst berechnet[1]; die für das Gesetz von Riemann folgen leicht unter Berücksichtigung der Relation: $V^R = V^C - V'^R$. Man findet:

$$-\left[\frac{dV'^R}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dV'^R}{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right)\right] = -\frac{k}{2}ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right]$$

$$+ k ee' \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right).$$

Wir setzen auch hier $\pm e = \pm h\,ds$, $\pm e' = \pm h'\,ds'$, ferner die Geschwindigkeiten dieser electrischen Quanta in ihren resp. Leitern u und $-u_1$; u' und $-u_1'$. Das zweite Glied der rechten Seite lässt sich nach der von Clausius benutzten Methode umformen, wenn man beachtet, dass:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial s}; \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + u'\frac{\partial x'}{\partial s'}.$$

Es ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) + u\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) + u'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right).$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit h, dann kann das zweite Glied geschrieben werden:

$$hu\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{hu}{r}\frac{dx}{dt}\right) - \frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{\partial(hu)}{\partial s}.$$

1) Clausius, Wied. Ann. 1. p. 14. 1877.

Wie Clausius[1]) gezeigt, ist:

$$\frac{\partial (hu)}{\partial s} = -\frac{\partial h}{\partial t}, \text{ also: } hu\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{hu}{r}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{\partial h}{\partial t};$$

substituirt man diesen Werth, zieht das dritte und erste Glied zusammen, dann ist:

$$h\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{r}\frac{dx}{dt}\right) + hu'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{hu}{r}\frac{dx}{dt}\right).$$

Somit ist die X-Componente der Kraft, welche wir zur entsprechenden Clausius'schen Componente zu addiren haben, um die Riemann'sche zu erhalten:

$$-\frac{k}{2}hh'\,ds\,ds'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right]$$
$$+kh'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{r}\frac{dx}{dt}\right) + hu'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{hu}{r}\frac{dx}{dt}\right)\right]ds\,ds'.$$

Die aus Weber's Gesetz folgende Componente ist:

$$X^W ee' = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}ee'\left[1 - \frac{k}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + kr\frac{d^2r}{dt^2}\right]; \quad \text{man hat aber:}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + u\frac{\partial r}{\partial s} + u'\frac{\partial r}{\partial s'};$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + 2u\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + 2u'\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t} + 2uu'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + u^2\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + u'^2\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right.$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s} + 2u'\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s'} + 2uu'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + u^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}$$
$$+u'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + u\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + u'\frac{\partial u'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Man könnte wohl die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ durch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{\partial r}{\partial x}$ etc. ausdrücken, aber man erhält dadurch eine sehr grosse Anzahl von Gliedern, welche sowohl die Uebersichtlichkeit als auch die Leichtigkeit der aus diesem Gesetze folgenden Entwickelungen bedeutend beeinträchtigen.

Wir erhalten also die X-Componente der Kraft, mit welcher das bewegte electrische Quantum $+h\,ds'$ auf das

1) l. c. p. 14 ff.

ebenfalls bewegte Quantum $+h\,ds$ wirkt, nach Clausius, Riemann und Weber:

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{aligned}
X^C ds\,ds' = & -h h' ds\,ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right] \\
& - k h\, ds\,ds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) + u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\left(h'\frac{\partial x'}{\partial t} + h' u'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h' u'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'^2}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right]. \\
X^R ds\,ds' = & -h h' ds\,ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{k}{2}\left(\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \Sigma\left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)^2\right)\right] \\
& - k h\, ds\,ds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) + u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\left(h'\frac{\partial x'}{\partial t} + h' u'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{h' u'}{r}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{h' u'^2}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right] \\
& + k h' ds\,ds'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{r}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{h u}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right) + u'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\left(h\frac{\partial x}{\partial t} + h u\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{h u}{r}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{h u^2}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right]. \\
X^W ds\,ds' = & -h h' ds\,ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + u\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + u'\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left. + u u'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{u^2}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + \frac{u'^2}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2\right)\right] \\
& - k h h' ds\,ds'\, r\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s} + 2u'\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s'} + 2uu'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + u^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + u'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}\right] \\
& - k h h' ds\,ds'\, r\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial s} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial (u'^2)}{\partial s'} + \frac{\partial u'}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial s'}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken statt h' und u' die Werthe $-h'$ und $-u_1'$, summiren dann die zueinander

gehörigen Paare, so erhalten wir die Componenten der Kraft, welche das von der Strömung $i' = h'(u' + u_1')$ durchflossene Element ds' auf das bewegte freie Electricitätsquantum $+hds$ ausübt:

$$
(\mathrm{II})\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{x}^C ds\,ds' &= k h i' ds\,ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial s}\right) \frac{\partial x'}{\partial s'} \\
&- k h\,ds\,ds' \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i''}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'}\right) + i' u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{u'^2 - u_1'^2}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right]. \\
\mathfrak{x}^R ds\,ds' &= k h i' ds\,ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[\sum \left(\left(\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t}\right) + u \frac{\partial x}{\partial s}\right) \frac{\partial x'}{\partial s} - \frac{u' - u_1'}{2}\right] \\
&- k h\,ds\,ds' \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i''}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'}\right) + i' u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{i'}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'} + \frac{u'^2 - u_1'^2}{r} \frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\right. \\
&\qquad \left. - i' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} \left(\frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial s}\right)\right]. \\
\mathfrak{x}^W ds\,ds' &= k h i' ds\,ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[\frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{u' - u_1'}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2\right] \\
&- k h\,ds\,ds'\,r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[i' \left(2 \frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s'} + 2u \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + (u' - u_1') \frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (u'^2 - u_1'^2)}{\partial s'} + h' \frac{\partial (u' + u_1')}{\partial t}\right) \frac{\partial r}{\partial}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Setzt man hingegen in das Gleichungssystem (I) statt h und u die Werthe: $-h$ und $-u_1$, addirt wieder die zueinander gehörigen Paare, dann erhält man die Componenten der Kraft, mit welcher das bewegte freie electrische Quantum $+h'ds'$ auf das von der Strömung $i = h(u + u_1)$ durchflossene Element ds wirkt:

$$
(\mathrm{III})\left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_1^C ds\,ds' &= k i h' ds\,ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u' \frac{\partial x'}{\partial s'}\right) \frac{\partial x}{\partial s} \\
&- k h' ds\,ds'\,i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} + u' \frac{\partial x'}{\partial s'}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{(III)}\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X}_1^R\, ds\, ds' &= kih'\, ds\, ds'\, \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[\sum\left(\left(\frac{\partial x'}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}\right)+u'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{u-u_1}{2}\right]\\
&- kh'\, ds\, ds'\left[i\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}+u'\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right)-iu'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\frac{\partial x}{\partial s}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{u^2-u_1^2}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right].\\
\mathfrak{X}_1^W\, ds\, ds' &= kih'\, ds\, ds'\, \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}+u'\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{u-u_1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right]\\
&- kh'\, ds\, ds'\, r\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[i\left(2\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s}+2u'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}+(u-u_1)\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial(u^2-u_1^2)}{\partial s}+h\frac{\partial(u+u_1)}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial s}\right].
\end{aligned}\right.
$$

Schliesslich schreiben wir noch die Werthe der ponderomotorischen Kraftcomponenten, welche man erhält, wenn man in (II), resp. (III) statt h und u: $-h$ und $-u_1$, bez. statt h' und u': $-h'$ und $-u_1'$ setzt, und die zueinander gehörigen Paare addirt. Der in Weber's Gesetz auftretende Ausdruck enthält den Factor: $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]$; dasselbe lässt sich durch die bekannten Relationen: $\cos(ss')=\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}$ $=-\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$; $r^3\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}=2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$ und $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}r^3\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}=-r\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\frac{\partial r}{\partial x}$ sofort umformen, und man findet sonach die Componente der Kraft, welche das Stromelement in ds' auf das Stromelement in ds ausübt:

$$
\text{(IV)}\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X}^C\, ds\, ds' &= kii'\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right]ds\, ds'\\
\mathfrak{X}^R\, ds\, ds' &= kii'\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial s'}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\frac{\partial x}{\partial s}\right]ds\, ds\\
\mathfrak{X}^W\, ds\, ds' &= kii'\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x'}{ds'}-r\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\frac{\partial r}{\partial x}\right]ds\, ds'.
\end{aligned}\right.
$$

Die obige vergleichende Zusammenstellung der electrischen Wirkungen nach den drei Grundgesetzen erleichtert sehr die Auffindung von solchen Experimenten, welche zur Entscheidung zwischen diesen Gesetzen geeignet sind.

Wären wir etwa im Stande, die ponderomotorische Wirkung eines Theiles des Stromes s' auf ds oder s zu messen, so würde dies auch schon zum Ziele führen; dies ist aber nicht möglich, und die ponderomotorische Wirkung des ganzen geschlossenen Stromes s' auf ds oder s ist nach allen drei Gesetzen dieselbe.

Leitet man positive statische Electricität auf geeignete Weise etwa durch eine aufgehängte Spule und beobachtet die Wirkung eines in der Nähe befindlichen Magnets oder geschlossenen Stromes auf dieselbe, dann würde sich aus System (II) leicht eine Entscheidung folgern lassen; beobachtet man hingegen die Wirkung bewegter freier Electricität auf Magnete oder geschlossene Ströme, dann muss System (III) benutzt werden.

2. Drehungsmoment eines um seine Axe rotirenden, mit freier Electricität belegten Kreisringes, ausgeübt auf einen in der Nähe befindlichen, constanten galvanischen Strom.

Unser Fall ist demjenigen sehr ähnlich, welchen Rowland beobachtete, doch werden hier nur die Leiter s und s' als vorhanden vorausgesetzt. Eine mit freier Electricität gleichförmig belegte, horizontale Kreislinie s' werde mit constanter Winkelgeschwindigkeit um ihre Axe gedreht; in der Nähe derselben sei ein kleiner, kreisförmiger und constanter, geschlossener Strom s so aufgehängt, dass dessen Fläche vertical sei. Es ist auch ohne Rechnung evident, dass die Kräfte, welche infolge der electrostatischen Induction zwischen den Leitern s und s' auftreten, in diesem Falle kein Drehungsmoment um die verticale Axe besitzen können. Wir suchen daher das Drehungsmoment um die verticale Axe, welches die rotirende, electrische Kreislinie auf den aufgehängten Strom oder Magnet ausübt.

Um zu den Schlüssen zu gelangen, die wir beabsich-

tigen, würde es vollständig genügen, die Kreislinie als auf der Erde ruhend anzunehmen; aber durch die Annahme der relativen Rotation derselben können wir die Wirkung der relativ ruhenden mit der der bewegten Electricität unmittelbar vergleichen, ein Umstand, der die Beurtheilung der zu erhaltenden Resultate sehr erleichtert. Wir haben es hier also auch mit Convection zu thun, wo die freie Electricität nur dieselben Bewegungen vollführt wie das Leiterelement ds', auf dem sie sich befindet.

Man setze nun in System (III): $u' = 0$, $\frac{\partial i}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial (u - u_1)}{\partial s} = 0$, und es ist:

$$\mathfrak{X}_1^C\, ds\, ds' = kh'i\, ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right].$$

$$\mathfrak{X}_1^R\, ds\, ds' = kh'i\, ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial (x'-x)}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{u-u_1}{2}\right) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial t}\right) + (u-u_1)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right].$$

$$\mathfrak{X}_1^W\, ds\, ds' = kh'i\, ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{u-u_1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right)\right.$$
$$\left. - 2r\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t\, \partial s} + \frac{u-u_1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right)\right].$$

Es seien nun σ und σ' die Wege, welche die Leiterelemente ds und ds' mit den im Raume absoluten Geschwindigkeiten $w = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ und $w' = \frac{\partial \sigma'}{\partial t}$ durchlaufen, und $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x'}{\partial t}$ etc. die Componenten der letzteren. Wir wollen obige Formeln in der Weise umformen, dass die Glieder, welche von der im Raume absoluten Geschwindigkeit abhängen, getrennt seien von denjenigen, die der relativen Geschwindigkeit proportional sind. Die Geschwindigkeit aller Elemente ds des auf der Erde ruhenden Leiters s ist in jedem Augenblicke dieselbe wie die des Theiles der Erdoberfläche,

auf dem er sich befindet, und gleich: $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = w$. Der Leiter s' ist in unmittelbarer Nähe von s und hat nur insofern eine andere absolute Geschwindigkeit, als er zu s auch eine relative Bewegung besitzt. Wir zerlegen daher letztere absolute Geschwindigkeit $\frac{\partial \sigma'}{\partial t}$ in zwei Componenten, deren eine gleich ist $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ in Bezug auf Grösse und Richtung, deren andere aber die zum unbeweglichen Leiter relative Geschwindigkeit von s': $\frac{\partial \varsigma'}{\partial t}$, wenn ς' die relative Bahn der bewegten freien Electricität bedeutet. Da nämlich die Electricität $h' ds'$ sich nicht im Leiter s', sondern nur mit demselben fortbewegt, soll auch die Bezeichnung ς' benutzt werden, obwohl man sieht, dass in unserem Falle die geometrische Lage von s' und ς' zusammenfällt; ferner ist die Bahn ς' mit freier Electricität gleichmässig bedeckt, sodass man schreiben kann: $h' ds' = \varrho' d\varsigma'$ wo $h' = \varrho'$, $ds' = d\varsigma'$.

Es ändert sich r und ebenso $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ für das Quantum $\varrho' d\varsigma'$ nur dann, wenn der Bogen ς' der Bahn geändert wird; dagegen ist $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$ von ς' unabhängig; man kann demnach setzen:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + \left(\frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial (x' - x)}{\partial \varsigma'}\frac{\partial \varsigma'}{\partial t};$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial (x - x')}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial (y - y')}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial (z - z')}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \varsigma'}\frac{\partial \varsigma'}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{\partial \varsigma'}{\partial t}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \varsigma'}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma \partial s};$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma \partial s}.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{X}_1^C ds\, ds' = ki\varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \frac{\partial (x' - x)}{\partial \varsigma'}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial (x' - x)}{\partial \varsigma'}\right]$$

$$+ ki\varrho' \frac{\partial \sigma}{\partial t} ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial \sigma} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right].$$

$$\mathfrak{x}_1^R\, ds\, ds' = k i \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t}\, ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \sum \frac{\partial (x'-x)}{\partial \varsigma'} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial (x'-x)}{\partial \varsigma'}\right]$$

$$+ k i \varrho' ds\, d\varsigma' \left[2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 x}{\partial \sigma \partial s} + \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \varsigma'} \frac{\partial x}{\partial s}\right] - k i \varrho' (u - u_1) \left[\tfrac{1}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial s}\right)\right].$$

$$\mathfrak{x}_1^W\, ds\, ds' = k i \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} ds\, ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \varsigma'} - 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \varsigma'}\right]$$

$$+ k i \varrho' (u - u)\, ds\, ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \left[\tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right].$$

Nach der gemachten Annahme ist ς' die zur Erde relative Bahn der freien Electricität; da wir aber die Grösse und Richtung der Kräfte auf der Erde messen, wählen wir das auf der Erde fixe Coordinatensystem $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$, sodass $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')^2 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}')^2 + (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}')^2$; dabei setzen wir voraus, dass die bisher willkürlich gelassenen Richtungen der xyz-Axen in jedem Zeitmomente mit denen von $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ zusammenfallen. Dann ist $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ von ς' unabhängig:

(V)

$$\mathfrak{x}_1^C\, ds\, d\varsigma' = k i \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \sum \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varsigma'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varsigma'}\right]$$

$$+ k i \varrho' \frac{\partial \sigma}{\partial t} ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \sum \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma}\right].$$

$$\mathfrak{x}_1^R\, ds\, d\varsigma' = k i \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \sum \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varsigma'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varsigma'}\right]$$

$$+ k i \varrho'\, ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial s \partial \sigma} + \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \varsigma'} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\right]$$

$$- k i \varrho' (u - u_1)\, ds\, d\varsigma' \left[\tfrac{1}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\right)\right].$$

$$\mathfrak{x}_1^W\, ds\, ds' = k i \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \sum \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varsigma'} + (\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s \partial \varsigma'}\right]$$

$$+ k i \varrho' (u - u_1)\, ds\, d\varsigma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \left[\tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right].$$

Zu der letzten Gleichung gelangt man durch dieselbe Umformung, wie sie bei Berechnung der ponderomotorischen Kräfte, System (IV), benutzt wurde. Die Quotienten $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma}$ etc. haben hier nur die Bedeutung von Richtungscosinis.

a. Berechnung nach Clausius' Gesetz. Die erste Gleichung obigen Systemes formen wir um mittelst der Relationen:

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\sum\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{y}'}{\partial\varsigma'} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{z}'}{\partial\varsigma'};$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\sum\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\sigma} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial\sigma};$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{y}}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{z}}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'};$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{y}}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{z}}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma};$$

daraus findet sich sofort, indem man beachtet, dass $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}'}$; $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}ds = d\mathfrak{x}$; $\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'}d\varsigma' = d\mathfrak{x}'$ etc.

$$\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\sum\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'}\right)ds\,d\varsigma' = \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{y}'}d\mathfrak{x}' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}'}d\mathfrak{y}'\right)d\mathfrak{y}$$
$$-\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}'}d\mathfrak{z}' - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{z}'}d\mathfrak{x}'\right)d\mathfrak{z}\,.$$

$$\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\sum\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma}\right)ds\,d\varsigma' = \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{y}'}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\sigma} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}'}\frac{\partial\mathfrak{y}'}{\partial\sigma}\right)d\mathfrak{y}\,d\varsigma'$$
$$-\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}'}\frac{\partial\mathfrak{z}'}{\partial\sigma} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{z}'}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\sigma}\right)d\mathfrak{z}\,d\varsigma'\,.$$

Es ist klar, dass $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\sigma} = \frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\sigma}$ etc., da dies der Cosinus des Winkels zwischen der Tangente des Bogens σ und der $\mathfrak{x}$-Axe ist.

Setzt man $ds \int \mathfrak{x}_1^C \, d\varsigma' = \mathfrak{X}^C ds$, dann ist dies die Componente der Kraft, mit welcher das bewegte electrische Quantum $\varrho' \int d\varsigma'$ auf das Stromelement in ds wirkt; diese lässt sich leicht ausdrücken, wenn man folgende Abkürzungen einführt:

$$A = \int \frac{1}{r^3} [(\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) d\mathfrak{z}' - (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}) d\mathfrak{y}'] \qquad \mathfrak{A} = \int \frac{1}{r^3} \left[(\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \sigma} - (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}) \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \sigma} \right] d\varsigma'$$

$$B = \int \frac{1}{r^3} [(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}) d\mathfrak{x}' - (\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}) d\mathfrak{z}'] \qquad \mathfrak{B} = \int \frac{1}{r^3} \left[(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}) \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \sigma} - (\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}) \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \sigma} \right] d\varsigma'$$

$$C = \int \frac{1}{r^3} [(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}) d\mathfrak{y}' - (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) d\mathfrak{x}'] \qquad \mathfrak{C} = \int \frac{1}{r^3} \left[(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}) \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \sigma} - (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \sigma} \right] d\varsigma'$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}^C ds &= k i \varrho' \left[\frac{\partial \varsigma'}{\partial t} (C d\mathfrak{y} - B d\mathfrak{z}) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} (\mathfrak{C} d\mathfrak{y} - \mathfrak{B} d\mathfrak{z}) \right] \\ \mathfrak{Y}^C ds &= k i \varrho' \left[\frac{\partial \varsigma'}{\partial t} (A d\mathfrak{z} - C d\mathfrak{x}) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} (\mathfrak{A} d\mathfrak{z} - \mathfrak{C} d\mathfrak{x}) \right] \\ \mathfrak{Z}^C ds &= k i \varrho' \left[\frac{\partial \varsigma'}{\partial t} (B d\mathfrak{x} - A d\mathfrak{y}) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} (\mathfrak{B} d\mathfrak{x} - \mathfrak{A} d\mathfrak{y}) \right] \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \Xi^C &= \int (\mathfrak{Z}\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{z}) ds \\ H^C &= \int (\mathfrak{X}\mathfrak{z} - \mathfrak{Z}\mathfrak{x}) ds \\ Z^C &= \int (\mathfrak{Y}\mathfrak{x} - \mathfrak{X}\mathfrak{y}) ds \end{aligned}\right\}$$

Das letzte Gleichungssystem enthält die Drehungsmomente in Bezug auf die $\mathfrak{x}$-, $\mathfrak{y}$-, $\mathfrak{z}$-Axen, welche die freie Electricität $\varrho' \int d\varsigma'$ auf den g a n z e n geschlossenen Strom s ausübt. Wir fixiren die Lage unseres Coordinatensystemes $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ durch die Annahme, dass die $\mathfrak{Z}$-Axe mit der Aufhängungsaxe von s zusammenfalle, und dass die $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$-Ebene den Mittelpunkt von s', bez. ς' enthalte. Bedeutet schliesslich ψ den Winkel, den die Normale der Stromfläche s mit der $\mathfrak{X}$-Axe einschliesst, dann kann für die Coordinaten der Elemente ds und ds' bez. $d\varsigma'$ gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= R \cos\varphi \cos\psi \\ \mathfrak{y} &= R \cos\varphi \sin\psi \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{z}_0 - R \sin\varphi \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= -\mathfrak{x}'_0 - R' \cos\varphi' \\ \mathfrak{y}' &= -R' \sin\varphi' \\ \mathfrak{z}' &= \mathfrak{z}'_0 \end{aligned}\right\},$$

wenn R und R' die Radien, 0, 0, $\mathfrak{z}_0$, und $-\mathfrak{x}'_0$, 0, $\mathfrak{z}'_0$ die Coordinaten der Mittelpunkte von s und s' sind. Es ist hier: $r^2 = (\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}'_0)^2 + \mathfrak{x}'^2_0 + R'^2 + 2\mathfrak{x}'_0 R' \cos\varphi'$, da wir den Radius R des aufgehängten Stromes s als sehr klein im

Verhältniss zu den übrigen, in r vorkommenden Grössen angenommen haben. Man hat:

$$\int \mathfrak{Y}^C \mathfrak{x}\, ds = k i \varrho' R^2 R' \left\{ \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} \Big[(\mathfrak{z}_0 - R \sin\varphi - \mathfrak{z}'_0) \cos^2\varphi \cos\varphi' \cos\psi \right.$$

$$+ \Big((R' \sin\varphi' + R \cos\varphi \sin\psi) \sin\varphi' + (\mathfrak{x}_0' + R' \cos\varphi'$$

$$+ R \cos\varphi \cos\psi) \cos\varphi' \Big) \sin\varphi \cos\varphi \cos^2\psi \Big] d\varphi\, d\varphi'$$

$$+ \frac{\partial \sigma}{\partial t} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} \Big[-\Big((\mathfrak{z}_0 - R \sin\varphi - \mathfrak{z}_0') \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \sigma} - (R' \sin\varphi' + R \cos\varphi \sin\psi) \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \sigma} \Big) \cos^2\varphi \cos\psi$$

$$+ \Big((R' \sin\varphi' + R \cos\varphi \sin\psi) \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \sigma} - (\mathfrak{x}_0' + R' \cos\varphi'$$

$$\left. + R \cos\varphi \cos\psi) \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \sigma} \Big) \sin\varphi \cos\varphi \cos^2\psi \Big] d\varphi\, d\varphi' \right\}.$$

$$\int \mathfrak{X}^C \mathfrak{y}\, ds = k i \varrho' R^2 R' \left\{ \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} \Big[- \Big((R' \sin\varphi' + R \cos\varphi \sin\psi) \sin\varphi' \right.$$

$$+ (\mathfrak{x}_0' + R' \cos\varphi' + R \cos\varphi \cos\psi) \cos\varphi' \Big) \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\psi$$

$$- (\mathfrak{z}_0 - R \sin\varphi - \mathfrak{z}_0') \sin\varphi' \cos^2\varphi \sin\psi \Big] d\varphi\, d\varphi'$$

$$+ \frac{\partial \sigma}{\partial t} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} \Big[- \Big((R' \sin\varphi' + R \cos\varphi \sin\psi) \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \sigma} - (\mathfrak{x}_0' + R' \cos\varphi'$$

$$+ R \cos\varphi \cos\psi) \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \sigma} \Big) \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\psi$$

$$+ \Big(\mathfrak{x}_0' + R' \cos\varphi' + R \cos\varphi \cos\psi) \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \sigma}$$

$$\left. - (\mathfrak{z}_0 - R \sin\varphi - \mathfrak{z}_0') \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \sigma} \Big) \cos^2\varphi \sin\psi \Big] d\varphi\, d\varphi' \right\}.$$

Wir führen hier zuerst die Integration nach φ aus, welche von r unabhängig ist; es haben dort nur solche Glieder endlichen Werth, welche gerade Potenzen von $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ oder beide zugleich enthalten; bemerkt man noch, dass $\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi'\, d\varphi'}{r^3} = 0$, so findet sich das Drehungsmoment:

$$\int (\mathfrak{Y}^\sigma \mathfrak{x} - \mathfrak{X}^\sigma \mathfrak{y})\, ds = k i \pi R^2 \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} R' (\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_0') \cos\psi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{r^3}$$

$$- k i \pi R^2 \varrho' \frac{\partial \sigma}{\partial t} R' \Bigg[(\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_0') \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \sigma} \cos\psi \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{r^3}$$

$$+ \sin\psi \left\{ \left(\mathfrak{x}_0' \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \sigma} - (\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_0') \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \sigma} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi'}{r^3} + R' \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \sigma} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{r^3} \right\} \Bigg].$$

Es ist $i\pi R^2$ das magnetische Moment des aufgehängten Stromes, und das Drehungsmoment diesem direct proportional; die in den Klammern enthaltenen Integrale lassen sich sofort durch complete elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausdrücken.

Das erste Glied rührt von der relativen Bewegung des Kreisringes her; das zweite hängt nur von dessen absoluter Bewegung im Raume ab. In Rowland's Experiment drehte sich eine electrisirte Scheibe von 21,1 cm Durchmesser 61 mal in der Secunde, und das durch diese Convection hervorgerufene Drehungsmoment erzeugte eine sehr merkliche Ablenkung des aufgehängten Magnetes. Man kann dort im Mittel für $\frac{\partial \varsigma'}{\partial t}$ etwa 30 m setzen; betrachtet man hingegen die Bewegung der Erde um die Sonne, dann ist $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ etwa 30 km, es erscheint somit bei sonst gleichen Verhältnissen das zweite Glied mit einem ungefähr tausendfach grössern Factor multiplicirt als das erste.

Es erfordert sonach Clausius' Gesetz zwischen relativ ruhender freier Electricität und einem relativ ruhenden constanten Strome eine so bedeutende Wirkung, dass dieselbe unmöglich auch nur der rohesten Beobachtung hätte entgehen können.

Aber wir gehen noch weiter. Verlegen wir den Mittelpunkt von s' in die Aufhängungsaxe von s, dann wird: $\mathfrak{x}_0' = 0$, $r =$ constans. Das erste Glied verschwindet, und es bleibt:

$$\int(\mathfrak{Y}^C \mathfrak{x} - \mathfrak{X}^C \mathfrak{y})\, ds = -\, k i \pi R^2 \varepsilon\, \frac{\partial \sigma}{\partial t}(\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_0')\, \frac{2\pi R'}{r^3}\left[\cos\psi \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \sigma} - \sin\psi \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma}\right].$$

Die Lage der $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$-Ebene war durch die $\mathfrak{Z}$-Axe und den Mittelpunkt von s' bestimmt, jetzt ist aber diese Lage unbestimmt geworden, somit auch ψ beliebig, und daher schliesslich auch das Drehungsmoment willkürlich; ausgenommen den Fall, wo die Richtung von σ senkrecht zur $\mathfrak{Z}$-Axe ist.

Clausius' Gesetz führt also in einem bestimmten Falle zu einem Drehungsmomente um die $\mathfrak{Z}$-Axe, dessen Werth wesentlich von der willkürlichen Lage der $\mathfrak{X}$- (oder $\mathfrak{Y}$-)Axe in der zu $\mathfrak{Z}$ senkrechten Ebene abhängt, ein theoretisch ebenso unzulässiges, wie praktisch unbrauchbares Resultat.

Diese Folgerungen aus Clausius' Gesetz erscheinen beim ersten Anblicke sehr auffallend, und zwar umsomehr, als Clausius bei der Ableitung seines Gesetzes unter anderem auch folgende zwei Erfahrungssätze benutzte: „Ein in einem ruhenden Leiter stattfindender, geschlossener und constanter galvanischer Strom übt auf ein ruhendes Electricitätstheilchen keine bewegende Kraft aus," und: „Eine ruhende Electricitätsmenge übt auf einen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen und constanten galvanischen Strome keine Kraft aus."[1])

Berechnen wir aber aus Clausius' Gesetz mittelst der ersten Gleichungen der Systeme (II) und (III) die Kraft, welche ein in einem auf der Erde ruhenden Leiter befindlicher geschlossener und constanter galvanischer Strom auf ein auf der Erde ruhendes freies Electricitätstheilchen ausübt; ferner die Kraft, welche eine auf der Erde ruhende freie Electricitätsmenge auf einen in einem auf der Erde ruhenden Leiter befindlichen, geschlossenen und constanten galvanischen Strom ausübt.

Man setze in die ersten Gleichungen von (II) und (III): $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}$; $\frac{\partial i'}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$, $\sigma = \sigma'$; und besonders in (II): $\frac{\partial i'}{\partial s'}$

1) Clausius, Rep. d. rein. u. ang. Math. l. c. p. 288 u. 289.

$=0$, $u=0$; in (III): $\frac{\partial i}{\partial s}=0$, $u'=0$; integrire die eine Gleichung nach s', die andere nach s, wo s und s' geschlossene Curven, bez. Leiter sind, und es bleibt:

$$ds\int \mathfrak{x}^C ds' = khi'ds\int\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 x'}{\partial s'\,\partial t}\right]ds'.$$

$$ds'\int \mathfrak{x}_1^C ds = kh'ids'\int\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x'}{\partial t}\right]ds.$$

Das zweite Glied der ersten Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}\int\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial x'}{\partial\sigma'}\right)ds' = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\left[\int\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial\sigma'}\right)ds' - \int\frac{\partial x'}{\partial\sigma'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds'\right];$$

hier fällt das erste Glied bei geschlossenem s' fort, ebenso das zweite, da $\frac{\partial x'}{\partial\sigma'}=\frac{\partial x}{\partial\sigma}=\cos(x\sigma)$ für alle Punkte von s' denselben Werth besitzt; aus demselben Grunde entfällt das zweite Glied der zweiten Gleichung. Die gesuchten Kräfte stellen sich in der Form dar:

$$\left.\begin{aligned} ds\int \mathfrak{x}^C ds' &= khi'ds\frac{\partial\sigma}{\partial t}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\cos(\sigma s')\,ds' \\ ds'\int \mathfrak{x}_1^C ds &= kh'ids'\frac{\partial\sigma}{\partial t}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\cos(\sigma s)\,ds \end{aligned}\right|.$$

Dass diese Kräfte im allgemeinen nicht gleich Null sind, ist evident; wir haben ja oben einen hierher gehörigen Fall berechnet; sie verschwinden aber sofort, wenn man absolut ruhende freie Electricität und absolut ruhende galvanische Stromleiter betrachtet, für welche $\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0$.

Es geht hieraus unzweifelhaft hervor, dass die von Clausius benutzten und hier angeführten Erfahrungssätze für absolut ruhende freie Electricitäten und Stromleiter angewandt wurden[1]); in diesem Sinne aufgefasst, ist

1) Clausius, Mech. Wärmetheorie, 2. Aufl., 2. p. 246 u. f. 1879.

es klar, dass diese Sätze nicht **die** Erfahrungsthatsachen enthalten, welche wir aus den auf der Erde mit **relativ** ruhenden Electricitäten und Stromleitern angestellten Versuchen erhalten haben, und welche durch obige angeführte Sätze ausgedrückt werden, wenn man statt der Worte „ruhenden", „auf der Erde ruhenden" setzt. Hingegen ist ersichtlich, dass letztere Sätze die ersteren **vollständig** enthalten, weil bei absoluter Ruhe auch relative Ruhe herrschen muss.

b. **Berechnung nach Riemann's Gesetz.** Die beiden ersten Glieder der zweiten Gleichung des Systemes (V):

$$\mathfrak{x}_1^R\, ds\, ds' = k\, i\, \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t}\, ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \Sigma \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varsigma'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \varsigma'}\right]$$

$$+ k\, i\, \varrho'\, ds\, d\varsigma' \left[\frac{\partial \varsigma'}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \varsigma'} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial s\, \partial \sigma}\right]$$

$$- k\, i\, \varrho' (u - u_1)\, ds\, d\varsigma' \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\right)\right],$$

welche nur von der relativen Bewegung abhängen, ergeben zu dem gesuchten Drehungsmomente um die $\mathfrak{Z}$-Axe ein schon oben gefundenes Glied; die übrigen sind zuerst nach ς' zu integriren.

Im dritten Gliede ist $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ von ς' unabhängig, und $\frac{\partial \varsigma'}{\partial t}$ constant, sodass $\int \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \varsigma'} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} d\varsigma' = 0$, sobald ς' geschlossen; das vierte Glied lässt sich schreiben, wenn man das Drehungsmoment bildet: $k\, i\, \varrho' 2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \iint \left(\frac{\mathfrak{x}}{r} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \sigma}\right) - \frac{\mathfrak{y}}{r} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma}\right)\right) ds\, d\varsigma'$. Es ist aber:

$$\int \frac{\mathfrak{x}}{r} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \sigma}\right) ds = \int \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathfrak{x}}{r} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \sigma}\right) ds - \int \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathfrak{x}}{r}\right) ds;$$

da s geschlossen, und $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \sigma}$ für alle Punkte von s denselben

Werth hat, entfallen diese Glieder. Aus dem letzten Gliede wird:

$$k i \varrho' (u - u_1) \iint \left(\mathfrak{y} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \right) - \mathfrak{x} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s} \right) \right) ds\, d\varsigma' ; \text{ doch ist:}$$

$$\int \mathfrak{y} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \right) ds = \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathfrak{y}}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \right) ds - \int \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s} ds,$$

$$\int \mathfrak{x} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s} \right) ds = \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathfrak{x}}{r} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s} \right) ds - \int \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s} ds;$$

es fällt somit auch dieser Ausdruck fort und bleibt noch der aus dem vorletzten Gliede entstehende Ausdruck zu untersuchen:

$$-k i \varrho' \frac{u-u_1}{2} \iint \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{y}} \mathfrak{x} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \mathfrak{y} \right) ds\, d\varsigma' =$$

$$- k i \varrho' \frac{u - u_1}{2} \iint \frac{1}{r^3} \left[(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}) \mathfrak{y} - (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) \mathfrak{x} \right] ds\, d\varsigma' =$$

$$- k i \varrho' \frac{u - u_1}{2} \iint \frac{1}{r^3} (\mathfrak{y} \mathfrak{x}' - \mathfrak{x} \mathfrak{y}') ds\, d\varsigma' =$$

$$k i \varrho' \frac{u-u_1}{2} R^2 R' \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} [R' \sin \varphi' \cos \psi - (\mathfrak{x}_0' + R' \cos \varphi') \sin \psi] \cos \varphi\, d\varphi\, d\varphi' = 0.$$

Da diese Entwickelung nicht zum Ziele führt, suchen wir das Drehungsmoment um die $\mathfrak{Y}$-Axe. Wir beschränken uns dabei auf die Untersuchung der von $(u - u_1)$ und $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ abhängigen Glieder, weil die mit $\frac{\partial \varsigma'}{\partial t}$ proportionalen, wie ersichtlich, mit der Form des Ampère'schen Gesetzes übereinstimmen. Es ist dann:

$$\int (\mathfrak{X}^R \mathfrak{z} - \mathfrak{Z}^R \mathfrak{x}) ds = - k i \varrho' \frac{u-u_1}{2} \iint \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{x}} \mathfrak{z} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathfrak{z}} \mathfrak{x} \right) ds\, d\varsigma'$$

$$+ k i \varrho' (u - u_1) \iint \left(\mathfrak{z} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} \right) - \mathfrak{x} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial s} \right) \right) ds\, d\varsigma'$$

$$+ k i \varrho' 2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \iint \left(\frac{\mathfrak{z}}{r} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma} \right) - \frac{\mathfrak{x}}{r} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \sigma} \right) \right) ds\, d\varsigma'.$$

Ebenso wie vorhin lässt sich beweisen, dass die beiden letzten Integrale fortfallen; das erste jedoch kann geschrieben werden:

$$\int d\varsigma' \int \frac{1}{r^3} (\mathfrak{x}'\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'\mathfrak{x})\, ds =$$

$$-RR' \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} [(\mathfrak{x}_0' + R'\cos\varphi')(\mathfrak{z}_0 - R\sin\varphi) + \mathfrak{z}_0' R \cos\varphi \cos\psi]\, d\varphi\, d\varphi'$$

$$= -2\pi RR' \mathfrak{z}_0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} (\mathfrak{x}_0' + R' \cos\varphi')\, d\varphi'.$$

Es bleibt somit für das Drehungsmoment:

$$\int (\mathfrak{X}^R \mathfrak{z} - \mathfrak{Z}^R \mathfrak{x})\, ds = k i \varrho' (u - u_1) \pi R R' \mathfrak{z}_0 \left\{ R' \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{r^3} + \mathfrak{x}_0' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{r^3} \right\}.$$

Es erfordert sonach Riemann's Gesetz eine von $u - u_1$ abhängende Wirkung relativ bewegter oder ruhender freier Electricität auf einen relativ ruhenden constanten Strom, welche innerhalb der Beobachtungsgrössen fällt, sobald $u - u_1$ einige Meter übersteigt.

Jedoch ist das gefundene Drehungsmoment dem magnetischen Momente $i\pi R^2$ des Stromes in s nicht proportional, von der Richtung des Stromes i in s und vom Winkel ψ gänzlich unabhängig. Da nun R' sehr gross ist zu R, daher auch $i\pi RR'$ zu $i\pi R^2$, welch ersterer Factor in dem soeben gefundenen Ausdrucke vorkommt, so muss die mit $u - u_1$ proportionale Wirkung sehr vielmal, bez. unendlich vielmal grösser sein als die mit $\frac{\partial \varsigma'}{\partial t}$ proportionale.[1]) Das Drehungsmoment, welches in diesem Falle aus Riemann's Gesetz folgt, ist ebenfalls theoretisch unzulässig und praktisch unbrauchbar. Bestätigt sich je einmal die unitarische Hypothese experimentell, oder wird auch nur erwiesen, dass im galvanischen Strome die beiden Electricitäten sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortbewegen, dann dürfte Riemann's Grundgesetz schon aus theoretischen Gründen nicht mehr anzuwenden sein.

c. Berechnung nach Weber's Gesetz. Integrirt man die dritte Gleichung des Systems (V) nach ς' und bemerkt, dass wieder:

1) Vergl. Clausius, Wied. Ann. 2. p. 126 ff. 1877.

$$\int(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x})\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial s\,\partial\varsigma'}d\varsigma' = \int\frac{\partial}{\partial\varsigma'}\left[(\mathfrak{x}'-\mathfrak{x})\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\right]d\varsigma' - \int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'}d\varsigma',$$

wobei bei geschlossenem ς' das erste Glied fortfällt, dann ist:

$$ds\int\mathfrak{x}_1{}^W d\varsigma' = \mathfrak{X}^W ds = ki\varrho'\frac{\partial\varsigma'}{\partial t}ds\int\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\Sigma\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial\varsigma'}\right]d\varsigma'$$

$$+\, ki\varrho'\frac{u-u_1}{2}ds\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right]d\varsigma'.$$

Bildet man das Drehungsmoment $\int\left(\mathfrak{Y}^W\mathfrak{x} - \mathfrak{X}^W\mathfrak{y}\right)ds$, dann geben die beiden ersten Glieder ein schon bekanntes Resultat; die beiden letzten aber:

$$\iint\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{y}}\mathfrak{x} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{x}}\mathfrak{y}\right)\left(\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right)ds\,d\varsigma' =$$

$$\int d\varsigma'\int\frac{1}{r^3}(\mathfrak{y}'\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'\mathfrak{y})\left(\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right)ds.$$

Das zweite Glied kann geschrieben werden:

$$2\int\frac{1}{r^2}(\mathfrak{y}'\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'\mathfrak{y})\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}ds = 2\int\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}{r^2}\right]ds$$

$$-\,2\int\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}{r^2}\right)ds.$$

Bei geschlossenem s fällt das erste Glied fort, das zweite zerfällt in:

$$-\,2\int\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\left(\mathfrak{y}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s} - \mathfrak{x}'\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\right)ds + 4\int\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}'}{r^3}ds,$$

sodass der mit $u - u_1$ proportionale Theil des Drehungsmentes:

$$-\,u\,[\,\ldots\int\frac{d\varsigma'}{r^3}\int(\mathfrak{y}'\mathfrak{x} - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 ds - 2\iint\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(\mathfrak{y}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\varsigma} - \mathfrak{x}'\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\right)ds\,d\varsigma'\right]\cdot$$

$$\cdot - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 =$$

$$\cos\varphi\cos\psi + R'\cos\varphi' + \mathfrak{x}_0{}')\sin\varphi\cos\psi$$

$$\mathrm{in}\varphi\sin\psi + (\mathfrak{z}_0 - R\sin\varphi - \mathfrak{z}_0{}')\cos\varphi]^2.$$

Bei der Integration nach φ sind nur solche Glieder in Betracht zu ziehen, welche nur gerade Potenzen von $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ oder beide zugleich enthalten; dieselben sind hier:

$$\frac{2R^2}{r^2}(\mathfrak{y}'\cos\psi - \mathfrak{x}'\sin\psi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,[(R'\cos\varphi' + \mathfrak{x}_0')(\cos^3\psi + \sin^2\psi\cos\psi - \cos\psi) + R'\sin\varphi'(\sin^3\psi + \cos^2\psi\sin\psi - \sin\psi)] = 0.$$

In dem Falle jedoch, wo die in der eckigen Klammer befindlichen Glieder nicht Null ergeben, würde der Ausdruck noch immer vom Factor $(\mathfrak{y}'\cos\psi - \mathfrak{x}'\sin\psi)$, also vom willkürlichen Winkel ψ abhängig sein.

Berechnen wir das zweite Glied. Es ist:

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\mathfrak{y}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s} = \frac{1}{r^3}\left[(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\mathfrak{y}'\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\right)^2 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')\mathfrak{y}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}')\mathfrak{y}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s}\right].$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\mathfrak{x}'\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s} = \frac{1}{r^3}\left[(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}')\mathfrak{x}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s} + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}')\mathfrak{x}'\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\right)^2 + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}')\mathfrak{x}'\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s}\right];$$

substituirt man darin die Werthe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, dann wird:

$$\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(\mathfrak{y}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s} - \mathfrak{x}'\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\right)ds =$$

$$-R\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}(\mathfrak{y}'\cos\psi - \mathfrak{x}'\sin\psi)\sin\varphi\,[R\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi - \mathfrak{x}'\sin\varphi\cos\psi + R\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\psi - \mathfrak{y}'\sin\varphi\sin\psi + (\mathfrak{z}_0 - R\sin\varphi)\cos\varphi - \mathfrak{z}'\cos\varphi]\,d\varphi = \frac{\pi}{r^3}R[\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'\cos 2\psi - (\mathfrak{x}'^2 - \mathfrak{y}'^2)\sin\psi\cos\psi]$$

Beachtet man:

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' = R'\sin\varphi'(\mathfrak{x}_0' + R'\cos\varphi');\quad \mathfrak{x}'^2 - \mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{x}_0'^2 + R'^2\cos 2\varphi' + 2R'\mathfrak{x}_0'\cos\varphi'$$

dann verbleibt:

$$-\int d\varsigma'\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\left(\mathfrak{y}'\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s} - \mathfrak{x}'\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s}\right)ds$$

$$= \sin\psi\cos\psi\,\pi R R'\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}(\mathfrak{x}_0' + R'^2\cos 2\varphi' + 2R'\mathfrak{x}_0'\cos\varphi')\,d\varphi'.$$

Somit ist das Drehungsmoment um die $\mathfrak{Z}$-Axe, welches der aufgehängte Strom s durch die bewegte freie Electricität $\varsigma'\int d\varsigma'$ erleidet:

$$\int (\mathfrak{Y}^W \mathfrak{x} - \mathfrak{X} \mathfrak{y}^W)\, ds = k i \varrho' \frac{\partial \varsigma'}{\partial t} \pi R^2 R' (\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_0') \cos\psi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{r^3}$$

$$- k i \varrho' (u - u_1) \pi R R' \sin\psi \cos\psi \left\{ (\mathfrak{x}_0'^2 + R'^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{r^3} \right.$$

$$\left. + 2 R' \mathfrak{x}_0' \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{r^3} - 2 R'^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi'\, d\varphi'}{r^3} \right\}.$$

Man bemerkt sofort, dass das zweite Glied eine der Beobachtung zugängliche Grösse darstellt, sobald $u - u_1$ einige Meter übersteigt; doch ist auch dies Resultat nicht proportional dem magnetischen Momente des Stromes in s, ferner gänzlich unabhängig von der relativen Bewegung des Leiters s' und der Richtung des Stromes in s. Besteht s aus zwei nebeneinander liegenden, gleichgrossen, kreisförmigen Leitern, in denen die Stromrichtung entgegengesetzt ist, dann erleidet dies System keinerlei magnetische Wirkung, hingegen wäre die mit $u - u_1$ proportionale Wirkung doppelt so gross als die auf jeden einzelnen Strom in s.

Es führt demnach auch Weber's Gesetz in einem bestimmten Falle zu einer Wirkung, die ebenfalls theoretisch unzulässig und praktisch unbrauchbar ist; auch hier kann man schliessen, würde je einmal die unitarische Hypothese experimentell bestätigt, oder auch nur constatirt, dass im galvanischen Strome die beiden Electricitäten ungleiche Geschwindigkeit haben, dann würde auch Weber's Gesetz aus theoretischen Gründen nicht mehr anzuwenden sein.

3. Versuche, welche zwischen Riemann's und Clausius' Gesetz entscheiden können.

Aus den bisherigen Entwickelungen geht unzweifelhaft hervor, dass wir nur zwischen Riemann's und Webers Gesetz die Wahl haben, und zwar beide nur unter der Voraussetzung, dass die positive und negative Electricität im galvanischen Strome sich mit gleich grosser, entgegengesetzter Geschwindigkeit fortbewegen. Dann stimmen beide Gesetze mit Rowland's Versuchen überein.

Man bemerkt auch, dass unter dieser Voraussetzung die Kraft, welche ein relativ ruhender, geschlossener und constanter galvanischer Strom auf relativ ruhende, freie Electricität oder vice versa ausübt, nach beiden Gesetzen Null ist; hingegen ist sie nicht Null, wenn man relativ bewegte Stromträger oder freie Electricitäten betrachtet; auch hat sie im allgemeinen nach beiden Gesetzen verschiedene Werthe.

Die Componenten dieser Kräfte berechnen sich leicht, wenn man im System (II) setzt: $u' = u_1'$, $u = 0$; $\frac{\partial i'}{\partial s'} = 0$, $\frac{\partial i'}{\partial t} = 0$; im System (III) $u = u_1$, $u' = 0$, $\frac{\partial i}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$; es bleibt:

$$\mathfrak{X}^R\, ds\, ds' = k h i' ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \Sigma \frac{\partial (x - x')}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) + \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (x - x')}{\partial t}\right) \right].$$

$$\mathfrak{X}^W ds\, ds' = k h i' ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} - 2 r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial^2 r}{\partial t\, \partial s'} \right].$$

$$\mathfrak{X}_1^R\, ds\, ds' = k h' i\, ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \Sigma \frac{\partial (x' - x)}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (x' - x)}{\partial t}\right) \right].$$

$$\mathfrak{X}_1^W ds\, ds' = k h' i\, ds\, ds' \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s} - 2 r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial^2 r}{\partial t\, \partial s} \right].$$

Es lässt sich nun unmittelbar erweisen, dass diese Paare im allgemeinen nicht gleich sind. Integrirt man die erste Gleichung nach s', die dritte nach s, wo s und s' wieder geschlossene Curven bedeuten, dann fallen ihre letzten Glieder fort; ferner hat man:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right) ds' = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial s'} ds' + \int \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x'}{\partial t}\right) ds' - \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} \frac{\partial x'}{\partial t} ds'.$$

Das mittlere Glied fällt fort.

Wir führen jetzt die Coordinaten $\left\{\begin{array}{l} x - x' = x_1 \\ y - y' = y_1 \\ z - z' = z_1 \end{array}\right\}$ ein, sodass die Axen des neuen Systemes immer 180^0 mit den frühern bilden, sein Anfangspunkt jedoch in jedem Augen-

blicke die Coordinaten $x\ y\ z$ des frühern Systemes besitze. Es sei ς_1 die Bahn, welche der Endpunkt der Entfernung $r^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$ im neuen Systeme beschreibt; dann ist $\frac{\partial(x-x')}{\partial t} = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial \varsigma_1}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial \varsigma_1}$; $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial \varsigma_1}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \varsigma_1}$; sodass man schreiben kann:

$$ds\int \mathfrak{x}^R ds' = khi'ds\int \frac{\partial \varsigma_1}{\partial t}\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial \varsigma_1}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \varsigma_1}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right]ds' + khi'ds\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1}\frac{\partial x'}{\partial t}ds',$$

$$ds\int \mathfrak{x}^W ds' = khi'ds\int \frac{\partial \varsigma_1}{\partial t}\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial r}{\partial \varsigma_1}\frac{\partial r}{\partial s'} - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial \varsigma_1 \partial s'}\right)\right]ds'.$$

Im allgemeinen ist die relative Bahn ς_1, welche die im Leiter befindlichen electrischen Quanta mit dem Leiter s' durchlaufen, für jedes Element ds' verschieden; um jedoch besser vergleichen zu können, nehmen wir an, dass jedes Element ds' dieselbe, bez. parallele translatorische Bewegung auf der Erde vollführt; dann ist $\frac{\partial \varsigma_1}{\partial t} = \text{const.}$ Wendet man auf die zweite Gleichung die bei Berechnung der ponderomotorischen Kräfte benutzte Methode der Umformung an, so findet sich, dass bei geschlossener Bahn ς_1 die untereinander stehenden Glieder der beiden Ausdrücke gleich sind. Eine ganz ähnliche Untersuchung lässt sich auch in Bezug auf das Paar $\mathfrak{x}_1^R ds\,ds_1$ und $\mathfrak{x}_1^W ds\,ds'$ anstellen, sodass die Relationen bestehen:

$$ds\int \mathfrak{x}^W ds' = khi'ds\int\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\Sigma\frac{\partial(x-x')}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial s'}\right]ds' =$$

$$ds\int \mathfrak{x}^R ds' - khi'ds\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\frac{\partial x'}{\partial t}ds',$$

$$ds'\int \mathfrak{x}_1^W ds = khi'ds'\int\left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\Sigma\frac{\partial(x'-x)}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}\right]ds =$$

$$ds'\int \mathfrak{x}_1^R ds + kh'i\,ds'\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}ds.$$

Zu diesen Ausdrücken mögen noch einige Bemerkungen gefügt werden. Die erste bestimmt die vom ganzen Kreisstrome in s' auf die Electricität $+h\,ds$ ausgeübte

Kraft, wenn die Leiter s und s' sich in relativer Bewegung befinden. Nach Weber's Gesetz ist es einerlei, ob $+h\,ds$ relativ ruht, oder ob der Stromleiter s' zur Erde fest ist, da $\frac{\partial r}{\partial t}$ und $\frac{\partial (x-x')}{\partial t}$ dasselbe Vorzeichen besitzen, nicht aber nach Riemann's Gesetz, denn im letztern Falle ist $\frac{\partial x'}{\partial t}$ die Geschwindigkeitscomponente der Erdoberfläche, wo sich s' befindet, somit für alle Elemente ds' dieselbe; daher verschwindet das letzte Glied der ersten Gleichung, und $ds\int \mathfrak{x}^R ds' = ds\int \mathfrak{x}^W ds'$. Aber auch aus der zweiten Gleichung wird $ds'\int \mathfrak{x}_1^R\, ds = ds'\int \mathfrak{x}_1^W ds$, sobald der Stromträger s auf der Erde ruht. — Rotirt hingegen der Strom s' bez. s um seine eigene Axe, dann fällt ς_1 mit s' bez. s zusammen und die gebrauchte mathematische Umformung darf nicht angewendet werden; gilt jedoch, wenn nur $+h\,ds$ bez. $+h'ds'$ geschlossene Bahnen beschreiben. Ist in ersterem Falle die Stromebene der $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}$-Ebene parallel, dann wird $\frac{\partial (z-z')}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial z'}{\partial s'} = 0$ und $\frac{\partial z'}{\partial t} = \text{const.}$; ferner: $\mathfrak{z}^W ds\,ds' = k h\,ds\,i' \frac{\partial \varsigma_1}{\partial t} ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}\right)$. Setzt man: $r^2 = \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 + R'^2 - 2\mathfrak{x}_0 R' \cos\psi'$, wobei $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{z}_0$ die Entfernung des Quantums $+h\,ds$ von der Axe und der Ebene des Stromes, R' dessen Radius, dann wird:

$$ds\int \mathfrak{z}^R\, ds' = \mathfrak{Z}^R\, ds = 0;$$

$$ds\int \mathfrak{z}^W ds' = \mathfrak{Z}^W ds = k h\, ds\, i' \frac{\partial \varsigma_1}{\partial t}\mathfrak{z}_0\left[2\frac{\mathfrak{x}_0}{R'}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{r^3} - 3\mathfrak{x}_0^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi'\, d\varphi'}{r^3}\right].$$

Unmittelbar entscheidend wäre der soeben berechnete Fall; mittelbar auch die schon von Riecke[1]) und später von Lorberg[2]) für ähnliche Zwecke vorgeschlagenen Versuche, wo man die electrisch vertheilende Wirkung eines um seine Axe drehbaren geschlossenen und constanten Stromes auf einen in der Nähe befindlichen ruhenden bez. mitrotirenden

1) Riecke, Götting. Nachr. p. 536. 1873; Wied. Ann. **1.** p. 124. 1877.
2) Lorberg, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 592, 1878.

Leiter in der Ruhe und während der Rotation zu beobachten hätte. Die geringe convective Wirkung der infolge des stattfindenden Stromes auftretenden Oberflächenladung des rotirenden Leiters könnte leicht eliminirt werden.

Wir fassen das Ergebniss obiger Betrachtungen wie folgt zusammen. Clausius' Gesetz enthält zwei Classen von beobachteten Thatsachen nicht, steht also im Widerspruche mit denselben; Clausius' Gesetz, und unter Voraussetzung ungleicher Geschwindigkeit der beiden Electricitäten im galvanischen Strome auch Riemann's und Weber's Gesetz führen zu theoretisch unzulässigen und praktisch unbrauchbaren Resultaten; die Entscheidung zwischen beiden letzteren Gesetzen ergeben die Wirkungen bewegter freier Electricität auf Ströme oder vice versa, wenn anders man nicht auf diejenigen der bewegten freien Electricitäten aufeinander zurückgeht.

Budapest, am 15. September 1879.

V. *Allgemeine Theorie der Dämpfung, welche ein Multiplicator auf einen Magnet ausübt; von Karl Schering,*

Privatdocent an der Universität Göttingen.

Die Theorie der Bewegung eines Magneten, der in einem von galvanischen Strömen durchflossenen Multiplicator schwingt, ist zuerst von Gauss und W. Weber[1]) vollständig entwickelt unter Voraussetzung so kleiner

1) Gauss, Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel: Resultate. 1837. Ueber ein Mittel, die Beobachtung von Ablenkungen zu erleichtern: Resultate 1839. — W. Weber, Electrodynamische Maassbestimmungen. Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. **1**. 1850. (1852.) Ueber die Anwendung der magnetischen Induction auf Messung der Inclination mit dem Magnetometer. Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. **5**. 1853. Zur Galvanometrie. Ebenda. **10**. 1862.

Schwingungsbögen, dass die Dämpfung, welche die im Multiplicator durch den bewegten Magnet erzeugten Inductionsströme wieder auf dessen Bewegung ausüben, als constant angesehen werden kann, und dass ausserdem das magnetische Drehungsmoment dem Winkel, statt dem Sinus proportional gesetzt werden darf. Diese Theorie hat dann ihren Begründern selbst und später zahlreichen anderen bei galvanometrischen Messungen von grösstentheils fundamentaler Bedeutung als Grundlage gedient. Besonders diese vielseitige Anwendung des Galvanometers und ausserdem die Genauigkeit der Beobachtung, welche durch die Methode der Spiegelablesung erreicht ist, können es wünschenswerth erscheinen lassen, die Theorie der Bewegung auch mit Berücksichtigung der Abhängigkeit der Dämpfung vom Ausschlagswinkel abzuleiten und hieraus zum Zwecke praktischer Anwendung Correctionsglieder zu bestimmen, welche an den nach der gewöhnlichen Methode aus den beobachteten Grössen berechneten Werthen unter Umständen anzubringen sind.

Im Folgenden ist zunächst an zwei Galvanometern experimentell gezeigt, wie die in der bisher untersuchten Differentialgleichung als constant angesehene Empfindlichkeit derselben (d. h. das Verhältniss der Intensität eines im Multiplicator inducirten Stromes zu dem dadurch erfolgenden Ausschlage des Magnetes) als eine Function dieses Ausschlagwinkels, deren Quadrat kurz als „Dämpfungsfunction“ bezeichnet werden möge, genau bestimmt und analytisch dargestellt werden kann. Dann wird die allgemeine Differentialgleichung aufgestellt, in welcher das von dem Quadrate des Winkels abhängige Glied der Dämpfungsfunction und von der dem Sinus proportionalen erdmagnetischen Kraft die beiden ersten Glieder der Entwickelung berücksichtigt sind. Diese Gleichung wird mit einer Annäherung, welche nur die fünften Potenzen des Winkels vernachlässigt, integrirt, und dann sind die Gleichungen für die Schwingungsdauer, die Dämpfung und die Anfangsgeschwindigkeit als Functionen des Ausschlagwinkels ab-

geleitet. In diesen Entwickelungen ist also als specieller Fall die Theorie der Bewegung eines Magnets im Multiplicator mit constanter Dämpfung enthalten, aber mit gleichzeitiger Berücksichtigung der dem Sinus proportionalen Kraft und der Dämpfung, eine Theorie, von der W. Weber in der Abhandlung: „Zur Galvanometrie“[1]) schon erwähnt, dass sie bisher noch nicht entwickelt sei.

§ 1. Experimentelle Bestimmung der Dämpfungsfunction.

Von den benutzten Galvanometern ist das eine (Nr. I) dasselbe, welches F. Kohlrausch zu der absoluten Widerstandsbestimmung benutzt hat, und das bei der betreffenden Abhandlung in Pogg. Ann., Ergänzungsband **6.** Taf. I, Fig. 1 abgebildet ist. Ein an der Decke des Zimmers befestigter Kupferdraht trägt ausser dem Spiegel und Torsionskreis zwei cylindrische astatisch verbundene Magnete von der Länge = 170 mm, und vom Durchmesser = 14 mm. Um den untern, der in der natürlichen Lage sich befindet, wird ein Multiplicator mit engen, nahezu elliptischen Windungen herumgesetzt (25 Windungen nebeneinander; Breite = 90 mm). Die Beobachtungen am Multiplicator I wurden im hiesigen physikalischen Institute ausgeführt; Hrn. Prof. Riecke bin ich für die gütige Erlaubniss zur Benutzung der Instrumente zu Danke verpflichtet. Der Multiplicator Nr. II gehört zu dem im hiesigen magnetischen Observatorium der Sternwarte befindlichen Magnetometer und dient zur Bestimmung der magnetischen Inclination mit Hülfe des Erdinductors, der ebenso wie das Magnetometer unter Leitung von Weber construirt und aufgestellt ist. Der Magnet besteht aus zwei Halbcylindern (Länge 473 mm, Durchmesser = 25 mm). Die Drahtwindungen sind auf einen Messingrahmen aufgewickelt, der für den Magnet einen parallelepipedischen Hohlraum von 532 mm Länge, 55 mm Höhe und unbegrenzter Breite frei lässt; sie bilden so Rechtecke, deren vertical stehende Schmalseiten aber durch Halbkreise ersetzt sind. Die Gesammtbreite der

1) W. Weber, Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. **10.** p. 55. 1862.

neben einander liegenden 28 Windungen beträgt 72 mm, sodass bei einer Ablenkung des Magnets, welche 8° 39,3′ übersteigt, die Endpunkte der Mittellinie desselben über die äussersten Windungen hinausragen. Für den Multiplicator I würde dieser Winkel 27° 53,8′ betragen. Der Multiplicator I wurde zunächst zum Zwecke einer ungefähren Centrirung desselben und um ein vorläufiges Urtheil über die Aenderung der Empfindlichkeit mit der Ablenkung zu gewinnen, zugleich mit einer Tangentenbussole und einem Bunsen'schen Elemente zu einem Stromkreise verbunden; und zwar so, dass durch den Multiplicator ein Zweigstrom ging. In der That ergaben mehrere Beobachtungsreihen, die aus gleichzeitigen Ablesungen an dem Galvanometer und der Tangentenbussole erhalten wurden, eine Abnahme der Empfindlichkeit des Galvanometers von ca. 2 Proc. bei einer Ablenkung von 6° aus der Ruhelage, ausserdem aber das Maximum der Empfindlichkeit nicht in der Ruhelage selbst, sondern bei einer um ungefähr 100 Scalentheile davon abgelenkten Lage. Das letztere Resultat konnte nur eine Folge der noch nicht vollständig ausgeführten Centrirung sein, und die in anderer Weise angestellten, unten mitgetheilten, definitiven Beobachtungen bestätigen dies vollständig und bestimmen zugleich den Centrirungsfehler. Eine in der vorher angedeuteten Weise ausgeführte Prüfung der Empfindlichkeit eines Galvanometers hat zuerst im Jahre 1878 Hr. Prof. Wild in Petersburg[1]) ausgeführt und Resultate erhalten, mit denen die erwähnten übereinstimmen.

Um aber eine wirkliche numerische Bestimmung für die Empfindlichkeit eines Galvanometers zu erhalten, als Function des Winkels φ, welchen die magnetische Axe des Magnets mit der Ebene der parallelen Windungen des Multiplicators bildet, habe ich eine andere Methode angewandt. Denn nach der oben angedeuteten ist diejenige

1) Wild, Ueber die Bestimmung der absoluten Inclination mit dem Inductionsinclinatorium. Mém. de l'Acad. Impér. des Sciences de St. Petersbourg. VII Série. **26.** No. 8.

Richtung der magnetischen Axe, für welche $\varphi = 0$ ist, also die Empfindlichkeit ein Maximum besitzt, nur sehr unsicher zu bestimmen.

Den Multiplicator verband ich zu dem Zwecke jetzt mit einem kleinen Erdinductor (bei dem Multiplicator II mit einem Magnetinductor). Zunächst wurde dann in der Ruhelage des Magnetes das logarithmische Decrement mit Benutzung der Inductionsströme, die durch Umdrehen des Erdinductors (resp. Magnetinductors) erzeugt waren, nach der Zurückwerfungsmethode in bekannter Weise bestimmt, und ausserdem die Schwingungsdauer bei unterbrochenem Drahtkreise und die Luftdämpfung beobachtet. Dann erhielt ich die Magnetnadel durch einen kleinen in die Nähe gelegten Hülfsmagnet in einer constanten Ablenkung von ungefähr 3° bis 6° und bestimmte wieder Decrement und Schwingungsdauer. Das erstere ergab sich dann kleiner als in der Ruhelage, die letztere, welche nur bekannt sein musste, um einen etwaigen Einfluss des kleinen Magnetes auf das magnetische Drehungsmoment zu eliminiren, war wenig verschieden. Endlich wurde der Hülfsmagnet um seine Queraxe gedreht, sodass er eine gleich grosse entgegengesetzte Ablenkung hervorbrachte, und auch in dieser Lage Dämpfung und Schwingungsdauer bestimmt. Zum Schlusse wurden als Controle dieselben Grössen in der natürlichen Ruhelage des Magnets noch einmal beobachtet. Die Schwingungsbogen der Nadel, aus denen in den drei verschiedenen Lagen das Decrement berechnet wurde, waren immer so klein (bei dem Multiplicator I der grössere Bogen 80 Scalentheile, der kleinere 25; bei dem Multiplicator II 140 resp. 60), dass die Dämpfung innerhalb dieses Bogens als constant angesehen und das berechnete Decrement für die betreffende Gleichgewichtslage der Nadel gelten kann.

In mehreren Beobachtungsreihen ergaben sich so die in den folgenden Tabellen 1 u. 2 zusammengestellten Werthe.

Es bedeutet:

G die Gleichgewichtslage des Magnetes in Scalentheilen. Der mittlere Theilstrich war bei dem Multipli-

cator I 750, bei II 1750, da hier drei Scalen aneinander gelegt wurden. Während der mit (*) bezeichneten Beobachtungsreihen lag der Hülfsmagnet in der Nähe des Multiplicators.

λ ist das logarithmische Decrement bei geschlossenem Drahtkreise.

λ_0 bei geöffnetem.

τ_0 die Schwingungsdauer ebenfalls bei geöffneter Kette, in Secunden.

Tabelle 1. Multiplicator I.

	Temp.	G	$\lambda \log e$	$\lambda_0 \log e$	τ_0
März 26	6,0°	826,61	0,48870	0,00467	30,296[8]
		1436,68	0,46320	0,00527	30,385 *
	6,8°	822,36	0,48895	0,00468	30,292
März 26	6,8°	824,46	0,48494	0,00397	30,381
	6,6°	220,24	0,47880	—	— *
März 27	7,3°	828,20	0,48170	0,00401	30,304
	7,7°	427,94	0,47990	0,00378	30,359 *
28	7,5°	830,02	0,48155	0,00392	30,302
	7,8°	1237.62	0,47063	0,00388	30,337 *
30	9,1°	836,85	0,47722	0.00374	30.298
	9,5°	231.06	0,47055	0,00416	30,456 *
	9,6°	835,88	0,47778	—	—
31	9,5°	839,98	0,47703	0,00389	30,297
		1453,68	0,45021	0.00445	30,375 *
	10,1°	841,81	0,47736	0,00412	30,293

Entfernung der Scala vom Spiegel = 3090,4 Scal.

Tabelle 2. Multiplicator II.

	Temp.	G	$\lambda \log e$	$\lambda_0 \log e$	τ_0
Juni 3	16,61°	1784.42	0,34692	0.00717	20,435[8]
		2733,71	0.26841	0.00761	20,591 *
	16,65°	829,78	0,25746	0,00753	20,635 *
	16,68°	1789,52	0,34649	0,00738	20,432
Juni 4	14,69°	1783.27	0,34935	0,00715	20,449
		2751.47	0,26316	0,00725	20,626 *
	14,69°	809,44	0,26069	0,00730	20,652 *
	14,69°	1774,78	0,34894	0,00706	20,436

Tabelle 2. Multiplicator II. (Fortsetzung.)

	Temp.	G	$\lambda \log e$	$\lambda_0 \log e$	τ_0
Juni 5	17,29°	1784,96	0,34706	0,00761	20,430^s
	17,52°	2666,76	0,27308	0,00781	20,581*
	17,69°	904,25	0,27349	0,00784	20,590*
	17,69°	1786,85	0,34697	—	—
	17,69°	2228,48	0,32407	0,00747	20,444*
	17,70°	1344,24	0,32479	0,00747	20,457*
	17,70°	1787,08	0,34669	0,00736	20,431

Entfernung der Scala vom Spiegel = 4120 Scalth.

Diese Beobachtungen lassen deutlich in den abgelenkten Stellungen der Nadel eine kleinere Dämpfung erkennen. Zu der Tab. 1 sei noch erwähnt, dass die stetigen Aenderungen der Ruhelage und der Dämpfung, von denen die letzteren sich nur zur Hälfte durch die Temperaturerhöhung erklären lassen, wahrscheinlich ihren Grund finden in einer Aenderung der Torsionskraft des vorher längere Zeit nicht gespannten Drahtes, zumal da infolge guter Astasie der Nadeln das Verhältniss θ der Torsion zur magnetischen Kraft sehr gross, nämlich = 1,2222 war. Bei den Beobachtungen am Multiplicator II (Torsionsverhältniss θ = 0,0093) folgt die Aenderung der Dämpfung während der verschiedenen Tage, ganz nach der Regel, der Temperaturänderung.

Obige Resultate können in folgender Weise zu einer einfachen Berechnung der Dämpfungsfunction benutzt werden. Diese stimmt nach ihrer physikalischen Bedeutung überein mit dem Quadrate der Derivirten (nach φ) der Potentialfunction V für die Wechselwirkung eines im Multiplicator kreisenden galvanischen Stromes von der Intensität 1 und des Magnets. Bezeichnet nun K das Trägheitsmoment des Magnets, W den Leitungswiderstand im Stromkreise, so ist nach bekannten Ableitungen[1]):

1) W. Weber, Zur Galvanometrie. a. a. O. p. 23 $\left(f = \frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$ 1862. F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 6. p. 12 $\left(q = \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$ 1874.

$$\frac{\lambda}{\tau_0}\frac{\sqrt{\pi\pi+\lambda_0\lambda_0}}{\sqrt{\pi\pi+\lambda\lambda}}-\frac{\lambda_0}{\tau_0}=\frac{1}{2KW}\left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2=F(\varphi)\,.$$

Hierin ist also $V(\varphi)$ der Werth der Potentialfunction in dem Falle, dass die magnetische Axe des Magnets mit den Ebenen der Windungen des Multiplicators den Winkel φ bildet. Die Gleichung gilt, wenn $\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}$ bei den beobachteten Schwingungen des Magnetes sich nicht ändert. Sie lässt sich benutzen, um $V(\varphi)$ als Function von φ zu bestimmen, wenn, wie es oben geschehen, der Magnet in einer constanten Ablenkung $=\varphi$ erhalten wird und um diese Lage in einem so kleinen Bogen ψ schwingt, dass $\frac{\partial V(\varphi+\psi)}{\partial\psi}$ als constant in Bezug auf ψ angesehen werden und daher mit Vernachlässigung von Grössen der Ordnung $\psi\varphi$, $\frac{\partial V(\varphi+\psi)}{\partial\psi}=\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}$ gesetzt werden kann. Ergibt dann die Beobachtung in dieser abgelenkten Lage für die Constanten λ, τ_0 andere Werthe, als in der Ruhelage des Magnetes, so ist damit eine Werthänderung von $\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}$ nachgewiesen.

Es mag noch bemerkt werden, dass der in die Nähe gelegte kleine Hülfsmagnet auf den Werth von V, der Bedeutung dieser Function nach, nur insofern Einfluss haben kann, als er das magnetische Moment des Hauptmagnets ändern könnte. Einmal ist aber diese Wirkung ausserordentlich gering, da die Verbindungslinie der Centra der beiden Magnete in allen Fällen nahezu einen rechten Winkel mit der Axe des Hauptmagnets bildete, und zweitens würde dadurch eine Vergrösserung des Werthes von $\frac{\partial V}{\partial\varphi}$ in den abgelenkten Lagen hervorgerufen werden, während das Gegentheil beobachtet ist.

Da nun für gleich grosse, aber entgegengesetzte Ablenkungen $F(\varphi)$ denselben Werth haben muss, also eine gerade Function von φ ist, so können wir zunächst mit Vernachlässigung der vierten Potenzen setzen:

$$F(\varphi)=M(1-M_1\varphi^2)\,.$$

Von den Werthen $F(\varphi)$, welche aus den beobachteten λ, λ_0, τ_0 berechnet werden können, sind je zwei für gleich grosse aber entgegengesetzte Ablenkungen des Magnets zu combiniren mit einem Werthe von $F(\varphi)$, für welchen die Nadel in der natürlichen Ruhelage sich befand, also $\varphi = \alpha$ war, d. i. gleich dem infolge unvollständiger Centrirung des Multiplicators noch bestehenden Winkel zwischen der magnetischen Axe und der Ebene der Multiplicatorwindungen. Wir haben also die drei Gleichungen:

$$F(\alpha) = M(1 - M_1 \alpha^2) = A_0$$
$$F(\varphi + \alpha) = M\left(1 - M_1 (\varphi + \alpha)^2\right) = A_1 \quad A_1 < A_2 < A_0$$
$$F(\varphi - \alpha) = M\left(1 - M_1 (\varphi - \alpha)^2\right) = A_2$$

Hieraus sind die drei Unbekannten α, M_1, M zu bestimmen, und zwar ergibt sich nach leichten Rechnungen:

$$\frac{\alpha}{A_2 - A_1} = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{(A_0 - A_1) + (A_0 - A_2)},$$

$$M_1 = \frac{A_0 - A_1}{A_0(\varphi + \alpha)^2 - A_1 \alpha^2} = \frac{A_0 - A_2}{A_0(\varphi - \alpha)^2 - A_2 \alpha^2}, \quad M = \frac{A_0}{1 - M_1 \alpha^2}.$$

Setzt man:

$$B = 1 - \frac{A_1 + A_2}{2 A_0},$$

so folgen die zur Rechnung bequemeren Formeln:

$$\frac{\alpha}{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{A_2 - A_1}{2 A_0} \cdot \frac{1}{B}; \quad M_1 = \frac{B}{\varphi^2} \frac{1}{1 + B \frac{\alpha^2}{\varphi^2}}; \quad M = A_0 \left(1 + B \frac{\alpha^2}{\varphi^2}\right).$$

Die so aus den Beobachtungen der Tab. 1 u. 2 berechneten Werthe von φ, A_0, A_1, A_2, M, M_1 sind in den folgenden Tabellen angegeben. Aus den verschiedenen, in der Regel zwei zu einer Beobachtungsreihe gehörenden Werthen von A_0 ist das Mittel angenommen. Anstatt des Werthes α ist der Scalentheil R der Ruhelage des Magnets angegeben und R_0, d. i. der Scalentheil, welcher abgelesen werden würde, wenn die magnetische Axe parallel der Ebene der Multiplicatorwindungen ist; es ist also $R - R_0$ gleich 2α in Scalentheilen.

Tabelle 3. Multiplicator I.

	R	φ in Scalenth. s	φ in Graden		R_0	M_1	M	Temp.
März 26	824,47	0 ± 600,66 =	5° 34,4′	A_0 = 0,034 522 A_1 = 0,032 840 A_2 = 0,033 852	695,3	3,601	0,034 577	6,4°
März 27, 28	829,36	0 ± 402,52 =	3° 43,9′	A_0 = 0,034 223 A_1 = 0,033 458 A_2 = 0,034 048	703,0	3,234	0,034 270	7,6°
März 30, 31	838,63	0 ± 602,56 =	5° 35,1′	A_0 = 0,033 915 A_1 = 0,032 042 A_2 = 0,033 316	683,4	3,825	0,033 997	9,7°

$$\text{Im Mittel: } \frac{1}{2\,K\,W}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = 0{,}034\,281\left(1 - 3{,}553\left(\frac{s}{2r}\right)^2\right).$$

Tabelle 4. Multiplicator II.

	R	φ in Scalenth. s	φ in Graden		R_0	M_1	M	Temp.
Juni 3	1786,97	0 ± 934,79 =	6° 29,5′	A_0 = 0,037 048 A_2 = 0,028 593 A_1 = 0,027 391	1818,0	19,033	0,037 058	16,65°
Juni 4	1779,02	0 ± 953,08 =	6° 37,1′	A_0 = 0,037 300 A_2 = 0,028 037 A_1 = 0,027 724	1789,0(*)	18,841	0,037 300	14,69°
Juni 5	1785,91	0 ± 867,84 =	6° 1,6′	A_0 = 0,037 047 A_1 = 0,029 084 A_2 = 0,029 116	1785,0	19,386	0,037 047	17,45°
	1787,78	0 ± 440,43 =	3° 5,5′	A_0 = 0,037 054 A_1 = 0,034 590 A_2 = 0,034 644	1784,5	23,075	0,037 054	17,70°

$$\text{Im Mittel: } \frac{1}{2\,K\,W}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = 0{,}037\,115\left(1 - 20{,}084\left(\frac{s}{2r}\right)^2\right).$$

Was zunächst den Fehler der Centrirung des Multiplicators betrifft, so ist besonders aus Tab. 4 ersichtlich, dass derselbe auf diese Weise mit Sicherheit bestimmt und eliminirt werden kann. Denn es wurde nach der Beobachtung am Juni 3 (da sich $R_0 - R = 1818{,}0 - 1786{,}97 = 31{,}03$ als Resultat der Rechnung ergab) der Multiplicator, an dem ebenfalls ein Spiegel befestigt war, um einen (in das Stativ eingelassenen, möglichst genau in die Verlängerung des Suspensionsdrahtes eingestellten) Zapfen um 30 Scalentheile gedreht, und es ergab dann auch die Beobachtung am folgenden Tage für R_0 den berechneten um 29 Theilstriche verschiedenen, mit (*) bezeichneten Werth, sodass eine vollständige Centrirung erreicht wäre, wenn nicht der Nullpunkt R infolge einer Aenderung der Declination um 7,9 Scalentheile sich verschoben hätte. Es erscheint demnach diese Methode, zumal wenn man die unten (p. 302) angegebenen Näherungsformeln benutzt, wohl einfacher, als diejenige, welche „constante“ Ströme zur Centrirung eines Multiplicators benutzt, und eine numerische Bestimmung von α nicht zulässt. So war z. B. bei dem Multiplicator I durch Drehen desselben erreicht, dass die beiden entgegengesetzten Ablenkungen durch einen constanten Strom, die je ungefähr 700 Scalentheile betrugen, um 1,7 Theile nur noch differirten, und zwar war die Ablenkung nach abnehmenden Theilen die grössere; die Dämpfungsbeobachtungen ergaben dann bei unveränderter Stellung des Multiplicators die ungleichen Decremente 0,46320; 0,47880 für gleiche, entgegengesetzte Ablenkungen durch den Hülfsmagnet von ungefähr 600 Scalentheilen (s. Tab. 2), woraus dann $R - R_0$ zu ungefähr 120 Scalentheilen folgt (Tab. 4).

Es zeigt sich ferner, dass der Zahlencoëfficient M_1 auch bei dem Multiplicator I einen verhältnissmässig grossen Werth hat, dass also die gebräuchliche Vernachlässigung von $M_1 \varphi^2$ nicht allgemein zugestanden werden kann.

Es mag noch besonders hervorgehoben werden, *dass die Grösse M_1, wie sie hier definirt ist, eine für das betreffende*

Galvanometer absolute Constante ist (vorausgesetzt, dass das magnetische Moment des Magnets ungeändert bleibt), *die von dem Leitungswiderstande des Stromkreises nicht abhängt.*

Bei einer so starken Abnahme der Dämpfung wie bei dem Multiplicator II macht sich sogar das Glied mit φ^4 bemerkbar, wie aus der stetigen Abnahme von M_1 mit wachsendem Winkel φ zu ersehen ist. Es wird daher wünschenswerth sein, eine vollständigere Darstellung für $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ zu erhalten. Der physikalischen Bedeutung nach muss diese Function eine gerade sein, ferner für $\varphi = 0$ einen Maximalwerth besitzen, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu Null werden endlich für Werthe, die sich um π unterscheiden, gleich gross und entgegengesetzt sein, also die Periode 2π besitzen. Diesen Bedingungen genügt die elliptische Function $\cos \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi\right)$. Wir setzen daher:

$$\frac{1}{2KW}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = M \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi, k\right);$$

worin L das von Jacobi mit K bezeichnete ganze elliptische Integral bedeutet. Es ist also die Aufgabe, den Modul k oder auch $\frac{2L}{\pi}$ so zu bestimmen, dass die elliptische Function sich den beobachteten Werthen möglichst nahe anschliesst. Einen angenäherten Werth von $\frac{2L}{\pi}$ erhalten wir, wenn wir in der Entwickelung von $\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2$ auch die vierten Potenzen von φ berücksichtigen. Es ergibt sich dann im Mittel aus den vier beobachteten Werthen von M_1 (Tab. 4) der genauere Coëfficient von φ^2 zu 24,270, und es folgt daher aus:

$$\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi\right) = 1 - 24{,}270\,\varphi^2 + \ldots.$$

durch Differentiation und Uebergang zur Grenze $\varphi = 0$ der Werth:

$$\left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 = 24{,}270, \qquad \text{also} \qquad L = 7{,}7384$$

und nach den Legendre'schen Tafeln, wenn $k = \sin\theta$ gesetzt wird:

$$\theta = 89^0\,54{,}6'.$$

Für den Multiplicator I ergibt sich analog:

$$\theta = 77^0\,46{,}2'.$$

Mit Zugrundelegung dieses Werthes für $\frac{2L}{\pi}$ muss die elliptische Function für die vier beobachteten Werthe von φ berechnet werden. Da nun k sehr nahe der Einheit liegt, so ist es am passendsten, die aus der Transformation der ϑ Functionen sich ergebende bekannte Formel anzuwenden[1]):

$$\cos \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi,\ k\right) = \frac{\sum_n q_1^{(n+1/2)^2} \cdot \sum_n (-1)^n q_1^{n^2} \cdot e^{n.2z_1}}{\sum_n (-1)^n q_1^{n^2} \cdot \sum_n q_1^{(n+1/2)^2} \cdot e^{(n+1/2)2z_1}}.$$

$$= \frac{2}{e^{z_1} + e^{-z_1}}\left\{1 - q_1\left(e^{z_1} - e^{-z_1}\right)^2 + \dots\dots\right\},$$

worin q_1 und z_1 definirt sind durch die Gleichungen:

$$q_1 = e^{-\frac{L}{L'}\pi}, \qquad z_1 = \frac{L}{L'}\varphi,$$

ferner L, L' dieselbe Bedeutung haben wie bei Jacobi K, K', und die Summen über alle ganzzahligen Werthe von n zu erstrecken sind. Da für den Multiplicator II $q_1 = 0{,}000\,000\,2$ wird, und das Glied, das mit q_1 multiplicirt ist, daher erst für $\varphi = 22^0\,58{,}5'$ den Werth 0,00001 erreicht, so kann zur Berechnung bis zu $\varphi = 7^0$, wie es für unsern Zweck nur nothwendig ist, der einfache Ausdruck $\frac{2}{e^{z_1} + e^{-z_1}}$ genügen. Die hiernach berechneten Werthe der elliptischen Function sind in folgender Weise benutzt, um den genauern Werth von $\frac{2L}{\pi}$ zu ermitteln. Es sollen die Gleichungen bestehen:

---

1) Thomae, Abriss einer Theorie der „complexen" Functionen. p. 191. 1873.

$$A_0 = M \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\alpha, k\right);$$

$$A_1 = M \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}(\varphi + \alpha), k\right);$$

$$A_2 = M \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}(\varphi - \alpha), k\right),$$

wenn, wie oben, A_0 A_1 A_2 die beobachteten Werthe bezeichnen. Da nun besonders bei dem Multiplicator II α gegen φ immer sehr klein ist, so können wir für die folgende Rechnung genügend genau setzen:

$$A_0 = M, \qquad \frac{A_1 + A_2}{2} = M \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi, k\right),$$

woraus folgt:

$$\frac{A_1 + A_2}{2A_0} = \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi, k\right).$$

Aus den noch stattfindenden Unterschieden zwischen den numerischen Werthen der linken und der rechten Seite sind dann die folgenden Differenzengleichungen gebildet:

$$1 - m_1^{(v)} \varphi_v^2 - \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi_v\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{L}{L'}\right)} \cos^2 am\left(\frac{2L}{\pi}\varphi_v\right) . \varDelta\left(\frac{L}{L'}\right)$$

$$= \left\{-8\varphi \cdot \frac{e^{\frac{L}{L'}\varphi_v} - e^{-\frac{L}{L'}\varphi_v}}{\left(e^{\frac{L}{L'}\varphi_v} + e^{-\frac{L}{L'}\varphi_v}\right)^3}(1 + 8q_1) - 8\pi q_1 \left(\frac{e^{\frac{L}{L'}\varphi_a} - e^{-\frac{L}{L'}\varphi_v}}{e^{\frac{L}{L'}\varphi_v} + e^{-\frac{L}{L'}\varphi_v}}\right)^2\right\} . \varDelta\left(\frac{L}{L'}\right)$$

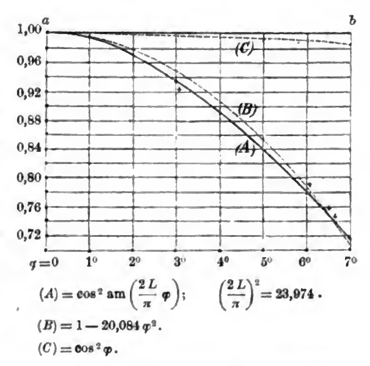
worin für φ_v $(v = 1, 2, 3, 4)$ die vier beobachteten Werthe von φ (Tab. 4) und für $M_1^{(v)}$ die betreffenden Werthe von M_1 einzusetzen sind. Die Glieder mit q_1 können wieder vernachlässigt werden.

Aus den vier Gleichungen ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate $\varDelta\left(\frac{L}{L'}\right) = -0{,}148$. Danach wird schliesslich der Coëfficient $\left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 = 23{,}974$, und wir erhalten als Endformel:

$$\frac{1}{2KW}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = M \cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi, k\right)$$

$$k = \sin\theta, \qquad \theta = 89^0\, 53{,}4', \qquad L = 7{,}6912, \qquad L' = 1{,}5708.$$

Hiernach ist $\cos^2 am\left(\frac{2L}{\pi}\varphi\right)$ für die ganzen Grade von 1° bis 7° berechnet, und danach die Curve (A) auf der beistehenden Figur construirt. Die für dieselben Winkel berechnete Function $1-20{,}084\,\varphi^2$, welche unter Tab. 4 angegeben, als Coëfficient von φ^2 einfach den Mittelwerth der beobachteten M_1 enthält und zur Ausrechnung der später anzugebenden Correctionsglieder benutzt ist, hat die Curve (B) ergeben. Die Uebereinstimmung derselben, besonders der elliptischen Function, mit den vier beobachteten Werthen $1 - M_1^{(v)}\varphi_v^2$, die durch (+) bezeichnet sind, lassen erkennen, dass in dieser Weise die Dämpfungsfunction eines Galvanometers mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit auch numerisch bestimmt werden kann. Zugleich lehrt das rasche Sinken der Dämpfungsfunction A unter die Grade (a, b), dass die Annahme einer constanten Dämpfung, d. h. das Substituiren von (a, b) für A nicht allgemein zulässig sein kann.



$(A) = \cos^2 \mathrm{am}\left(\frac{2L}{\pi}\varphi\right)$; $\left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 = 23{,}974$.

$(B) = 1 - 20{,}084\,\varphi^2$.

$(C) = \cos^2\varphi$.

Im Obigen sind die Grössen M_1 und α aus den genauen, von λ, λ_0, τ_0 abhängigen Formeln (p. 295) ermittelt; sehr angenäherte Werthe, wie sie in den meisten Fällen, z. B. zum Zwecke der Centrirung ausreichen werden, ergeben sich, wenn man das Quadrat der Luftdämpfung, die Aenderung der Schwingungsdauer durch den genäherten Hülfsmagnet vernachlässigt, also für A_0 A_1 A_2 einfach die Dämpfungen setzt. Bedeutet dann:

λ^0 die Dämpfung bei geschlossener Kette in der natürlichen Ruhelage des Magnets;

λ', λ'' die Dämpfung in den beiden um $\pm\varphi$ abgelenkten Lagen;

ferner wie oben:

M_1 den gesuchten Coëfficienten der Dämpfungsfunction, und α den Fehler der Centrirung; (α positiv gerechnet von der Ruhelage aus nach dem Punkte hin, für welchen λ'' gilt), so ist:

$$\lambda' < \lambda''; \qquad \frac{\alpha}{\varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda'' - \lambda'}{2\lambda^0}\cdot\frac{1}{B}, \qquad M_1 = \frac{B}{\varphi^2}\,\frac{1}{1 + B\,\frac{\alpha^2}{\varphi^2}}$$

für:

$$B = 1 - \frac{\lambda' + \lambda''}{2\lambda^0}.$$

Hiernach gerechnet, würde man statt der in Tab. 3 und 4 angegebenen Werthe folgende erhalten:

Mult. I: $R_0 = 682,8$; 682,6; 658,1. $M_1 = 3,583$; 3,472; 3,729.

Mult. II: $R_0 =$ denselben Werthen wie in Tab. 4.

$M_1 = 18,777$; 18,333; 19,165; 22,410.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

VI. *Chemische Monographie der Glimmergruppe; von C. Rammelsberg.*[1]

II. Abtheilung.

$$\overset{\text{I}}{R}_4\,\overset{\text{II}}{R}_6\,\text{R}_2\,Si_7\,O_{28} = \left\{\begin{array}{l} \overset{\text{I}}{R}_4\,Si\ O_4 \\ 3\,\overset{\text{II}}{R}_2\,Si\ O_4 \\ \text{R}_2\,Si_3\,O_{12} \end{array}\right\}$$

Miask, Filipstad, N. York, Grönland, Sterzing, Servance, Persberg, Brevig.

1. Miask, Ilmengebirge. Grosse schwarze Blätter, deren Mittheilung ich Hrn. Websky verdanke.

Verliert bei 250° 1,31 Proc., beim Glühen noch 0,57, wird aber braun. Da er vorher 23,6 Proc. FeO enthält, nach

1) Fortsetzung von p. 146.

dem Glühen aber nur noch 6,98 sich fanden, sind 1,85 Proc. Sauerstoff jenen 0,57 hinzuzurechnen, sodass 2,42 Proc. Wasser vorhanden wären.

	Gefunden.	Angenommen.
Fl : R =	1 : 1,8	1 : 2
Ti : Si =	1 : 11	1 : 11
Fe : Al =	1 : 3	1 : 3
Fe (Mn) : Mg =	2,6 : 1	2,6 : 1
Na : K =	1 : 7,3	1 : 7
H : $\overset{\text{I}}{\text{R}}$ =		2 : 3

	Berechnet.	Gefunden.	
Fl	1,61	1,61	
TiO_2	3,97	4,03	
SiO_2	32,70	32,49	
AlO_3	13,07	12,34	
FeO_3	6,79	6,56	
FeO	26,50	23,60	} 25,14 Fe O
MnO		1,53	
MgO	5,66	5,29	
K_2O	8,39	9,59	
Na_2O	0,79	0,88	
H_2O	1,22	2,42	
	100,70	aq. 1,31	
		101,65	

Hiernach kommen 50 Mol. Oxysilicat auf 1 Mol. Fluosilicat.

Dieser Glimmer ist frei von sichtlichen Begleitern, sodass die Titansäure nicht als solche oder als Titaneisen beigemengt sein kann, sondern als ein Vertreter von Kieselsäure zu betrachten ist.

	(H, $\overset{\text{I}}{\text{R}}$)	: $\overset{\text{II}}{\text{R}}$	: R	: Si
Gefunden	3,1	: 3	: 1	: 3,7
Angenommen	2	: 3	: 1	: 3,5

Dass die Menge des Wassers grösser gefunden ist als sie der Rechnung nach sein sollte, beruht auf früher schon dargelegten Gründen.

Schon früher hat Fr. v. Kobell einen schwarzen Glimmer von Miask untersucht, welcher ärmer an Eisen,

reicher an Magnesium ist, und in welchem er weder Fluor noch Titan oder Natrium angibt. Er entspricht nicht ganz so gut der für den eben besprochenen angenommenen Zusammensetzung.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al =	1 : 1,9	1 : 2
Fe : Mg =	1 : 3,1	1 : 3
H : K =		1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	38,97	42,12	MgO	17,40	16,15
AlO_3	13,22	12,83	K_2O	8,92	8,58
FeO_3	10,31	10,38	H_2O	1,71	1,07
FeO	9,47	9,36		100	100,49

Da die Eisenmengen in beiden Oxyden genau gleich sind, so dürfte die Frage erlaubt sein, ob letztere wirklich direct bestimmt sind.

	(H, $\overset{I}{R}$) :	$\overset{II}{R}$:	R :	Si
Gefunden	1,6 :	2,8 :	1 :	3,7
Angenommen	2 :	3 :	1 :	3,5

2. Filipstad, Schweden. Ein schöner, schwarzer, grossblätteriger Glimmer, in feinen Blättchen grün durchscheinend. An den Rändern etwas Pistacit und Kalkspath.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al =	1 : 2.8	1 : 3
Fe : Mg =	1 : 3,7	1 : 4
Na : $\overset{I}{R}$ =	1 : 1	1 : 1
Fl : R =	1 : 3,4	1 : 3,3

	Berechnet.	Gefunden.	
Fl	1.09	1,15	
SiO_2	40.00	38,20	
AlO_3	14.64	15,45	
FeO_3	7,61	8,63	
FeO	8,22	8.69	
MnO	—	0,90	
MgO	18.27	16.58	= 18,15 MgO
CaO	—	1,50	
K_2O	8,94	9.17	= 9,44 K_2O
Na_2O	—	0.18	
H_2O	1,71	1,94	
	100,48	102,39	

	$(H, \overset{I}{R})$	: $\overset{II}{R}$	: ~~R~~	: Si
Gefunden	2,2	: 3,0	: 1,1	: 3,5
Angenommen	2	: 3	: 1	: 3,5

Dieser Glimmer ist nahe gleich dem von v. Kobell untersuchten von Miask.

3. New York. Ein von P. Schweitzer untersuchter Glimmer von nicht näher bezeichnetem Fundorte reiht sich dem von Miask an.

	Gefunden.	Angenommen.
~~Fe~~ : ~~Al~~ =	1 : 2	1 : 2
Fe : Mg =	1,5 : 1	1,5 : 1
Na : K =	1 : 5,9	1 : 6
Fl : ~~R~~ =	1 : 4,16	1 : 4
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 1,5

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	0,83	0,83	MgO	8,42	7,39
SiO_2	36,86	36,58	K_2O	8,25	8,85
AlO_3	12,00	12,64	Na_2O	1,10	0,99
FeO_3	9,36	9,55	H_2O	1,26	2,77
FeO	22,75	20,74		100,85	100,33

Hiernach 111 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat.

	$(H, \overset{I}{R})$	: $\overset{II}{R}$	: ~~R~~	: Si
Gefunden	3,0	: 2,7	: 1,05	: 3,5
Angenommen	2	: 3	: 1	: 3,5

4. Grönland. Ein schwarzer Glimmer von Karoscalik, dessen Analyse wir Fr. v. Kobell verdanken.

	Gefunden.	Angenommen.
~~Fe~~ : ~~Al~~ =	1 : 8	1 : 8
Fe : Mg =	1 : 6,7	1 : 7
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	41,30	41,00	MgO	20,60	18,86
AlO_3	17,30	16,88	K_2O	9,24	8,76
FeO_3	4,48	4,50	H_2O	1,77	4,30
FeO	5,31	5,05		100	99,35

	(H,Ŕ)	: R̋	: R	: Si
Gefunden	3,4	: 2,8	: 1	: 3,5
Angenommen	2	: 3	: 1	: 3,5

5. Sterzing, Tyrol. Der weisse Barytglimmer dieses Fundortes ist mit einem braunen Lepidolith verwachsen, der einen gleichfalls barythaltigen Eisenmagnesiaglimmer darstellt. Die kleinen sechsseitigen Blättchen sind mit grünbrauner Farbe durchsichtig.

Beim Trocknen verlor dieser Glimmer 0,18 Proc., durch Glühen noch 1,28 Proc. und hatte dann eine schöne, braune Broncefarbe und starken Glanz angenommen. Er enthält an und für sich 4,62 Proc. FeO, nach dem Glühen aber nur noch 0,92 Proc., sodass der Glühverlust 0,41 + 1,28 = 1,69 H_2O sein sollte. Von Fluor fand sich nur eine Spur.

Kieselsäure	39,82	Baryt	1,41
Thonerde	19,25	Kali	8,33
Eisenoxyd	2,62	Natron	0,66
Eisenoxydul	4,62	Wasser	1,69
Manganoxydul (Ca)	1,11	Feuchtigkeit	0,18
Magnesia	20,00		99,69

Hier ist das Atomverhältniss:

	(H,Ŕ)	: R̋	: R	: Si
Gefunden =	2	: 3,1	: 1,08	: 3,5
Angenommen =	2	: 3	: 1	: 3,5

Bei der nachfolgenden Berechnung ist:

	Gefunden.	Angenommen.
Fl : Al	= 1 : 11,8	1 : 12
Fe(Mn) : Mg(Ba)	= 1 : 6,3	1 : 6
Ba : Mg	= 1 : 55	1 : 55
Na : K	= 1 : 8	1 : 8
H : Ŕ	= 1 : 1	1 : 1

SiO_2	41,18		BaO	1,35
AlO_3	18,61		K_2O	8,20
FeO_3	2,35		Na_2O	0,70
FeO	6,07	Gef. 5,73	H_2O	1,76
MgO	19,78			100

6. Servance, Vogesen. Grünlich brauner Glimmer aus Glimmerporphyr, nach einer Analyse von Delesse.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	= 1 : 2	1 : 2
Na : K	= 1 : 3,4	1 : 3,5
Fl : R	= 1 : 3,2	1 : 3,3
H : $\overset{I}{R}$	=	1 : 1

	Berechnet.	Angenommen.	
Fl	1,12	1,06	
SiO_2	41,38	41,20	
AlO_3	13,48	12,37	
FeO_3	10,51	9,92	
MnO	—	1,50	
MgO	23,64	19,03	= 21,03 MgO
CaO	—	1,63	
K_2O	7,20	7,94	
Na_2O	1,35	1,50	
H_2O	1,77	2,90	
	100,45	99,05	

Etwa 91 Mol. Oxysilicate.

	(H, $\overset{I}{R}$)	: $\overset{II}{R}$	: R	: Si
Gefunden	2,9	: 2,9	: 1	: 3,7
Angenommen	2	: 3	: 1	: 3,5

Nach Delesse wäre kein Eisenoxydul vorhanden, was nicht wahrscheinlich ist. Die Analyse kann deshalb nicht als genau gelten.

7. Persberg, Schweden. Im Jahre 1840 analysirte Soltmann einen feinschuppigen, schwarzen Glimmer von Persberg in Wermland[1]) und erkannte ihn als einen fast magnesiafreien Eisenglimmer. Hausmann nannte ihn Lepidomelan.

Durch Hrn. G. vom Rath erhielt ich aus der ehemaligen Krantz'schen Sammlung einen Glimmer von jenem Fundorte, dessen äussere Merkmale ganz und gar die des

1) Soltmann, Pogg. Ann. **50.** p. 664. 1840.

vorerwähnten sind, der jedoch ärmer an Eisen ist, mehr als 12 Proc. Magnesia und ausserdem Titansäure und Fluor enthält. Stammen beide Glimmer wirklich von gleichem Fundorte, so kommen an demselben zwei verschiedene Abänderungen vor.

Die von mir untersuchte Probe verlor beim Trocknen 0,55 Proc., beim Glühen noch 1,1 Proc. und hatte nun ein hellbroncefarbiges Ansehen. Da sie nur noch 0,34 Proc. FeO enthielt, dessen Gehalt im ungeglühten Glimmer 14,43 Proc. betrug, so musste der Glühverlust = 1,1 + 1,57 = 2,67 Proc. sein.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si =	1 : 22,3	1 : 22
Fe : Al =	1 : 3,8	1 : 4
Fe : Mg =	1 : 1,5	1 : 1,5
Na : K =	1 : 19,4	1 : 19
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.	
Fl	—	0,44	MgO	13,32	12,26	12,43
TiO_2	2,22	2,12	K_2O	8,26	8,23	
SiO_2	37,16	37,77	Na_2O	0,29	0,27	
AlO_3	15,19	15,96	H_2O	1,67	2,67	
FeO_3	5,92	6,63		100	100,78	
FeO	15,97	14,43				

	$(H,\overset{I}{R})$	: $\overset{II}{R}$	: R	: Si
Gefunden	2,5	: 2,7	: 1,04	: 3,5
Angenommen	2	: 3	: 1	: 3,5

Soltmann's Analyse wird später bei den Eisenglimmern in Betracht zu ziehen sein.

8. Brevig, Norwegen. Bei Gelegenheit einer Beschreibung mehrerer im norwegischen Zirkonsyenit vorkommenden Mineralien führte Scheerer auch zwei verschiedene schwarze Glimmer an[1]), von welchen der eine, den Astrophyllit begleitende, ein Kalieisenglimmer mit $3^1/_4$ Proc.

1) Scheerer, Pogg. Ann. **122.** p. 119. 1864. Zeitschr. d. Geol. Ges. **14.** p. 99. 1864.

Magnesia, der andere aber ein **Natronglimmer** ist, welcher nur 5 Proc. jener Erde enthält. Dieser letztere, dessen Analyse von **Defrance** herrührt, reiht sich den Gliedern der Abtheilung an, wie die folgende Berechnung zeigt.

	Gefunden.	Angenommen.
$\overline{Fe} : \overline{Al}$ =	1 : 1,75	1 : 2
Fe : Mg =	2,6 : 1	2,5 : 1
Na : K =	33,4 : 1	
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.	
TiO_2	—	0,99	= 36,67 SiO_2
SiO_2	37,47	35,93	
$\overline{Al}O_3$	12,20	10,98	
$\overline{Fe}O_3$	9,52	9,82	
FeO	27,61	26,93	= 27,65 FeO
MnO	—	0,72	
MgO	6,06	5,13	= 5,87 MgO
CaO	—	1,04	
K_2O	—	0,24	= 5,34 Na_2O
Na_2O	5,53	5,18	
H_2O	1,61	4,30	
	100	101,26	

	$(H, \overset{I}{R})$:	$\overset{II}{R}$:	$\overline{R}$:	Si
Gefunden =	4 :	3,1 :	1 :	3,6
Angenommen =	2 :	3 :	1 :	3,5

Auch ich habe einen Glimmer von Brevig untersucht[1]), welcher zwar auch, gleich dem von **Scheerer** selbst analysirten, ein Eisenglimmer ist, sich indessen doch von diesem wesentlich unterscheidet.

III. Abtheilung.

$$\overset{I}{R}_2 \overset{II}{R}_2 \overline{R} Si_3 O_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{I}{R}_4 Si\, O_4 \\ 2\, \overset{II}{R}_2 Si\, O_4 \\ \overline{R}_2 Si_3 O_{12} \end{array} \right\}$$

Freiberg. Renchthal. Lierwiese. Hitterö. Portland. Radauthal.

1) S. p. 315.

1. Freiberg. Scheerer verdanken wir die Kenntniss der schwarzen Glimmer, welche in dem grauen Gneis der Freiberger Gegend vorkommen.

a) Zwischen Freiberg und Kleinwaltersdorf; braun durchscheinend.

b) Zwischen Freiberg und dem Richtschachte von Reiche Zeche; dem vorigen gleich. Von Rube analysirt.

c) Grube Bescheert Glück bei Brand; verwittert mit rother Farbe. Alle sind fluorfrei.

	a.	b.	c.
Titansäure . . .	3,06	3,16	2,47
Kieselsäure . . .	37,50	36,89	37,18
Thonerde	17,87	15,00	17,53
Eisenoxyd . . .	12,93	16,29	6,20
Eisenoxydul . . .	10,15	6,95	15,66
Magnesia	10,15	9,65	9,05
Kalk	0,45	1,75	0,79
Kali	0,83	6,06	5,14
Natron	3,00	—	2,93
Wasser	3,48	4,40	3,62
	99,42	100,15	100,57

In Hinsicht der Alkalien und der Oxyde des Eisens sind diese Glimmer also doch sehr verschieden.

Gefunden.

$$(H,\overset{I}{R}) : \overset{II}{R} : \text{R} : (Si, Ti)$$

a)	2 : 1,6 : 1 : 2,6	=	2,2 : 1,8 : 1,15 : 3
b)	2 : 1,5 : 1 : 2,6	=	2,2 : 1,7 : 1,1 : 3
c)	2,9 : 2,2 : 1 : 3,1	=	2,8 : 2,2 : 1,0 : 3

Man sieht, dass die Analysen dem dieser Abtheilung zukommenden einfachen Verhältnisse 2 : 2 : 1 : 3 (abgesehen von der allzugrossen Wassermenge) im ganzen wohl entsprechen, dass aber a) und b) noch besser mit dem von $1^2/_3 : 1^1/_2 : 1 : 2^2/_3$ harmoniren, d. h. auf:

$$\overset{I}{R}_{10}\overset{II}{R}_9 \text{R}_6 Si_{16} O_{64} = \left\{ \begin{array}{l} 5\overset{I}{R}_2 Si O_4 \\ 9\overset{II}{R}_2 Si O_4 \\ 6\text{R}_2 Si_3 O_{12} \end{array} \right\}$$

führen. Wenn ich auch nicht glaube, dass dieser complicirtere Ausdruck die wahre Mischung beider Glimmer wiedergibt, so habe ich doch die Berechnung auch nach ihm (B) beigefügt.

Varietät a.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si =	1 : 16,4	1 : 16
Fe : Al =	1 : 2,1	1 : 2
Fe : Mg =	1 : 1,87	1 : 2
Na : K =	5,3 : 1	5 : 1
H : $\overset{I}{R}$ =		3 : 1

	Berechnet.	B.		Berechnet.	B.
TiO_2	3,20	3,45	MgO	12,31	10,35
SiO_2	38,30	38,83	K_2O	0,90	0,84
AlO_3	15,78	17,70	Na_2O	2,99	2,80
FeO_3	12,31	13,80	H_2O	3,12	2,91
FeO	11,09	9,32		100	100

Varietät b.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si =	1 : 15,4	1 : 15
Fe : Al =	1 : 1,4	1 : 1,5
Fe : Mg =	1 : 2,9	1 : 3
H : $\overset{I}{R}$ =	—	3 : 1 (2 : 1)

	Berechnet.	B.		Berechnet.	B.
TiO_2	3,15	3,30	FeO	8,21	6,86
SiO_2	37,88	37,33	MgO	13,68	11,43
AlO_3	14,04	15,64	K_2O	5,36	6,43
FeO_3	14,60	16,27	H_2O	3,08	2,54
				100	100

H : R = 3 : 1 2 : 1

Varietät c.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si =	1 : 20,7	1 : 21
Fe : Al =	1 : 4,4	1 : 4,5
Fe : Mg =	1 : 1,1	1 : 1
Na : K =	1 : 1,16	1 : 1
H : $\overset{I}{R}$ =		1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
TiO_2	2,38	2,47	MgO	8,78	9,61
SiO_2	37,68	37,18	K_2O	5,16	5,14
AlO_3	18,43	17,53	Na_2O	3,40	2,93
FeO_3	6,38	6,20	H_2O	1,98	3,62
FeO	15,81	15,66		100	100,34

2. Renchthal, Schwarzwald. Ein braunschwarzer Glimmer von Milben bei Petersthal im Renchthal, den Hr. Prof. Sandberger mitzutheilen die Güte hatte, ist in meinem Laboratorium von Dr. Killing untersucht worden. Er enthält nur eine Spur Fluor (0,08 Proc.).

	$(H, \overset{I}{R})$	:	$\overset{II}{R}$	:	R	:	Si
Gefunden	2,3	:	2,0	:	1	:	2,8
Angenommen	2	:	2	:	1	:	3

Ferner:

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al	= 1 : 4,5	1 : 4,5
Fe : Mg	= 1 : 1,1	1 : 1
Na : K	= 1 : 3,1	1 : 3
H : $\overset{I}{R}$	= 1 : 1	3 : 4

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	38,97	37,67	MgO	8,65	9,72
AlO_3	18,20	18,79	K_2O	8,69	8,93
FeO_3	6,30	6,48	Na_2O	1,92	1,92
FeO	15,60	15,28	H_2O	1,67	2,33
				100	101,12

Die Zusammensetzung ist sehr nahe die des vorhergehenden Glimmers aus sächsischem Gneis. Bereits im Jahre 1863 hat Nessler einen ähnlichen Glimmer aus dortiger Gegend untersucht[1]), welcher jedoch ein kaliarmer, fast reiner Eisenglimmer war, da er enthält:

TiO_2	0,60	FeO_3	13,73	K_2O	4,22
SiO_2	38,34	FeO	7,40	Na_2O	0,56
AlO_3	33,80	MgO	0,36	H_2O	1,36
					100,37

1) Nessler, Jahresbericht von Kopp und Will, p. 820. 1863.

Hiernach wäre es schon ohne H basischer als ein Singulosilicat (etwa $2\overset{|}{R}_4 SiO_4 + \overset{|}{R}_6 SiO_5$).

3. Lierwiese. Ein Glimmer aus dem vulkanischen Tuff der Eifel, von v. d. Mark untersucht, die Eisenoxydulbestimmung von A. Mitscherlich.

	Gefunden.	Angenommen.
$\overline{Fe} : \overline{Al}$	= 1 : 2	1 : 2
Fe : Mg	= 1 : 6,1	1 : 6
Na : K	= 1 : 1,8	1 : 2
H : $\overset{|}{R}$	=	1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	—	0,44	MgO	15,53	15,41
SiO_2	40,77	41,83	K_2O	7,10	6,32
$\overline{Al}O_3$	15,49	15,30	Na_2O	2,34	2,27
$\overline{Fe}O_3$	12,08	12,04	H_2O	2,04	1,22
FeO	4,66	4,53		100	99,46

	(H, $\overset{|}{R}$)	: $\overset{||}{R}$	: $\overline{R}$	: Si
Gefunden	1,5	: 2	: 1	: 3,1
Angenommen	2	: 2	: 1	: 3

4. Hitterö. Ein grossblättriger schwarzer Glimmer, an den Rändern der Tafeln mit Orthoklas und Quarz verwachsen. Dünne Blättchen sind mit grünbrauner Farbe durchscheinend.

Verlust beim Trocknen 0,12, beim Glühen noch 1,84 Proc. Der geglühte enthielt 3,86 Proc., der ursprüngliche 13,67 FeO, mithin musste der Glühverlust 1,84 + 1,09 = 2,93 Proc. sein.

	Gefunden.	Angenommen.
$\overline{Fe} : \overline{Al}$	= 1 : 2,5	1 : 2,5
Fe : Mg	= 1 : 1,47	1 : 1,5
Na : K	= 1 : 45	
Fl : $\overline{R}$	= 1 : 3	1 : 3
H : $\overset{||}{R}$	=	1 : 1

	Berechnet.	Gefunden.	
Fl	1,36	1,29	
SiO_2	39,41	39,01	
AlO_3	15,79	15,44	
FeO_3	9,84	9,37	
FeO	12,61	13,67	
MgO	10,51	11,30	
K_2O	8,24	8,62	= 8,83 K_2O
Na_2O	—	0,14	
H_2O	2,36	2,93	
	101,12	aq. 0,12	
		101,89	

	$(H, \overset{I}{R})$	: $\overset{II}{R}$	: R	: Si
Gefunden	2,4	: 2,2	: 1	: 3,1
Angenommen	2	: 2	: 1	: 3

5. Portland (Middletown), Connecticut. Ein von Hawes analysirter, braun durchscheinender Glimmer aus Granit.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si	= 1 : 33	
Fe : Mg	= 2,46 : 1	2,5 : 1
Na : Li : K	= 1 : 3,7 : 12	1 : 4 : 12
Fl : R	= 1 : 4,9	
H : $\overset{I}{R}$	=	1 : 3

	Berechnet.	Gefunden.	
Fl	—	0,76	
TiO_2	—	1,46	= 37,07 SiO_2
SiO_2	38,28	38,61	
AlO_3	21,83	20,03	= 20,11 AlO_3
FeO_3	—	0,13	
FeO	21,88	21,85	= 23,04 FeO
MnO	—	1,19	
MgO	4,86	5,23	
K_2O	10,45	9,69	
Na_2O	0,58	0,52	
Li_2O	1,12	0,93	
H_2O	1,00	1,87	
	100	99,22	

Die Analyse erregt einige Bedenken wegen des geringen Gehaltes an $\bar{Fe}O_3$ und des Li_2O.

$$
\begin{array}{rl}
 & (H, \overset{I}{R}) : \overset{II}{R} : \bar{R} : Si \\
\text{Gefunden} & 2{,}5 : 2{,}3 : 1 : 3{,}1 \\
\text{Angenommen} & 2 \;\; : 2 \;\; : 1 : 3
\end{array}
$$

6. Radauthal. Der von Streng analysirte dunkelbraune Glimmer aus dem Gabbro.

	Gefunden.	Angenommen.
$\bar{Fe} : \bar{Al}$	= 1 : 3,2	1 : 3
$Fe : Mg$	= 1 : 1,5	1 : 1,5
$Fl : \bar{R}$	= 1 : 12	—
$H : \overset{I}{R}$	=	2 : 1

Die Analyse ergab ergab 1,4 Proc. Verlust. Schon ohne Wasser stellt sie Singulosilicate dar, es ist daher zu vermuthen, dass der Verlust die SiO_2 trifft. Unter dieser Annahme reiht sich der Glimmer des Radauthales den übrigen dieser Abtheilung an.

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	—	0,36	FeO	12,91	13,72
SiO_2	40,39	36,17 (37,58)	MgO	10,77	11,68
$\bar{Al}O_3$	17,24	18,09	K_2O	7,03	7,59
$\bar{Fe}O_3$	8,97	8,70	H_2O	2,69	2,28
				100	98,59

$$
\begin{array}{rl}
 & (H, \overset{I}{R}) : \overset{II}{R} : \bar{R} : Si \\
\text{Gefunden} & 1{,}8 : 2{,}08 : 1 : 2{,}74 \\
\text{Angenommen} & 2 \;\; : 2 \;\; : 1 : 3
\end{array}
$$

Sicherlich ist dieser Glimmer identisch mit dem von Hitterö.

IV. Abtheilung.

$$
\overset{I}{R}_2 \overset{II}{R}_3 \bar{R}_2 Si_5 O_{20} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{I}{R}_4 Si\ O_4 \\ 3\,\overset{II}{R}_2 Si\ O_4 \\ 2\,\bar{R}_2 Si_3 O_{12} \end{array} \right\}
$$

Brevig. Wiborg.

1. Brevig, Norwegen. Hr. Websky theilte mir einen schwarzen, grün durchscheinenden Glimmer von diesem Fundort mit, welcher wesentlich verschieden ist von

den beiden, welche Defrance und Scheerer untersucht haben. Beim Auslesen des Materials liessen sich harte, braunschwarze Körner von Titaneisen wahrnehmen, in welchen die Analyse 9,74 TiO_2 gegen 90,26 $~~Fe~~O_3$ nachwies.

Das graugrüne Pulver des Glimmers verlor beim Trocknen 0,97 Proc., beim Glühen noch 2,49 Proc., und da, einem besondern Versuche gemäss, 7,72 FeO hierbei oxydirt waren, kommen 3,35 für Wasser in Rechnung.

Wird aber dieser Wassergehalt als wesentlich betrachtet, so erscheint auch dieser Glimmer weit basischer als ein Singulosilicat, etwa als $3\overset{I}{R}_4SiO_4 + \overset{I}{R}_6SiO_5$. Es ist wohl die Annahme zulässig, Glimmer dieser Art haben infolge einer Veränderung Wasser aufgenommen, welches ihnen ursprünglich nur zum Theil angehört.

Für die Berechnung ist:

		Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si	=	1 : 18,3	1 : 18
~~Fe~~ : ~~Al~~	=	1 : 1,1	1 : 1
Fe : Mn : Ṁg	=	10,7 : 1,9 : 1	12 : 2 : 1
Na : K	=	1 : 17	1 : 17
Fl : ~~R~~	=	1 : 3,2	1 : 3,2
H : $\overset{I}{R}$	=		1 : 3

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	1,38	1,29	MnO	3,31	3,64
TiO_2	2,33	2,42	MgO	0,93	1,08
SiO_2	33,26	32,97	K_2O	7,77	8,03
AlO_3	11,97	11,88	Na_2O	0,30	0,30
$~~Fe~~O_3$	18,67	16,48	H_2O	0,53	3,35
FeO	20,16	20,72		100,61	102,16

Hiernach 63 Mol. Oxysilicat.

	$\overset{I}{R}$	: $\overset{II}{R}$	: ~~R~~	: Si
Gefunden	0,8	: 1,67	: 1	: 2,65
(H, $\overset{I}{R}$)	2,5			
Angenommen	1	: 1,5	: 1	: 2,5

2. Wiborg, Finnland. Ein braunschwarzer Glimmer, von Struve untersucht.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si =	1 : 22,7	1 : 23
Fe : Al =	1 : 1,37	1 : 1,33
Fe : Mg =	7,6 : 1	7 : 1
Na : K =	1 : 11,6	1 : 11
H : R =		1 : 3

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
TiO_2	2,01	1,93	MgO	1,81	1,77
SiO_2	34,73	32,73	K_2O	6,90	8,73
AlO_3	14,15	13,49	Na_2O	0,47	0,48
FeO_3	16,56	15,41	H_2O	0,54	0,75
FeO	22,83	24,23		100	99,52

	(H, R) : R : R : Si
Gefunden	1,2 : 1,7 : 1 : 2,5
Angenommen	1 : 1,5 : 1 : 2,5

V. Abtheilung.

$$R_6 R_3 R_4 Si_9 O_{36} = \begin{Bmatrix} 3 R_4 Si O_4 \\ 3 R_2 Si O_4 \\ 4 R_2 Si_3 O_{12} \end{Bmatrix}$$

St. Dennis, Persberg.

1. St. Dennis, Cornwall. Ein braunschwarzer, grossblättriger Glimmer aus Granit, welcher von mir schon vor längerer Zeit untersucht wurde, und bei welchem nur die Wasserbestimmung corrigirt worden ist.

	Gefunden.	Angenommen.
Fe : Al =	1 : 5	1 : 5
Fe : Mg =	29 : 1	29 : 1
Na : K =	1 : 14	1 : 14
Fl : R =	1 : 1,32	1 : 1,33
H : R =		1 : 2

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
Fl	4,07	4,23	MgO	0,28	0,28
SiO_2	38,57	37,93	K_2O	9,40	8,64
AlO_3	24,43	24,89	Na_2O	0,44	0,40
FeO_3	7,62	7,85	H_2O	1,93	1,54
FeO	14,91	14,87		101,65	101,63

	$(H, \overset{I}{R})$	: $\overset{II}{R}$	: $\bar{R}$	: Si
Gefunden	1,27	: 0,71	: 1	: 2,17
Angenommen	1,5	: 0,75	: 1	: 2,25

23 Mol. Oxysilicat gegen 1 Mol. Fluosilicat.

2. Persberg, Wermland. Dies ist der von Soltmann untersuchte Lepidomelan.

	Gefunden.	Angenommen.
$\bar{Fe} : \bar{Al}$ =	1 : 1,5	1 : 1,5
Fe : Mg =	11,5 : 1	11 : 1
H : K =		1 : 2

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	36,80	37,40	MgO	0,51	0,60
$\bar{Al}O_3$	12,59	11,60	K_2O	9,61	9,20
$\bar{Fe}O_3$	29,45	27,66	H_2O	0,92	0,60
FeO	10,12	12,43		100	99,49

	$(H, \overset{I}{R})$	: $\overset{II}{R}$	: $\bar{R}$	: Si
Gefunden	0,9	: 0,66	: 1	: 2,18
Angenommen	1,5	: 0,75	: 1	: 2,25

Sind die Oxyde des Eisens wirklich bestimmt? Nach der Analyse wäre $\bar{Fe}$: Fe genau = 1 : 1. Vielleicht wurden sie blos berechnet.

Vergleicht man diesen Glimmer mit dem von mir untersuchten von angeblich gleichem Fundort, so muss man überzeugt sein, dass beide wesentlich verschieden sind. Der letztere enthält 15,8 Eisen und 7,3 Magnesium, während Soltmann einen reinen Eisenglimmer mit 29 Eisen und nur 0,3 Magnesium vor sich hatte. Ebenso sehr weichen die Atomverhältnisse beider ab.

	$(H, \overset{I}{R})$	: $\overset{II}{R}$	: $\bar{R}$	: Si
Rg.	2,5	: 2,7	: 1	: 3,5
S.	0,9	: 0,6	: 1	: 2,2

Ihrer Gesammtmischung nach sind beide allerdings Singulosilicate, aber das Verhältniss der $\overset{I}{R}_4 SiO_4$, $\overset{II}{R}_2 SiO_4$ und $\bar{R}_2 Si_3 O_{12}$ ist bei dem ersten = 1 : 3 : 1, bei dem zweiten = 3 : 3 : 4.

IV. Glimmer von verschiedener Zusammensetzung.

Es bleiben noch einige vereinzelte Glimmer übrig, deren Analysen mit mehr oder weniger Sicherheit einen Schluss auf ihre Natur gestatten. Sie gehören sämmtlich zu den magnesiaarmen, daher ihre Berechnung von der richtigen Bestimmung des Eisenoxyds und Oxyduls abhängig ist.

1. Glimmer aus Tonalit. Das Gestein des Adamello ist ein granitartiges, aus Quarz und einem weissen Kalknatronfeldspath mit 2 Na : 3 Ca bestehend, und von G. v. Rath als Tonalit bezeichnet und enthält dunkelbraunen Glimmer, welchen Baltzer untersucht hat.

	Gefunden.	Angenommen.
$\mathbf{Fe} : \mathbf{Al}$	= 1 : 1,35	1 : 1,33
Fe : Mg : Ca	= 8 : 5,7 : 1	8 : 6 : 1

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	37,44	36,43	MgO	6,96	6,87
$\mathbf{Al}O_3$	14,56	14,40	CaO	1,62	1,66
$\mathbf{Fe}O_3$	17,02	16,71	K_2O	5,72	5,56
FeO	16,68	17,40	Na_2O	—	0,03
				100	99,06

Die Analyse erwähnt eines Wassergehalts nicht. Sie führt auch ohne einen solchen auf Singulosilicate.

	$\overset{I}{R}$	$\overset{II}{R}$	$\mathbf{R}$	Si
Gefunden	0,5	1,8	1	2,47
Angenommen	0,5	1,75	1	2,5

Formel:

$$K_2 \overset{II}{R}_7 \mathbf{R}_4 Si_{10} O_{40} \left\{ \begin{array}{l} \overset{I}{R}_4 Si\ O_4 \\ 7 \overset{II}{R}_2 Si\ O_4 \\ 4 \mathbf{R}_2 Si_3 O_{12} \end{array} \right\}$$

2. Aberdeen, Schottland. Ein von Haughton analysirter Glimmer.

	Gefunden.	Angenommen.
$\mathbf{Fe} : \mathbf{Al}$	= 1 : 1,4	1 : 1,5
Fe : Mg(Ca)	= 1 : 1,7	1 : 1,5
Na : K	= 1 : 6,2	1 : 6
H : $\overset{I}{R}$	=	1 : 3

	Berechnet.	Gefunden.	
SiO_2	38,66	36,50	
AlO_3	17,63	16,50	
FeO_3	18,33	18,49	
FeO	8,25	6,76	} = 8,56 FeO
MnO	—	1,80	
MgO	6,88	7,44	} = 8,13 MgO
CaO	—	1,11	
K_2O	8,65	8,77	
Na_2O	0,95	0,92	
H_2O	0,65	1,60	
	100	99,89	

	(H, $\overset{I}{R}$	$\overset{II}{R}$	R	Si
Gefunden	1,5	1,2	1	2,2
Angenommen	1	1	1	2,25

Formel:

$$\overset{I}{R}_4 \overset{II}{R}_4 R_4 Si_9 O_{36} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{I}{R}_4 Si\ O_4 \\ 2 \overset{II}{R}_2 Si\ O_4 \\ 2 R_2 Si_3 O_{12} \end{array} \right\}$$

3. Ballyellin, Irland. Gleichfalls von Haughton untersucht.

	Gefunden.	Aufgenommen.
Fe : Al	= 1 : 1,1	1 : 1
Fe : Mg	= 1 : 1,1	1 : 1
Na : K	= 1 : 20	—
H : $\overset{I}{R}$	=	1 : 2

	Berechnet.	Gefunden.		Berechnet.	Gefunden.
SiO_2	38,23	35,55	MgO	3,19	3,68
AlO_3	16,36	17,08	K_2O	10,00	9,45
FeO_3	25,52	23,70	Na_2O	—	0,35
FeO	5,74	5,50	H_2O	0,96	4,30
				100	99,61

	(H, $\overset{I}{R}$)	$\overset{II}{R}$	R	Si
Gefunden	2,2	0,5	1	1,9
Angenommen	1	0,5	1	2

Formel:

$$\overset{I}{R}_2\,\overset{II}{R}\,Ɍ_2\,Si_4\,O_{16}\left\{\begin{array}{l}\overset{I}{R}_4\,Si\;O_4\\ \overset{II}{R}_2\,Si\;O_4\\ 2\,Ɍ_2\,Si_3\,O_{12}\end{array}\right\}$$

Der ungewöhnlich hohe Wassergehalt würde, wenn er richtig wäre, diesen Glimmer als eine Verbindung $\overset{I}{R}_4\,Si\,O_4$ + $\overset{I}{R}_6\,Si\,O_5$ erscheinen lassen.

4. Brevig, Norwegen. Dies ist der von Scheerer untersuchte schwarze Glimmer, welcher den Astrophyllit begleitet und reich an Titansäure ist.

	Gefunden.	Angenommen.
Ti : Si =	1 : 10	1 : 10
Fe : Al =	1 : 1,28	1 : 1,25
Fe : Mg =	3,5 : 1	3,5 : 1
Na : K =	1 : 9,8	1 : 10
H : $\overset{I}{R}$ =		3 : 2

	Berechnet.	Gefunden.	
TiO_2	4,53	4,68	
SiO_2	33,42	35,26	
AlO_3	10,65	10,24	
FeO_3	13,59	12,47	
FeO	21,06	18,84	= 21,00 FeO
MnO	—	2,14	
MgO	3,39	3,24	= 3,28 MgO
CaO	—	0,05	
K_2O	9,66	9,20	
Na_2O	0,64	0,60	
H_2O	3,06	2,71	
	100	99,43	

	(H, $\overset{I}{R}$) :	$\overset{II}{R}$:	Ɍ :	(Si, Ti)
Gefunden	3 :	2,1 :	1 :	3,63
Angenommen	3 :	2 :	1 :	3,25

Formel:

$$\overset{I}{R}_{12}\,\overset{II}{R}_8\,Ɍ_4\,Si_{13}\,O_{52} = \left\{\begin{array}{l}3\,\overset{I}{R}_4\,Si\;O_4\\ 4\,\overset{II}{R}_2\,Si\;O_4\\ 2\,Ɍ_2\,Si_3\,O_{12}\end{array}\right\}$$

Das einfachere Mol. Verhältniss von 2 : 2 : 1 aus der Formel: $\overset{I}{R}_8 \overset{II}{R}_4 \not{R}_2 Si_7 O_{28}$

= 4 : 2 : 1 : 3,5 abgeleitet, entspricht ebenfalls der Analyse, erfordert jedoch 10,5 K_2O und 4,44 H_2O.

Es ist eigenthümlich, aber wohl nur zufällig, dass die drei Glimmer von Brevig im Eisengehalt nahe übereinstimmen.

	Fe	Mg
Defrance	27,8	3,08
Scheerer	25,0	1,94
Rg.	27,6	0,65

Ihre Verschiedenheit ist im übrigen so gross, dass sie auch dann bestehen bleibt, wenn man sich erlauben wollte, an den relativen Mengen der Eisenoxyde kleine Aenderungen vorzunehmen. Denn es ist:

	$\not{R} : \overset{I}{R}$	$\not{R} : Si$
Defrance	1 : 3,1	1 : 3,6
Scheerer	1 : 2,1	1 : 3,6
Rg.	1 : 1,67	1 : 2,65

V. Lithioneisenglimmer.

Die eisenhaltigen Lithionglimmer sind gleich den eisenfreien Verbindungen von Singulo- und Bisilicaten. Am bekanntesten ist der von Zinnwald, in welchem nach meinen Versuchen:

$$\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : \not{R} : Si$$

$$2,8 : 1 : 1,34 : 4,66 = 2 : 0,74 : 1 : 3,5$$

und $$1 : 1,26 : 4,7 = 0,8 : 1 : 3,7$$

nach Berwerth $2,5 : 1 : 1,23 : 4,2 = 2 : 0,8 : 1 : 3,4$ ist.

Hieraus lassen sich die Proportionen:

$$2,5 : 1 : 1,25 : 4,5 = 2 : 0,8 : 1 : 3,6$$

oder $$3 : 1 : 1,5 : 5,25 = 2 : 0,66 : 1 : 3,5$$

ableiten. Die erste führt zu:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{I}{R}_{10} \overset{II}{R}_4 \not{R}_5 Si_{18} O_{60} \\ \overset{I}{R}_{12} \overset{II}{R}_4 \not{R}_6 Si_{21} O_{64} \end{array}\right\} = \overset{I}{R}_8 Si_3 O_{10} = \left\{\begin{array}{c} 2\overset{I}{R}_2 SiO_3 \\ \overset{I}{R}_4 SiO_4 \end{array}\right\}$$

die zweite zu (untere Zeile).

Berechnung unter der Annahme: $\not{Fe} : \not{Al} = 1 : 24$, $Mn : Fe = 1 : 7$, $K(Na) : Li = 1 : 1$, $Na : K = 1 : 13$ und $\not{R} : Fl = 1 : 2$.

	Erste Formel.	Zweite Formel.	Gefunden. Rg. a.	Gefunden. Rg. b.	Berwerth.
Fl	8,23	8,53	7,62	8,61	7,94
SiO_2	46,82	47,12	46,44	47,28	45,87
AlO_3	21,34	22,10	21,84	20,83	22,50
FeO_3	1,39	1,44	1,41	1,38	0,66
FeO	10,92	9,42	10,06	10,19	11,61
MnO	1,54	1,33	1,89	1,90	1,75
K_2O	9,46	9,79	10,58	—	10,46
Na_2O	0,48	0,50	0,54	—	0,42
Li_2O	3,25	3,36	3,36	—	3,28
	103,43	103,59			

Im speciellen ist die erste Formel:

$$2\left\{\begin{matrix} 5\overset{\text{I}}{R}_2\,Si\,O_3 \\ 4\overset{\text{II}}{R}\,Si\,O_3 \\ 5\mathbf{R}\,Si_3\,O_9 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 5\overset{\text{I}}{R}_4\,Si\,O_4 \\ 4\overset{\text{II}}{R}_2\,Si\,O_4 \\ 5\mathbf{R}_2\,Si_3\,O_{12} \end{matrix}\right\}$$

die zweite Formel:

$$2\left\{\begin{matrix} 3\overset{\text{I}}{R}_2\,Si\,O_3 \\ 2\overset{\text{II}}{R}\,Si\,O_3 \\ 3\mathbf{R}\,Si_3\,O_9 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 3\overset{\text{I}}{R}_4\,Si\,O_4 \\ 2\overset{\text{II}}{R}_2\,Si\,O_4 \\ 3\mathbf{R}_2\,Si_3\,O_{12} \end{matrix}\right\}$$

Dem Fluorgehalt gemäss ist das Ganze:

entweder $$\left\{\begin{matrix} 11-12\,(\overset{\text{I}}{R}_{10}\,\overset{\text{II}}{R}_4\,\mathbf{R}_5\,Si_{18}\,O_{60}) \\ (\overset{\text{I}}{R}_{10}\,\overset{\text{II}}{R}_4\,\mathbf{R}_5\,Si_{18}\,Fl_{120}) \end{matrix}\right\}$$

oder $$\left\{\begin{matrix} 10\,(\overset{\text{I}}{R}_{12}\,\overset{\text{II}}{R}_4\,\mathbf{R}_8\,Si_{21}\,O_{64}) \\ (\overset{\text{I}}{R}_{12}\,\overset{\text{II}}{R}_4\,\mathbf{R}_8\,Si_{21}\,Fl_{128}) \end{matrix}\right\}$$

Ich würde die zweite Formel vorziehen.

Die übrigen Lithionglimmer dieser Abtheilung, nämlich: St. Just, Cornwall, braun, Trewavas Head, Cornwall, weiss, schuppig, und Rockport, Massachusets (Kryophyllit), dunkelgrün, jene von Haughton, dieser von Cooke untersucht, weichen unter sich und vom Zinnwalder Glimmer ab. Der erste soll 15 Proc. FeO_3, 2,3 Proc. FeO und 1,7 Proc. Li_2O enthalten; es würde 1 Mol. Bisilicat und 2 Mol. Singulosilicat entsprechen.

Der zweite, mit nahe 51 Proc. SiO_2 und 5,2 Proc. FeO_3, soll kein FeO enthalten.

Der sogenannte Kryophyllit wäre mit 53,5 Proc. SiO_2 der säurereichste Glimmer und kommt einem Bisilicat sehr nahe, was aber der Bestätigung bedarf.

VI. Barytglimmer.

In dem hellbraunen Magnesiaglimmer von Edwards sind nach Berwerth 2,5 Proc. Baryt enthalten, während der ihm sehr ähnliche von Gouverneur frei von Baryt ist. Oellacher zeigte, dass ein weisser, grobschuppiger Glimmer von Sterzing in Tyrol noch reicher an dieser Erde ist, dagegen weit weniger Magnesia enthält. Dieser Glimmer wird von einem braunen, barytärmeren, aber magnesiareichem Glimmer (II. Abth. Nr. 5) begleitet. a ist Oellacher's Analyse; b eine theilweise frühere und c eine vollständige spätere von mir.

	a.	b.	c.
Fluor	—	—	Spur
Kieselsäure	42,59	43,07	42,90
Thonerde	30,18	32,79	32,40
Eisenoxyd	0,91	—	—
Eisenoxydul (Mn)	1,86	2,16	2,40
Magnesia	4,85	2,90	3,10
Baryt (Sr)	4,74	5,91	5,82
Kalk	1,03	0,23	0,80
Kali	7,61	—	7,47
Natron	1,42	—	1,73
Wasser	4,43	—	3,02
	99,62	—	99,64

Atomverhältnisse.	$(H, \overset{I}{R})$	$\overset{II}{R}$	Al	Si
a.	2,3	0,65	1	2,37
b.	—	0,45	1	2,25
c.	1,8	0,5	1	2,26
Nimmt man an:	2	0,5	1	2,25

so erhält man: $\overset{I}{R}_8 \overset{II}{R}_2 Al_4 Si_9 O_{36}$,

d. h. eine Mischung von Singulosilicaten

$$\left\{\begin{array}{l} 2\overset{I}{R}_4 Si O_4 \\ \overset{II}{R}_2 Si O_4 \\ 2 Al_2 Si_3 O_{12} \end{array}\right\}.$$

Legt man Analyse c zum Grunde, so ist:

Fe : Ba : Mg(Ca) = 1 : 1 : 3; Na : K = 1 : 3 und
H : R = 2 : 1, und so erhält man:

SiO_2	43,13	BaO	4,98
AlO_3	32,78	K_2O	7,50
FeO	2,30	Na_2O	1,65
MgO	3,83 (gef. 3,67)	H_2O	3,83
			100

Ein anderer Barytglimmer aus dem Habachthal des Pinzgau ergibt nach einer Analyse von Bergmann:

	$(H,\overset{I}{R})$	:	$\overset{II}{R}$	:	Al	:	Si
	2,5	:	0,7	:	1	:	3,24
Nimmt man an:	2,5	:	0,75	:	1	:	3,25

so erhält man:

$$\overset{I}{R}_{18}\overset{II}{R}_6 Al_8 Si_{26} O_{91} = \overset{I}{R}_6 Si_2 O_7 = \overset{I}{R}_2 SiO_3 + \overset{I}{R}_4 SiO_4.$$

Eine Wiederholung der Versuche wird zeigen, ob dieser Glimmer wirklich aus Singulo- und Bisilicaten besteht.

Im Vorstehenden haben wir das durch Versuche gegebene thatsächliche Material der Berechnung unterzogen und die sogenannte empirische Zusammensetzung der Glimmer festzustellen gesucht. Wir sind uns dabei wohl bewusst, dass keine einzige Analyse dem Gesetze der bestimmten Proportionen genau entspricht, allein wir sind auch überzeugt, dass die Mehrzahl das Atomverhältniss der Elemente nicht zweifelhaft lässt. Als vollkommen sicher ergab sich die Uebereinstimmung mehrerer oder vieler Glieder; blieben einige wenige für sich, so werden wir ihre Zusammensetzung dann erst als sicher ansehen, wenn wir später andere derselben Art finden. Niemals aber haben wir eine einzelne Analyse sozusagen für unfehlbar gehalten, auf sie allein eine Berechnung gegründet, und die Uebereinstimmung der gefundenen und der be-

rechneten procentischen Zahlen als den hauptsächlichsten Beweis für die Richtigkeit der Formel betrachtet.

Auch wenn gewisse Glimmer wirklich sechsgliedrig sein sollten, wird doch die ganze Gruppe aus isomorphen Gliedern bestehen. Vergleichen wir aber die Glimmer mit den Turmalinen und den Feldspathen, so sehen wir, dass sie nicht wie jene (oder wie Granat, Vesuvian, Epidot u. s. w.) auf eine gemeinsame Formel zurückgeführt werden können, sondern dass, gleichwie bei den Feldspathen, das Verhältniss des Siliciums zu den electropositiven Elementen bei manchen Gliedern ein anderes ist als bei anderen, denn die Glimmer sind theils Singulosilicate, theils Verbindungen von Singulo- und Bisilicaten.

Wir halten nämlich an der Vorstellung fest, dass nur diese beiden Silicatstufen selbständige seien, und behaupten, dass alle Zwischenstufen aus einer Verbindung derselben hervorgehen. Also:

$$\overset{I}{R}_{18}Si_5O_{19} = \overset{I}{R}_2SiO_3 + 4\overset{I}{R}_4SiO_4$$
$$\overset{I}{R}_{14}Si_4O_{15} = \overset{I}{R}_2SiO_3 + 3\overset{I}{R}_4SiO_4$$
$$\overset{I}{R}_6Si_2O_7 = \overset{I}{R}_2SiO_3 + \overset{I}{R}_4SiO_4$$
$$\overset{I}{R}_8Si_3O_{10} = 2\overset{I}{R}_2SiO_3 + \overset{I}{R}_4SiO_4$$
$$\overset{I}{R}_{10}Si_4O_{13} = 3\overset{I}{R}_2SiO_3 + \overset{I}{R}_4SiO_4$$

Ferner behaupten wir, dass ein jeder Glimmer aus analog constituirten Silicaten bestehe, wie es die Isomorphie voraussetzt. Mithin sind die Glimmer solcher intermediären Art aus ebenso constituirten Silicaten der $\overset{I}{R}$, der $\overset{II}{R}$ und der $\overset{VI}{R}$ gebildet, wodurch jede willkürliche Vertheilung des Siliciums ausgeschlossen ist.

Aus der Voraussetzung: Alle Glimmer sind isomorph, folgt:

1) dass die auf gleicher Stufe stehenden Silicate der $\overset{I}{R}$, der $\overset{II}{R}$ und der $\overset{VI}{R}$ unter sich isomorph sind.

2) dass die Singulosilicate auch den Bisilicaten isomorph sind, ein Schluss, zu welchem die Erfahrungen an den Feldspathen (Albit und Anorthit) und der Augitgruppe längst geführt haben.

Die Eigenschaft isomorpher Körper, sowohl moleculare Mischungen zu bilden, als auch im einzelnen Krystall neben- und übereinander sich regelrecht zu gruppiren, lässt es möglich erscheinen, dass unter Umständen das Material für eine Analyse nicht in allen Theilen gleich zusammengesetzt sei, um so mehr, als wir sichtliche Verwachsungen zweier verschiedener Glimmer kennen. Sind dieselben stöchiometrisch gleich (gleiche Silicatstufen), so wird das Ganze nur in dem Verhältniss der sogenannten isomorphen Bestandtheile von den dasselbe bildenden Gliedern abweichen. Wäre aber ein Singulosilicat mit einem Singulobisilicat zu anscheinend homogenen Krystallen verwachsen, so würde das Ganze stöchiometrisch als ein mittleres Neues erscheinen. Dies könnte also blos bei jenen wenigen Glimmern vermuthet werden, deren Zusammensetzung sie als vereinzelt dastehende (wenigstens vorläufig) zu betrachten zwingt.

Die Beziehungen der Glimmer zu den Feldspathen und den Turmalinen bieten manches Interessante dar.

Die Isomorphie ungleicher Silicatstufen wiederholt sich bei den Glimmern und den Feldspathen, allein nur bei diesen letzteren kennen wir Endglieder, Grundverbindungen, also solche von constanter Zusammensetzung, in denen das Aequivalentverhältniss $\overset{I}{R}$: Al oder $\overset{II}{R}$: Ⱥl stets dasselbe ist. Denn während der Anorthit:

$$\left\{\begin{matrix} Ca_2\,Si\,O_4 \\ \text{Ⱥl}_2\,Si_3\,O_{12} \end{matrix}\right\},$$

ist der Albit:

$$\left\{\begin{matrix} Na_2Si\;O_3 \\ \text{Ⱥl}\;\;Si_3O_9 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} Na_2\,Si_2O_5 \\ \text{Ⱥl}\;\;Si_6O_{15} \end{matrix}\right\}$$

sodass in allen Mischungen beider, in welchem Molecularverhältniss dies auch geschehen mag, jenes Aequivalentverhältniss dasselbe bleibt.

Wie mannichfaltig sind dagegen in den Eisenmagnesiaglimmern die Verhältnisse zwischen den Silicaten der $\overset{I}{R}$, der $\overset{II}{R}$ und der Ɍ?

In der ersten, zweiten und dritten Abtheilung sind

zwar die Silicate von $\overset{I}{R}$ und von $\mathbf{R}$ zu je einem Molecül vorhanden und mit verschiedenen Mengen des Silicats der $\overset{II}{R}$ gemischt, allein in allen anderen Glimmern dieser Art stehen jene in den Molecularverhältnissen 1 : 2, 1 : 4, 3 : 2 und 3 : 4.

In geringerem Maasse scheint dies auch bei den reinen Kaliglimmern stattzufinden, wenn die drei angeführten irländischen Glimmer wirklich die Silicate der $\overset{I}{R}$ und $\mathbf{R}$ = 4 : 3 und 3 : 2 Mol., anstatt 1 : 1 enthalten.

In dieser Hinsicht sind die Glimmer den Turmalinen zu vergleichen, trotzdem hier die Grundverbindungen stöchiometrisch gleich sind. Denn in der ersten Abtheilung stossen wir auf zweierlei Verbindungsweisen, insofern $\overset{I}{R} : \overset{II}{R} : \mathbf{R} : Si$ entweder 3 : 3 : 4,5 : 6 oder 5 : 2 : 4,5 : 6 ist. Hier differirt das Molecularverhältniss der $\overset{I}{R}_6 SiO_5$ und der $\overset{II}{R}_3 SiO_5$ (1 : 2 und 5 : 4), während beide zusammen gegen $\mathbf{R} SiO_5$ constant (1 : 3) sind.

Welcher Art sind nun die Beziehungen zwischen der chemischen Natur der Glimmer und ihren übrigen Eigenschaften? Eine gewisse Abhängigkeit scheint nur durch qualitative Verschiedenheit jener, nicht durch die relative Zahl der Atome in den Molecülen bedingt zu sein.

Dass Unterschiede in den entsprechenden Winkeln vorhanden sind, ist nachgewiesen, wenn auch nur in wenigen Fällen ihre Grösse sich ermitteln lässt.

Mit grösserer Sicherheit lassen sich optische Verschiedenheiten feststellen. In dieser Hinsicht gleichen sich alle Alkaliglimmer, mögen sie nun Natrium, Kalium oder Kalium und Lithium enthalten, d. h. mögen sie Singulosilicate oder Singulobisilicate in verschiedenen Verhältnissen sein. So weit sie optisch geprüft sind, steht bei ihnen (allen?) die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Symmetrieebene.

Die reinen Magnesiaglimmer verhalten sich in letzterer Hinsicht entgegengesetzt, d. h. dies gilt von Edwards, Pargas, Pennsbury, Ratnapura.

Unter den Eisenmagnesiaglimmern gibt es solche,

die optisch gleich den Alkaliglimmern (Baikalsee, Greenwood Furnace), aber noch mehr solche, die optisch gleich den reinen Magnesiaglimmern sind.

Beim Lithioneisenglimmer von Zinnwald liegen die Axen wie bei den letzterwähnten Glimmern.

Der Barytglimmer von Sterzing ist optisch gleich den Alkaliglimmern.

Aus allem folgt, dass jede Anordnung der Glimmer nur eine chemische sein kann. So lange wir aber nicht wissen, ob die (qualitative) chemische Natur sich mit den bisherigen Unterabtheilungen (Muscovit, Phlogopit, Biotit etc.) deckt, welche doch nur auf physikalischen Unterschieden beruhen, dürfen wir die sicheren chemischen Namen nicht mit solchen vertauschen, welche von einem einzelnen physikalischen Charakter, z. B. der Lage der optischen Axenebene entnommen sind.

Der Verfasser ist leider jetzt nicht in der Lage, über das optische Verhalten der von ihm untersuchten Glimmer Mittheilung zu machen, hofft jedoch, dies später nachholen zu können.

VII. *Elasticitätsmodulus des Eises; von E. Reusch.*

Vor neun Jahren hatte ich eine kleine Reihe von Versuchen angestellt, welche zum Zwecke hatten, den, so viel ich glaube, noch nicht genau bekannten Elasticitätsmodulus des Eises zu bestimmen. Die damals gefundenen Resultate hoffte ich in den folgenden Wintern durch weitere zu vermehren, kam aber aus verschiedenen Gründen nicht dazu. Da ich aber glaube, dass meine Versuche nicht ganz werthlos sind, dass namentlich mit der von mir eingeschlagenen Methode Brauchbares gewonnen werden kann, so erlaube ich mir, über meine alten Versuche vom Januar 1871 kurz zu berichten.

Aus Eistafeln von 15 bis 20 mm Dicke, wie man sie in grösseren, hölzernen Wasserwannen erhält, wurden, so gut es ging, rechtwinkelig prismatische Lamellen hergestellt in einer Weise, die weiter unten besprochen werden soll. Von den drei rechtwinkeligen Dimensionen l, b, h lagen Länge und Breite in der Gefrierfläche, die Dimension h senkrecht darauf. Nachdem diese Längen mit Hülfe eines Kalibers gemessen waren, wurde das Gewicht P der Lamelle gesucht und endlich mit Hülfe eines Sonometers von Marloye (Monochord von 1 m Länge mit Stimmgabel von 256 ganzen Schwingungen in der Secunde) die secundliche Schwingungszahl N des Tons bestimmt, den die in der Nähe der äusseren Fünftel unterstützte, in der Richtung der Dimension h transversal schwingende Lamelle gab. Alle diese Bestimmungen geschahen natürlich in einem Raume, dessen Temperatur einige Grade unter Null lag.

Die Berechnung der Versuche geschah mit der Formel:

$$m = \frac{48}{\varepsilon_1{}^4 \pi^2 g} \cdot \frac{N^2 P l^3}{b h^3},$$

welche sich aus der Abhandlung von A. Seebeck[1]), über die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe (§ 4, Formel 6 und § 5, 1) ergibt. Hier haben l, b, h, P, N die angegebene Bedeutung; ausserdem ist g die Intensität der Schwere, ε_1 ein Zahlencoëfficient, welcher für den tiefsten Ton der in der Nähe der äusseren Fünftel unterstützten Lamelle den Werth $\varepsilon_1 = 1{,}5062$ hat. Sind die Längen l, b, h, g in Centimetern, das Gewicht P in Grammen gegeben, so bedeutet m den Elasticitätsmodulus in Grammen pro Quadratcentimeter, und es ist:

$$\log \frac{48}{\varepsilon_1{}^4 \pi^2 g} = 0{,}984\,526 - 4\,.$$

Gewöhnlich gibt man den Elasticitätsmodulus E in Kilogrammen pro Quadratmillimeter; alsdann ist:

1) Seebeck, Abh. d. math.-physik. Classe d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1. p. 131. 1852.

$$E = m \, . \, 10^{-5}.$$

In der nachfolgenden Tabelle enthält die erste Columne die Dimensionen l, b, h der fünf untersuchten Lamellen in Centimetern; die zweite enthält in Grammen die Gewichte der Lamellen, und zwar bedeuten die in Klammern stehenden Zahlen die direct erhaltenen Gewichte, die freistehenden Zahlen die aufs Vacuum reducirten Gewichte. Die dritte Columne gibt die secundliche Schwingungszahl N; die vierte die berechneten E in Kilogrammen pro Quadratmillimeter; die fünfte gibt $\frac{P}{lbh} = \Delta$.

	lbh	P	N	E	Δ
I	19,40 c 2,89 1,78	(90,99) g 91,101	771,09	234,16	0,913
II	19,20 2,70 1,60	(75,06) 75,151	721,13	241,36	0,906
III	19,32 2,62 1,53	(69,90) 69,985	658,09	224,78	0,904
IV	18,10 2,09 1,25	(43,13) 43,183	633,66	246,60	0,927
V	19,17 2,48 1,30	(57,03) 57,100	573,99	234,72	0,924

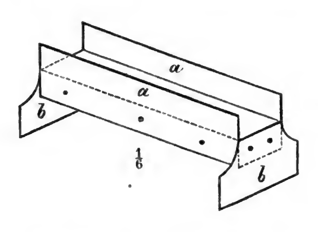
Das arithmetische Mittel der so gefundenen E ist:

$$E = 236{,}324.$$

Als Summe der Quadrate der Abweichungen der einzelnen Resultate vom Mittel ergibt sich die Zahl 271,42, und hieraus der mittlere Fehler der einzelnen Bestimmung zu 8,24, und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels zu 3,65; aber die Zahl der Beobachtungen ist zu klein, als dass diesen Grössen eine tiefere Bedeutung beigelegt werden könnte. Die einzige mir bekannte Angabe über den Elasticitätsmodulus des Eises ist die in der Physik von

Mousson, 2. Aufl. **1.** p. 204, wo nach Frankenheim $E = 541$ gesetzt ist; diese Zahl wäre nach meinen Versuchen um mehr als das Doppelte zu gross.

Die Hauptschwierigkeit der Versuche liegt in der Herstellung der Lamellen. Die in einer Wanne entstandene Eistafel enthält ausser verkrümmten Partien meistens auch ebene homogene Stellen; man wird aber gut thun, die Tafel nicht herauszubrechen oder zu schlagen, sondern durch erwärmte Metallschienen herauszuschneiden. Die beistehende Figur zeigt das hierzu benutzte Werkzeug: an ein Holzparallelepiped sind zwei Langschienen *a a* von Zink angeschraubt, welche mehrfach erwärmt und ins Eis eingedrückt werden, bis die Tafel nach zwei parallelen Furchen durchschnitten ist; alsdann werden die kürzeren Querschienen *b b* erwärmt und dadurch die Lamelle an den Enden abgelöst.



Zur Egalisirung der Lamellen dienten zwei 5 mm dicke Zinkschienen von 50 cm Länge und 5 cm Breite, welche unter rechtem Winkel durch Löthen verbunden sind; die so gebildete Rinne ruht auf zwei Stützen von ungleicher Höhe. Indem man nun den tiefer stehenden Theil der Rinne von unten mit einer Spiritusflamme mässig erwärmt, die Eislamelle in den rechten Winkel einlegt und mit dickem Lederhandschuh unter mässigem Drucke nach oben schiebt, gelingt es einigermassen, ebene und rechtwinkelige Seitenflächen herzustellen. Die kleineren Endflächen erhält man dadurch, dass man die an den Seiten berichtigte Lamelle in die kalte Rinne legt und gegen eine warme Zinkplatte anschiebt, welche rechtwinkelig am Ende der Rinne angelegt ist.

Bei der Messung der Dimensionen l, b, h wurde besondere Sorgfalt auf die letzte Grösse verwendet. Aus

den in der Mitte und innerhalb der Enden genommenen Dicken wurde das Mittel genommen, wobei allerdings zwischen den einzelnen Messungen Differenzen von 1 bis 1,5 mm vorkamen.

Das Mittel aus den in der letzten Columne der Tabelle enthaltenen Dichtigkeiten ist:

$$\Delta = 0{,}9148.$$

Nach Bunsen ist aber $\Delta = 0{,}91674$, und es ist diese Zahl bei der Reduction aufs Vacuum angewendet worden. Die erheblichen Unterschiede der einzelnen Bestimmungen erklären sich wohl genügend aus der Unmöglichkeit, genau prismatische Lamellen zu erhalten. Bei ernstlichen Versuchen sollte das Princip der Arbeitstheilung angewendet werden, sodass jede der einzelnen Operationen von einem geschickten und besonders eingeübten Beobachter ausgeführt würde.

Um die Brauchbarkeit der bei den Berechnungen angewandten theoretischen Formel einigermassen zu prüfen, habe ich gelegentlich einige andere Körper untersucht. Gut gearbeitete Stahlstäbe von Marloye gaben sehr nahe $E = 21000$. — Vier Steinsalzlamellen, deren Flächen dem natürlichen Blätterbruch folgten, und welche durch Abreiben auf Glaspapier, das auf eine Spiegelplatte geklebt war, egalisirt wurden, gaben im Mittel $E = 4231$. Diese beiden Zahlen scheinen etwas grösser als die sonst angegebenen.

Versuche mit Gypsstäben, welche in einer aus Zinkplatten hergestellten Form gegossen waren und Jahre lang in trockenem Raum gelegen hatten, zeigten erhebliche Unterschiede in Dichtigkeit und Elasticitätsmodulus, wie die nachfolgende kleine Tabelle zeigt:

Δ	E
0,813	321
0,831	328
0,967	354
1,001	487

Hier bedeutet $\varDelta$ den Quotienten aus Gewicht in der Luft durch Volumen, und in der Formel für m oder E mussten die nicht reducirten Gewichte eingeführt werden. Ohne Zweifel hat die Qualität des Gypsmehles und das ursprüngliche Verhältniss von Mehl und Wasser in der breiigen Mischung erheblichen Einfluss auf die scheinbare Dichtigkeit des erstarrten Stoffes. Bei keiner der Lamellen lag der Schwerpunkt genau in der Mitte der Lamelle, sondern wahrscheinlich näher dem tiefsten Theil der vertical stehenden Gussform.

Tübingen, 10. Januar 1880.

VIII. *Das Kreuzpendel, Apparat zur graphischen Darstellung der Schwingungscurven; von P. Schönemann.*

(Auszug.)

Das von mir zur graphischen Darstellung der Schwingungscurven construirte Kreuzpendel hat folgende Einrichtung[1]: Ein horizontales Brett *abcd* (Taf. I Fig. 14) ist an drei Drahtstiften *l m n* durch einen von jedem derselben sich nach zwei Richtungen erstreckenden Faden an den vier festen Drahtstiften f_1 f_2 f_3 f_4, um welche die Enden der Faden geschlungen werden, aufgehängt. In der Ruhelage liegen die Punkte f_1 f_4 l m einerseits, die Punkte f_2 f_3 n andererseits in senkrechten parallelen Ebenen, sodass das Brett nur in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung seiner Länge schwingen kann und dabei stets horizontal bleibt. Die kleine stetige Senkung kommt bei den verhältnissmässig kleinen Ausschlägen nicht in Betracht. Ganz ebenso

---

1) Bereits im Jahre 1875 hatte ich in Giebel's Zeitschr. **46.** auf die Anwendung schwingender Bretter hingewiesen.

ist das zweite Brett *e i g h* aufgehängt an den festen Punkten f^1 f^2 f^3 f^4, und zwar derartig, dass seine Schwingungsrichtung senkrecht zu derjenigen des ersten ist.

Die Faden hängen an je vier Nägeln an einem Statif, welches aus vier senkrechten Pfosten mit Querhölzern hergestellt ist, die einen 80 cm im Quadrat haltenden Zwischenraum einschliessen.

Zuerst werden die Bretter durch zwischengelegte Latten annähernd in ihre richtige Lage gebracht, und dann werden die an ihnen befestigten Fäden in richtiger Höhe um die am Gestell eingeschlagenen Nägel umgeschlungen.

Durch die Länge der Fäden lässt es sich erreichen, dass die Schwingungszahlen der Bretter in einem bestimmten Verhältniss, z. B. 1 : 2, stehen. Zur Justirung zählen zwei Beobachter die Schwingungen beider Bretter und bestimmen, wann die Schwingungen wieder in derselben Phase erfolgen. Auch kann ein einzelner Beobachter dies erkennen, wenn er die Schwingungen der Bretter in einem um 45° gegen ihre Schwingungsrichtung aufgestellten Spiegel beobachtet.

Schneidet man drei Klötze, welche bei richtigem Abstand der Bretter an drei Stellen gerade zwischen sie passen, so kann man dadurch stets leicht wieder die Einstellung derselben herstellen.

An dem untern Brett ist eine Schreibvorrichtung (Taf. I Fig. 15) angebracht.

Auf dem Brett *stuv* von 28 cm Länge und 11 cm Breite befinden sich hierzu zwei kleine Pfosten von 8 cm Höhe, welche ein Axenlager für einen um dasselbe drehbaren Hebel *w z* bilden. Der längere, nach vorn sich erstreckende Arm ist seitlich doppelt verstrebt und trägt bei *w* als schreibenden Stift einen zugespitzten Silberdraht, der in einer Glas- oder Thonröhre befestigt ist.

Unter den Stift wird auf das obere Brett eine berusste Glasplatte gelegt, auf der der Schreibstift beim Schwingen der Bretter Curven verzeichnet. Zur Regulirung des Aufliegens des Stiftes ist am andern Ende des Hebels ein ver-

schiebbares Gewicht z angebracht. Durch Anziehen beider Bretter, was am besten mit beiden Händen zugleich geschieht, und gleichzeitiges oder verschiedenes Loslassen derselben erhält man die verschiedenen Phasen für eine Einstellung.

Durch einige Versuche lässt sich leicht die zur Herstellung guter Figuren erforderliche Stellung des Gegengewichts z ermitteln.

Die Figur ist dann leicht durch vorsichtiges Uebergiessen mit dem Negativlack der Photographen zu fixiren und liefert ein schönes Transparentbild. Sie lässt sich ferner direct als Negativplatte für weitere photographische Abdrücke in beliebiger Zahl verwenden und ist auch mit Vortheil für das Skioptikon zu brauchen.

Auch auf berusstem Schreibpapier kann man die Figuren verzeichnen. Zur Fixirung derselben wird es nachher von der Unterseite mit Schellackfirniss getränkt. Sehr feine Figuren werden auf eine Schieferplatte mittelst einer feinen Nähnadel gezogen.

Die vollkommene Richtigkeit der Einstellung des Apparates wird an den Figuren selbst erkannt, deren Axe entweder constant bleibt oder bei etwas abweichendem Schwingungsverhältniss beider Bretter sich allmählich dreht.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1880. ANNALEN № 3.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND IX.

I. *Ueber das Verhalten der Kohlensäure in Bezug auf Druck, Volumen und Temperatur; von R. Clausius.*

(Vorgetragen auf der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte am 19. Sept. 1879.)

Die Gase folgen bekanntlich in Bezug auf Druck, Volumen und Temperatur mit einer gewissen Annäherung dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze, welche sich gemeinsam durch folgende Gleichung ausdrücken lassen, worin p den Druck, v das Volumen und T die absolute Temperatur darstellt, und R eine von der Natur des Gases abhängige Constante ist:

$$(1) \qquad pv = RT.$$

Die Annäherung an diese Gesetze ist um so grösser, je weiter das betreffende Gas von seinem Condensationspunkte entfernt ist. Bei den Gasen, welche unter gewöhnlichen Umständen so weit von ihrem Condensationspunkte entfernt sind, dass man bis vor kurzem ihre Condensation nicht hatte bewirken können, und welche man daher permanente Gase nannte, ist die Annäherung so gross, dass man lange Zeit geglaubt hat, sie folgten diesen Gesetzen wirklich genau, bis zuerst Regnault durch seine bekannten ausgezeichneten Untersuchungen[1]) kleine Abweichungen nachwies. Etwas später zeigte Natterer[2]), dass man bei Anwendung sehr grosser Druckkräfte sehr bedeutende Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze erhält, und zwar

1) Regnault, Mém. de l'Acad. des sciences. **21.** 1847.

2) Natterer, Wien. Ber. **5.** p. 351. 1850; **6.** p. 557. 1851 u. **12.** p. 199. 1854.

waren die von ihm beobachteten Abweichungen anderer Art, als die von **Regnault** gefundenen. Während nämlich **Regnault** bei allen von ihm untersuchten Gasen, mit Ausnahme des Wasserstoffs, gefunden hatte, dass der Druck langsamer zunimmt als die Dichtigkeit, stellte sich bei den Versuchen von **Natterer** heraus, dass bei sehr grossem Drucke die Sache sich umkehrt, und der Druck schneller zunimmt als die Dichtigkeit. Bei atmosphärischer Luft, Stickstoff und Kohlenoxydgas erreichte der Druck schon eine Grösse von etwa 3000 Atmosphären, als die Dichtigkeit erst die 700- bis 800-fache der unter dem Drucke von einer Atmosphäre stattfindenden Dichtigkeit geworden war.

Ueber die Gründe, auf welchen diese Abweichungen der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze beruhen, sprach ich mich in meiner 1857 veröffentlichten Abhandlung „Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen", folgendermassen aus[1]):

„Damit das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz und die mit ihm in Verbindung stehenden Gesetze streng gültig seien, muss das Gas in Bezug auf seinen Molecularzustand folgenden Bedingungen genügen.

1) Der Raum, welchen die Molecüle des Gases wirklich ausfüllen, muss gegen den ganzen Raum, welchen das Gas einnimmt, verschwindend klein sein.

2) Die Zeit eines Stosses, d. h. die Zeit, welche ein Molecül, indem es gegen ein anderes Molecül oder gegen eine feste Wand stösst, bedarf, um seine Bewegung in der Weise zu ändern, wie es durch den Stoss geschieht, muss gegen die Zeit, welche zwischen zwei Stössen vergeht, verschwindend klein sein.

3) Der Einfluss der Molecularkräfte muss verschwindend klein sein. Hierin liegt zweierlei. Zunächst wird gefordert, dass die Kraft, mit welcher die sämmtlichen

1) **Clausius**, Pogg. Ann. **100.** p. 358. 1857 und Abhandlungensammlung **2.** p. 235.

Molecüle sich in ihren mittleren Entfernungen noch gegenseitig anziehen, gegen die aus der Bewegung entstehende Expansivkraft verschwindet. Nun befinden sich aber die Molecüle nicht immer in ihren mittleren Entfernungen voneinander, sondern bei der Bewegung kommt oft ein Molecül in unmittelbare Nähe eines andern oder einer ebenfalls aus wirksamen Molecülen bestehenden festen Wand, und in solchen Momenten treten natürlich die Molecularkräfte in Thätigkeit. Die zweite Forderung besteht daher darin, dass die Theile des von einem Molecüle beschriebenen Weges, auf welchen diese Kräfte von Einfluss sind, indem sie die Bewegung des Molecüls in Richtung und Geschwindigkeit merklich ändern, gegen die Theile des Weges, auf welchen die Kräfte als unwirksam betrachtet werden können, verschwinden.

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, so treten nach verschiedenen Richtungen hin Abweichungen von den einfachen Gesetzen der Gase ein, welche um so bedeutender werden, je weniger der Molecularzustand des Gases diesen Bedingungen entspricht."

Die in dieser Stelle erwähnten, nach verschiedenen Richtungen hin eintretenden Abweichungen müssen sich, sofern man bei gegebener Temperatur und gegebenem Volumen den Druck betrachtet, darin äussern, dass dieser entweder grösser oder kleiner ist, als er, wenn man vom sehr verdünnten Zustande des Gases ausgeht, nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze sein sollte. Der oben unter 1) angeführte, von den Molecülen wirklich ausgefüllte Raum bedingt eine Vermehrung des Druckes, indem durch ihn bei einem gegebenen Volumen des Gases der für die Bewegung der Molecüle freie Raum verkleinert, und demgemäss die Anzahl der Stösse vergrössert wird. Die unter 3) angeführten Molecularkräfte bewirken beim Vorherrschen der Anziehung eine Verminderung des Druckes. Der unter 2) angeführte Umstand, nämlich die während eines Stosses vergehende Zeit, hat eine complicirtere Wirkung, indem beim Gegeneinanderfliegen zweier Molecüle

zunächst eine Beschleunigung und darauf erst die Verzögerung und Umkehrung der Bewegung eintritt. Man kann daher bei der auf die Gesammtwirkung gerichteten Betrachtung die Wirkung dieses Umstandes theils der des ersten, theils der des letzten Umstandes anschliessen.

Von den beiden entgegengesetzten Wirkungen der Druckvermehrung und Druckverminderung kann je nach Umständen die eine oder die andere überwiegen. Die oben angeführten Versuche von Regnault und Natterer ergeben beim Wasserstoff durchweg ein Ueberwiegen der Druckvermehrung, während sie bei den anderen Gasen erkennen lassen, dass bei geringeren Dichtigkeiten die Druckverminderung und bei grösseren Dichtigkeiten die Druckvermehrung überwiegt.

Noch complicirter wird das Verhalten eines Stoffes, wenn er bei der Verdichtung nicht immer gasförmig bleibt, sondern seinen Aggregatzustand ändert, indem er flüssig wird.

Ueber den Zusammenhang dieses Vorganges mit den vorher besprochenen Vorgängen sind in neuerer Zeit sehr schöne Versuche von Andrews angestellt, indem er Kohlensäure bei verschiedenen Temperaturen starken Verdichtungen unterwarf und die dabei stattfindende Druckzunahme beobachtete.[1]) Er fand dabei, dass ein wesentlicher Unterschied im Verhalten der Kohlensäure stattfindet, je nachdem die Temperatur über oder unter 31° liegt. Ueber 31° zeigen sich nur die oben erwähnten Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze, unter 31° aber tritt bei einem gewissen Drucke die Condensation ein.

Andrews hat die von ihm beobachteten Beziehungen zwischen Druck und Volumen durch Curven dargestellt, welche Druck und Volumen als Abscissen und Ordinaten haben. Die auf Temperaturen über 31° bezüglichen Curven zeigen einen stetigen Verlauf; die auf Temperaturen

1) Andrews, Phil. Trans. for 1869, p. 575.

unter 31° bezüglichen dagegen sind gebrochen, indem bei abnehmendem Volumen anfänglich der Druck wächst, von einem gewissen Volumen an aber, bei welchem die Condensation beginnt, die folgende Volumenabnahme ohne Druckzunahme stattfindet, und erst bei einem viel kleineren Volumen, bei dem die ganze Masse flüssig ist, der Druck wieder mit abnehmendem Volumen zu wachsen beginnt, welches Wachsen dann sehr schnell geschieht. Der Theil der Curve, welcher dem Condensationsvorgange entspricht, ist eine gerade Linie, mit welcher die stetig gekrümmten Theile an beiden Enden zusammentreffen. Eine kleine, an dem einen Ende der Geraden von Andrews gezeichnete Krümmung scheint auf etwas Luftbeimischung zu beruhen und kann daher hier unberücksichtigt bleiben.

Zwei Jahre später[1]) hat James Thomson, dessen sinnreiche Betrachtungen schon so viel zur Erweiterung der mechanischen und physikalischen Wissenschaft beigetragen haben, die Curven von Andrews dadurch ergänzt, dass er an den Stellen, wo sich dort eine gerade Linie befindet, eine gekrümmte Linie hinzugefügt hat, die sich an die beiden gekrümmten Theile der von Andrews gegegebenen Curve in stetiger Weise anschliesst und einen allmählichen Uebergang aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand darstellt, bei welchem stets die ganze Menge des Stoffes sich in gleichem Zustande befindet, eine Art des Ueberganges, welche theoretisch denkbar ist, aber in der Wirklichkeit deshalb nicht vorkommen kann, weil sie Zwischenzustände enthält, in denen kein stabiles, sondern nur ein labiles Gleichgewicht besteht.

Auf Taf. II Fig. 1 ist die von Andrews gegebene Figur mit den von J. Thomson hinzugefügten, punktirt gezeichneten Ergänzungscurven wiedergegeben. Nur ist das äussere Arrangement der Figur in einer zuerst von Maxwell in Anwendung gebrachten Weise geändert. Andrews hat nämlich in seiner Figur den Druck durch

1) Proc. of Roy. Soc. of London. Nov. 1871.

die Abscissen und das Volumen durch die Ordinaten dargestellt. Nun ist es aber in der mechanischen Wärmetheorie Brauch, das Volumen durch die Abscissen und den Druck durch die Ordinaten darzustellen, und diesem Brauche gemäss ist die Figur umgezeichnet.

In den zu den Temperaturen 13,1° und 21,5° gehörenden Curven sind *ae* und *fk* die oben erwähnten, dem Condensationsvorgange entsprechenden geraden Linien, welche J. Thomson durch die punktirt gezeichneten gekrümmten Linien *abcde* und *fghik* ersetzt hat.

J. Thomson hat seinen Schluss über die Gestalt dieser Linien nur aus der Gestalt der zu den höheren Temperaturen gehörenden Curven von Andrews gezogen, indem er verfolgte, wie diese letzteren sich bei der Annäherung an die Temperatur von 31° allmählich ändern, und dann dieselbe Art der Aenderung auch unter 31° fortsetzte. Auf eine Untersuchung der Gründe für diese eigenthümliche Gestaltung der Druckcurven und auf die Bildung eines ihnen entsprechenden mathematischen Ausdruckes ist er nicht eingegangen.

Was diesen letztern Punkt, nämlich die mathematische Behandlung des Gegenstandes, anbetrifft, so sind theils vor, theils nach der von Andrews ausgeführten experimentellen Untersuchung von verschiedenen Autoren Versuche gemacht, die Abweichungen der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze durch eine Gleichung auszudrücken.

Rankine[1]) hat an Stelle von (1) eine Gleichung aufgestellt, mit welcher auch eine von W. Thomson und Joule[2]) aus ihren Versuchen über die bei der Ausdehnung von Gasen stattfindende Temperaturänderungen abgeleitete Gleichung sehr nahe übereinstimmt, und welche sich in ihrer einfachsten Form so schreiben lässt:

1) Siehe Phil. Trans. for 1854, p. 336.
2) Thomson u. Joule, Phil. Trans. 1862, p. 579.

$$(2) \qquad pv = RT - \frac{c}{Tv},$$

worin c ebenso, wie R, eine Constante bedeutet.

Hirn[1]) hat mit der Gleichung (1) eine Umbildung vorgenommen, bei welcher die beiden oben erwähnten Umstände, welche vorzugsweise die Abweichung der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze veranlassen, nämlich das Volumen der Molecüle und ihre gegenseitige Anziehung durch Einführung besonderer Grössen zur Geltung gebracht sind. Die von ihm gebildete Gleichung, welche nicht nur auf Gase, sondern auch auf Körper von anderen Aggregatzuständen anwendbar sein soll, lautet:

$$(3) \qquad (p + r)(v - \psi) = RT.$$

Hierin bedeutet ψ „la somme de volumes des atomes" und r „la somme des actions internes", welche letztere Grösse er auch „la pression interne" nennt. Bei der weitern Behandlung dieser Gleichung, durch welche Hirn die Grössen ψ und r zu bestimmen sucht, macht er Schlüsse, welche mir nicht gerechtfertigt zu sein scheinen, und deren Resultat daher auch meiner Ansicht nach der Wirklichkeit nicht entspricht.

Recknagel hat in einer 1871 erschienenen und 1872 noch vervollständigten Abhandlung[2]) an Stelle von (1) eine Gleichung gebildet, welche äusserlich mit der von Rankine aufgestellten Gleichung übereinstimmt. Sie hat die Form:

$$(4) \qquad pv = RT\left(1 - \frac{B_t}{v}\right),$$

worin R eine Constante und B_t eine Temperaturfunction bedeutet. Diese letztere hat Recknagel anders bestimmt als Rankine, indem sie nach ihm der absoluten Temperatur direct und dem dieser Temperatur entsprechenden

1) Hirn, Théorie mécanique de la chaleur, seconde édition 1865. **1.** p. 195; troisième édition **2.** p. 211.

2) Recknagel, Pogg. Ann. Ergbd. **5.** p. 563 u. **145.** p. 469. 1872.

Drucke des gesättigten Dampfes des gegebenen Stoffes umgekehrt proportional sein soll.

J. D. van der Waals hat in einer nach der Veröffentlichung der oben citirten Versuche von Andrews erschienenen, sehr interessanten Schrift[1]) an Stelle von (1) eine Gleichung gebildet, in welcher, wie bei Hirn, die beiden Umstände, der von den Molecülen erfüllte Raum und die gegenseitige Anziehung der Molecüle, berücksichtigt sind, und welche folgende Form hat:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \tag{5}$$

oder nach p aufgelöst:

$$p = R\frac{T}{v - b} - \frac{a}{v^2}, \tag{5a}$$

worin R, a und b Constante sein sollen. Die Werthe dieser Constanten hat van der Waals für Kohlensäure folgendermassen bestimmt[2]), wobei als Einheit des Druckes eine Atmosphäre und als Einheit des Volumens dasjenige Volumen angenommen ist, welches die Kohlensäure unter dem Drucke von einer Atmosphäre beim Gefrierpunkte einnimmt. Die in dem Werthe der ersten Constanten als Nenner stehende Grösse T_0 stellt die dem Gefrierpunkte entsprechende absolute Temperatur, also angenähert die Zahl 273 dar.

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{1{,}00646}{T_0}, \\ a &= 0{,}00874, \\ b &= 0{,}0023. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Diese Gleichung, welche ihrer Form nach ausserordentlich einfach ist, gibt Druckcurven, welche den von Andrews construirten und von J. Thomson vervollständigten Curven ihrer Gestalt nach gut entsprechen, und den charakteristischen Unterschied zwischen den Gestalten,

1) Van der Waals, Over de continuiteit van den gas- en Vloeistoftoestand, Leiden 1873, p. 56.

2) Van der Waals, p. 76 seiner Schrift.

welche zu Temperaturen über und unter 31° gehören, ebenfalls zeigen.

Was aber die genauere numerische Uebereinstimmung der aus dieser Gleichung berechneten Werthe von p mit den von Andrews beobachteten Werthen anbetrifft, so hat schon van der Waals selbst die Bemerkung gemacht, dass bei solchen Volumen, die kleiner als 0,0046 sind, der Werth von b nicht mehr als constant betrachtet werden dürfe, sondern mit abnehmendem Volumen verkleinert werden müsse. Welches aber die Function des Volumens sei, durch die man b darzustellen habe, sei ihm noch nicht geglückt, zu finden.[1])

Dazu kommen noch andere Abweichungen, die sich erst später herausstellen konnten. Nach der Veröffentlicht der Schrift von van der Waals hat nämlich das zur Vergleichung mit den berechneten Werthen geeignete Beobachtungsmaterial eine grosse und wichtige Bereicherung erfahren, indem Andrews seine Untersuchungen fortgesetzt und im Jahre 1876 drei neue Beobachtungsreihen für die Temperaturen 6,5°, 64° und 100° veröffentlicht hat[2]), welche die früher veröffentlichten an Ausdehnung weit übertreffen und auch wohl eine erhöhte Genauigkeit besitzen. Bei der Vergleichung mit diesen Versuchen zeigt sich, dass die von van der Waals aufgestellte Gleichung mit der Erfahrung nicht übereinstimmt, und auch nicht durch eine Veränderung der den Constanten beigelegten Werthe zur Uebereinstimmung gebracht werden kann, sondern dass sie dazu einer wesentlicheren Modification bedarf.

Der Hauptgrund dieser Abweichungen scheint mir folgender zu sein. Van der Waals hat es als selbstverständlich angenommen, dass die gegenseitige Anziehung der Molecüle von der Temperatur unabhängig sei und also nur eine Function des Volumens sein könne. Danach müsste, wenn eine Quantität des Gases bei constantem

1) Van der Waals, p. 78 und 52 seiner Schrift.

2) Andrews, Phil. Trans. for 1876, p. 421

Volumen erwärmt würde, die Molecularanziehung unverändert bleiben. Dieses würde allerdings richtig sein, wenn die Bewegung der Gasmolecüle bei niedrigerer und höherer Temperatur sich nur durch die verschiedene Grösse der mittlern lebendigen Kraft der Bewegung unterschiede, im übrigen aber in ganz gleicher Weise stattfände, indem die Wege aller Molecüle und die Verhältnisse der Geschwindigkeiten in den verschiedenen Stadien eines Weges dieselben blieben. Auch glaube ich, dass man eine solche Annahme über die Gleichartigkeit der Bewegung in dem Falle machen darf, wo man nur den idealen Zustand eines Gases betrachtet, welchen wir den vollkommenen Gaszustand nennen. Wenn es sich aber darum handelt, die Abweichungen eines Gases vom vollkommenen Gaszustande zu untersuchen, so scheint mir dabei diese Annahme nicht mehr zulässig zu sein.

Ich will über die Art, wie die Bewegung beim Verlassen des vollkommenen Gaszustandes sich ändert, hier keine bestimmte Theorie aufstellen, aber ich will mir wenigstens erlauben, eine Art der Aenderung als eine mögliche anzuführen. Für den vollkommenen Gaszustand ist anzunehmen, dass jede zwei Molecüle, welche zusammenfliegen, sich nach dem Zusammenstosse wieder trennen. Wenn das Gas dagegen zur Flüssigkeit condensirt ist, so findet ein ganz anderes Verhalten statt, nämlich dass die Molecüle im allgemeinen durch ihre gegenseitige Anziehung zusammengehalten werden und nur ausnahmsweise, bei besonders günstigem Zusammentreffen der Bewegungsphasen, einzelne Molecüle sich von der übrigen Masse trennen. Zwischen diesen beiden extremen Zuständen kann man sich nun wohl einen Zwischenzustand von der Art denken, dass zwar der Regel nach die Molecüle sich nach dem Zusammenstosse wieder trennen, dass es aber doch zuweilen vorkommt, dass zwei Molecüle nach dem Zusammentreffen sich nicht wieder trennen, sondern nur gegen einander oscilliren, während sie die fortschreitende Bewegung gemeinsam ausführen, bis etwa durch die bei weiteren Zu-

sammenstössen eintretende Veränderung der Bewegung die Trennung wieder veranlasst wird. Die Anzahl solcher zusammenhaftenden Molecülpaare würde dann um so grösser werden, je niedriger die Temperatur und je geringer daher die mittlere lebendige Kraft der Bewegung würde, und es könnten bei weiterem Sinken der Temperatur auch Fälle hinzukommen, wo nicht blos zwei, sondern mehrere Molecüle zusammenhafteten und als Molecülgruppen die fortschreitende Bewegung gemeinsam machten.

Wenn ein solches Verhalten einträte, so würde dadurch die mittlere Stärke der gegenseitigen Anziehung der Molecüle wachsen, indem die vereinigt bleibenden Molecüle sich natürlich wegen der grössern Nähe auch stärker anzögen, und demgemäss dürfte man die Grösse, welche in der Formel die gegenseitige Anziehung der Molecüle repräsentirt, nicht als von der Temperatur unabhängig betrachten, sondern müsste annehmen, dass sie mit sinkender Temperatur grösser würde.

Ferner hat van der Waals aus theoretischen Betrachtungen den auch schon von anderen in ihren Formeln ausgedrückten Schluss gezogen, dass die durch die gegenseitige Anziehung der Molecüle bedingte Abnahme des Druckes dem Quadrate des Volumens umgekehrt proportional sei. Diesen Schluss kann man für grössere Volumina als angenähert richtig zugestehen, braucht ihm aber keine allgemeine und strenge Gültigkeit zuzuschreiben, sondern kann annehmen, dass auch von ihm eine Abweichung stattfinde, die um so grösser werde, je mehr sich das Volumen verkleinere.

Ich habe nun versucht, eine Formel für p zu bilden, welche aus den früheren Formeln dasjenige beibehält, was mir in ihnen richtig zu sein scheint, zugleich aber den oben erwähnten modificirenden Umständen Rechnung trägt, und bei möglichster Einfachheit mit den älteren und neueren Beobachtungen von Andrews, sowie auch mit den sonst vorhandenen Beobachtungen genügend übereinstimmt. Es ist dieses wegen eines besondern Umstandes mit grossen

Schwierigkeiten verbunden. Die für p zu bildende Formel hat nämlich, wie man schon aus den Gleichungen (2), (3), (4) und (5), wenn man sie nach p auflöst, ersehen kann, die Eigenthümlichkeit, dass sie die Differenz aus zwei Grössen ist, welche beide viel grössere Werthe haben können, als p. Dadurch wird es bewirkt, dass Ungenauigkeiten, welche im Verhältnisse zu den beiden einzelnen Grössen nur klein sind, doch in p im Verhältniss zu seinem Werthe bedeutende Abweichungen von der Erfahrung hervorbringen können, und dass daher die Bestimmung der einzelnen Grössen um so genauer stattfinden muss.

Die Formel, welche ich gebildet habe, hat folgende Gestalt:

$$p = R\frac{T}{v-\alpha} - \frac{c}{T(v+\beta)^2}, \tag{7}$$

worin R, c, α und β Constante sind.

Diesen Constanten hat man für Kohlensäure, wenn man als Druckeinheit eine Atmosphäre und als Volumeneinheit, wie vorher, dasjenige Volumen wählt, welches die Kohlensäure unter dem Drucke von einer Atmosphäre und bei der Temperatur des Gefrierpunktes einnimmt, folgende Werthe zu geben:

$$\text{(8)} \quad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{1{,}00682}{T_0} = 0{,}003\,688 \\ c &= 2{,}0935 \\ \alpha &= 0{,}000\,843 \\ \beta &= 0{,}000\,977. \end{aligned} \right.$$

Wählt man dagegen als Druckeinheit den Druck eines Kilogramm auf ein Quadratmeter und als Volumeneinheit ein Cubikmeter, indem man dabei voraussetzt, dass die betrachtete Menge Kohlensäure ein Kilogramm sei, so hat man den Constanten folgende Werthe beizulegen:

$$\text{(9)} \quad \left\{ \begin{aligned} R &= 19{,}273 \\ c &= 5533 \\ \alpha &= 0{,}000\,426 \\ \beta &= 0{,}000\,494. \end{aligned} \right.$$

Zur Prüfung der Uebereinstimmung dieser Formel mit der Erfahrung habe ich die drei neueren Beobachtungsreihen von Andrews, welche sich auf die Temperaturen 6,5°, 64° und 100° beziehen, und drei der älteren Beobachtungsreihen, welche sich auf die Temperaturen 13,1°, 31,1° und 48,1° beziehen, zur Vergleichung gewählt. Bei jeder dieser Reihen habe ich aus den darin vorkommenden Volumen eine Anzahl, welche sich über das ganze Beobachtungsintervall möglichst gleichmässig vertheilen, zur Betrachtung ausgewählt. Dabei ist aber noch zu bemerken, dass Andrews die Volumen nicht so ausgedrückt hat, dass allen Zahlen eine und dieselbe Einheit zu Grunde liegt, sondern dass er bei jeder Temperatur dasjenige Volumen, welches die Kohlensäure bei dieser Temperatur unter dem Drucke von einer Atmosphäre einnimmt, als Einheit genommen hat. Das auf diese Weise ausgedrückte Volumen hat er mit ε bezeichnet. Um hieraus das von uns mit v bezeichnete Volumen, bei dem das beim Gefrierpunkte unter dem Drucke von einer Atmosphäre von der Kohlensäure eingenommene Volumen als Einheit zu Grunde liegt, zu berechnen, müssen wir den Ausdehnungscoëfficienten der Kohlensäure unter atmosphärischem Drucke kennen. Für diesen ist der von Regnault gefundene Werth 0,00371, welchen auch Andrews in seinen Rechnungen benutzt hat, in Anwendung gebracht.

Die so erhaltenen Werthe von v sind zugleich mit den betreffenden Temperaturen in die Formel eingesetzt, und aus dieser dann die dazu gehörigen Werthe von p berechnet. Diese Werthe sind in den folgenden Tabellen mit p (ber.) bezeichnet, und unter ihnen stehen die entsprechenden beobachteten Werthe, welche mit p (beob.) bezeichnet sind. Auch sind noch die mit Δ bezeichneten Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen von p hinzugefügt. Bei jeder Reihe ist angegeben, ob sie zu den älteren oder neueren Beobachtungsreihen von Andrews gehört.

I. Temp. 6,5° (neuere Reihe).

ε	$\frac{1}{16,13}$	$\frac{1}{29,62}$	$\frac{1}{45,80}$
v	0,06349	0,03458	0,02236
p (ber.)	14,65	24,63	34,15
p (beob.)	14,68	24,81	34,49
Δ	− 0,03	− 0,18	− 0,34

II. Temp. 13,1° (ältere Reihe).

ε	$\frac{1}{76,16}$	$\frac{1}{80,43}$	$\frac{1}{480,4}$	$\frac{1}{510,7}$
v	0,013 768	0,013 037	0,002 182 8	0,002 053 2
p (ber.)	47,98	49,27	54,66	74,96
p (beob.)	47,50	48,76	54,56	90,43
Δ	+ 0,48	+ 0,51	+ 0,10	− 15,47

III. Temp. 31,1° (ältere Reihe).

ε	$\frac{1}{80,55}$	$\frac{1}{124,4}$	$\frac{1}{174,4}$	$\frac{1}{311,1}$	$\frac{1}{405,5}$
v	0,013 847	0,008 966	0,006 395	0,003 585	0,002 751
p (ber.)	54,92	68,44	75,33	78,22	92,47
p (beob.)	54,79	67,60	73,83	75,40	85,19
Δ	+ 0,13	+ 0,84	+ 1,50	+ 2,82	+ 7,28

IV. Temp. 48,1° (ältere Reihe).

ε	$\frac{1}{86,45}$	$\frac{1}{146,8}$	$\frac{1}{293,4}$
v	0,013 631	0,008 028	0,003 949
p (ber.)	62,05	84,42	112,6
p (beob.)	62,60	84,35	109,4
Δ	− 0,55	+ 0,07	+ 3,2

V. Temp. 64° (neuere Reihe).

ε	$\frac{1}{24,18}$	$\frac{1}{46,34}$	$\frac{1}{83,44}$	$\frac{1}{185,5}$	$\frac{1}{446,4}$
v	0,05118	0,02670	0,01483	0,006 671	0,002 772
p (ber.)	22,41	39,95	63,99	107,06	202,30
p (beob.)	22,56	40,54	64,96	106,88	222,92
Δ	− 0,15	− 0,59	− 0,97	+ 0,18	− 20,62

VI. Temp. 100° (neuere Reihe).

ε	$\frac{1}{26,09}$	$\frac{1}{50,63}$	$\frac{1}{96,65}$	$\frac{1}{218,0}$	$\frac{1}{379,3}$
v	0,05255	0,02708	0,014 185	0,006 289	0,003 615
p (ber.)	24,65	45,30	78,69	146,29	230,09
p (beob.)	24,85	45,99	80,25	145,44	223,57
Δ	− 0,20	− 0,69	− 1,56	+ 0,85	+ 6,52

Aus diesen Tabellen ist ersichtlich, dass zwischen den aus der Formel berechneten und den beobachteten Werthen von p im allgemeinen eine genügende und zum Theil eine auffallend gute Uebereinstimmung stattfindet. Indessen kommen bei den grössten in den Versuchen erreichten Dichtigkeiten der Kohlensäure, welche das Vier- bis Fünfhundertfache der unter dem Drucke von einer Atmosphäre stattfindenden Dichtigkeiten betragen, doch erhebliche Differenzen vor. Diese veranlassten mich anfangs, mit der Formel noch eine Aenderung vorzunehmen, indem ich im zweiten Gliede noch eine Temperaturfunction als Factor einführte, welche dazu dienen sollte, die Differenzen auszugleichen. Dadurch verlor aber die Formel ihre bisherige Einfachheit, und es entstand die Frage, ob jene Differenzen wirklich von so grosser Bedeutung sind, um eine solche Aenderung der Formel zu rechtfertigen. Diese Frage glaubte ich bei näherer Betrachtung der Sache verneinen zu müssen.

Die Differenzen wechseln nämlich in ganz auffälliger Weise ihr Vorzeichen. Bei 13,1° ist die grösste Differenz negativ, bei 31,1° positiv, bei 64° negativ und bei 100° wieder positiv. Ein so häufiger Zeichenwechsel spricht nicht dafür, dass der Grund der Differenzen in der Formel liegt, sondern mehr dafür, dass er in Beobachtungsfehlern zu suchen ist. Auch sind im vorliegenden Falle, selbst bei sorgfältigster Beobachtung, solche Fehler sehr wohl denkbar. Das Volumen der stark verdichteten Kohlensäure wurde in Capillarröhren gemessen. Wenn es nun schon so klein geworden war, dass es nur noch ein Vier-

bis Fünfhundertstel seiner ursprünglichen Grösse betrug, so konnten bei der Ablesung leicht Fehler vorkommen, welche zwar, absolut genommen, sehr klein, aber verhältnissmässig doch gross genug waren, um in der Formel für p, welche bei kleinen Werthen von v ihren Werth sehr schnell mit v ändert, Differenzen von den in der Tabelle vorkommenden Grössen zu verursachen.

Auch das zur Bestimmung des Druckes dienende Luftmanometer bestand aus einer Capillarröhre, in welcher die Luft bei den grössten vorkommenden Drucken so kleine Volumina einnahm, dass ein geringer Beobachtungsfehler einen sehr grossen Einfluss auf den aus der Beobachtung abgeleiteten Druck ausüben musste.

Ferner ist zu bemerken, dass Andrews bei der Ableitung des Druckes aus den Angaben des Luftmanometers von der Voraussetzung ausgegangen ist, dass die Luft bis zu den grössten in den Versuchen angewandten Drucken, welche bis über zweihundert Atmosphären reichten, dem Mariotte'schen Gesetze folge. Dieses ist aber bekanntlich nicht der Fall, sondern es finden bei solchen Drucken schon beträchtliche Abweichungen statt. Ich versuchte anfangs, unter Zuhülfenahme der Beobachtungen von Cailletet und Amagat über die Zusammendrückung des Stickstoffs, die aus den Manometerangaben abgeleiteten Druckgrössen zu corrigiren, fand aber, dass die Beobachtungsresultate dieser beiden Forscher doch nicht in genügender Weise unter einander übereinstimmen, um sie mit hinlänglicher Sicherheit zu einer solchen Correction anwenden zu können. Ich habe daher in der Tabelle einfach die von Andrews angeführten Werthe von p wiedergegeben.

Endlich muss ich noch auf einen eigenthümlichen Unterschied aufmerksam machen, welcher sich in den zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von p stattfindenden Differenzen zeigt In den älteren Beobachtungsreihen sind nämlich die Differenzen fast alle positiv und in den neueren fast alle negativ. Auch dieser Unterschied spricht dafür, dass die Differenzen ihren Grund

mehr in den die Versuche beeinflussenden Umständen, als in der Formel haben.

Aus allen diesen Gründen muss man auf eine gewisse, den grössten beobachteten Werthen von p noch anhaftende Unsicherheit schliessen, und demgemäss darf man an die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen keine zu strengen Anforderungen stellen. Ich habe daher von der oben erwähnten, die Formel complicirter machenden Aenderung wieder Abstand genommen und bin auf ihre ursprüngliche und einfachste Gestalt zurückgekommen, welche mir nicht nur in praktischer, sondern auch in theoretischer Beziehung den Vorzug zu verdienen scheint.

Die in der Formel vorkommenden Constanten habe ich durch ziemlich mühsame Rechnungen so bestimmt, dass die aus der Formel sich ergebenden Werthe von p sowohl mit den neueren, als auch mit den älteren Beobachtungsresultaten von Andrews möglichst gut übereinstimmen, und dass von den bei grossen Dichtigkeiten der Kohlensäure bestehen bleibenden Differenzen ungefähr ebensoviele positiv, wie negativ sind. Bei diesen Werthen der Constanten findet auch mit den Beobachtungsresultaten von Regnault, welche in Bezug auf die Verdichtung der Kohlensäure lange nicht so weit reichen, wie die von Andrews, eine genügende Uebereinstimmung statt. Ich glaube daher, dass diese Werthe der Constanten dem gegenwärtig vorhandenen Beobachtungsmaterial, welches gerade bei der Kohlensäure vollständiger ist, als bei irgend einem anderen Gase, mit hinlänglicher Genauigkeit entsprechen.

Was die anderen Gase anbetrifft, so kann man meiner Ansicht nach die allgemeine Gleichung (7) auch auf diese anwenden, muss aber natürlich die Constanten für jedes Gas besonders bestimmen.

Im Anschluss an das Vorige muss noch eine Frage erörtert werden, welche sich bei der Betrachtung der von

Andrews gezeichneten und von James Thomson vervollständigten Druckcurven aufdrängt.

Wenn ein Gas, z. B. Kohlensäure, bei einer unter der kritischen Temperatur liegenden Temperatur zusammengedrückt wird, so beginnt bei einem gewissen Volumen die Condensation, und es tritt damit ein Zustand ein, in welchem ein Theil des Stoffes flüssig und der andere gasförmig ist. So lange dieser Zustand bei der weitern Volumenverminderung fortdauert, bleibt der Druck constant und das entsprechende Stück der isothermischen Druckcurve ist somit eine horizontale gerade Linie. Neben dieser geraden Linie kann man sich, wie oben besprochen wurde, nach James Thomson noch eine andere isothermische Druckcurve denken, welche denjenigen Druck darstellt, der bei derselben Volumenänderung stattfinden würde, wenn diese in der Weise vor sich ginge, dass stets die ganze Menge des Stoffes sich in gleichem Zustande befände. Wenn diese letztere Art der Volumenänderung auch in der Wirklichkeit nicht stattfindet, weil die in ihr vorkommenden Gleichgewichtszustände zum Theil labil sind, so muss man sie doch als theoretisch möglich betrachten, und in der That stellt die letztere Druckcurve den durch unsere Formel bestimmten Druck dar.

Es fragt sich nun aber, in welcher Lage diese theoretische Druckcurve und die dem wirklichen Vorgange entsprechende horizontale gerade Linie sich zueinander befinden.

James Thomson hat sich darüber nicht ausgesprochen, sondern hat nur in der auf Taf. II, Fig. 1 wiedergegebenen Andrews'schen Figur zu den auf die Temperaturen 13,1° und 21,5° bezüglichen Druckcurven die dort punktirt gezeichneten Curvenstücke hinzugefügt. Diese sollen wahrscheinlich nur dazu dienen, eine ungefähre Vorstellung von der möglichen Gestalt und Lage der Curvenstücke zu geben. Als wirklich richtig können sie in dieser Form nicht gelten.

Maxwell geht in den ersten Auflagen seines Buches

„Theory of Heat“ p. 125 näher auf die Sache ein. Denkt man sich eine der stetig verlaufenden theoretischen Druckcurven, z. B. die zu der Temperatur 13,1° gehörige, gegeben und zeichnet die horizontale Gerade in verschiedenen Höhen hinein, so erhält man jedesmal zwei Punkte *a* und *e* als Endpunkte der Geraden. Die Differenz zwischen den beiden Werthen, welche die Energie des Stoffes in den diesen beiden Punkten entsprechenden Zuständen hat, ist für die verschiedenen Lagen der Geraden verschieden gross, und nun sagt Maxwell, diejenige Lage der Geraden, bei der diese Differenz ein Maximum sei, sei die richtige. In der vierten Auflage seines Buches aber ist diese Stelle geändert und die Lage der horizontalen Geraden unbestimmt gelassen. Man muss daher wohl annehmen, dass Maxwell seine frühere Ansicht über diesen Punkt später wieder aufgegeben hat.

Van der Waals sagt auf p. 121 seiner oben citirten Schrift: „Es hat mir nicht glücken wollen, in einer der Eigenschaften des gesättigten Dampfes ein Merkmal zu finden, durch welches festgestellt werden könnte, wo die (gerade) Linie durch die Isotherme gezogen werden muss.“

Hiernach darf wohl die Frage, welche Lage die den Druck des gesättigten Dampfes angebende horizontale Gerade in der isothermischen Druckcurve hat, als eine noch offene angesehen werden, und ich will mir erlauben, diejenige Beantwortung dieser Frage, welche sich mir bei der Betrachtung des Gegenstandes dargeboten hat, hier mitzutheilen.

Wenn man die für die Temperatur von 13,1° von Andrews gezeichnete und von J. Thomson vervollständigte Druckcurve betrachtet, so sieht man, dass sie von *m* bis *a* und weiterhin von *e* bis *n* einfach, dagegen zwischen *a* und *e* doppelt ist. Zwischen den beiden Zuständen des Stoffes, welche den Punkten *a* und *e* entsprechen, und welche wir kurz die Zustände *a* und *e* nennen wollen, gibt es also zwei Wege, auf welchen der Stoff aus dem einen in den andern übergehen kann. Der Uebergang kann auf jedem

dieser Wege unter ganz gleichen Umständen sowohl in der Richtung von a nach e, als auch in der Richtung von e nach a stattfinden, und die betreffenden Veränderungen sind somit beide als umkehrbar zu bezeichnen.

Denken wir uns nun, dass der Stoff auf dem durch die Curve $abcde$ dargestellten Wege von a nach e übergehe und auf dem durch die Gerade ea dargestellten Wege wieder von e nach a zurückkehre, so haben wir einen umkehrbaren Kreisprocess. Für die im Verlaufe desselben dem veränderlichen Stoffe von aussen her mitgetheilten positiven oder negativen Wärmemengen, deren Element dQ heissen möge, muss daher die bekannte Gleichung:

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

gelten. Da nun im gegenwärtigen Falle die Temperatur T constant ist, indem die Linien, welche den Kreisprocess graphisch darstellen, nur isothermische Linien für eine und dieselbe Temperatur sind, so vereinfacht sich die Gleichung in:

$$\int dQ = 0.$$

Die dem Stoffe mitgetheilten, theils positiven, theils negativen Wärmemengen heben sich also gegenseitig auf.

Daraus folgt weiter, dass auch die während des Kreisprocesses gethane, theils positive, theils negative äussere Arbeit sich aufheben muss. Die zu den beiden Abschnitten des Kreisprocesses gehörenden Ueberschüsse der positiven Arbeit über die negative werden durch die in der Figur vorkommenden Flächenräume dargestellt, und zwar stellt der über der Geraden liegende Flächenraum $cdec$ einen positiven, und der unter der Geraden liegende Flächenraum $abca$ einen negativen Ueberschuss dar. Diese beiden Flächenräume müssen somit, um für die Gesammtarbeit den Werth Null zu geben, unter einander gleich sein. Hierdurch ist, wenn die dem homogenen Zustande entsprechende theoretische Druckcurve gegeben ist, auch die Lage der dem wirklichen Verdampfungs- und Condensationsprocesse entsprechenden horizontalen geraden Linie bestimmt.

Man kann die vorstehende Bedingung folgendermassen als Satz aussprechen: Der Druck des gesättigten Dampfes ist so gross, dass die äussere Arbeit, welche bei der Verdampfung geleistet wird, gleich derjenigen ist, welche geleistet werden würde, wenn der Stoff bei derselben Volumenzunahme homogen bliebe. Man kann dieses auch noch etwas kürzer so fassen: Der Druck des gesättigten Dampfes ist gleich dem mittlern Drucke des homogen bleibenden Stoffes bei einer der vollständigen Verdampfung entsprechenden Volumenzunahme.

Die von J. Thomson für die Temperatur von 13,1° zwischen a und e gezeichnete Curve entspricht dieser Bedingung nicht, indem die Flächeninhalte der von ihr und der horizontalen Geraden gebildeten Figuren $abca$ und $cdec$ augenscheinlich ungleich sind. Um nun zu sehen, wie die Sache sich gestaltet, wenn man zur Bestimmung des Druckes die Gleichung (7) anwendet, habe ich für so viele zwischen a und e liegende Werthe von v die entsprechenden Werthe von p berechnet, dass daraus der Verlauf der Curve zwischen a und e zu ersehen ist. Die dabei erhaltenen Werthe sind, nebst den oben in Tabelle II schon einmal mitgetheilten Werthen von p, welche sich auf einige ausserhalb des Intervalls ae liegenden Werthe von v beziehen, in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

v	0,013 768	0,013 037	0,012	0,011	0,010	0,009	0,008
p	47,98	49,27	51,12	52,87	54,50	55,84	56,63

v	0,007	0,006	0,005	0,004	0,00350	0,00325	0,00300
p	56,38	54,28	49,00	38,83	32,05	28,83	26,53

v	0,00285	0,00275	0,00250	0,002 182 8	0,002 053 2
p	26,11	26,52	31,52	54,66	74,96

Unter Anwendung dieser Werthe erhält man eine Curve von der auf Taf. II Fig. 2 gegebenen Gestalt. Diese Curve entspricht der obigen Bedingung mit hinlänglicher Genauigkeit.

II. *Ueber eine Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Dichte der gesättigten Dämpfe von Wasser und einigen anderen Flüssigkeiten; von A. Winkelmann.*[1])

§ 10.

Um für die anderen Flüssigkeiten, welche in der Einleitung genannt sind, die aufgestellte Beziehung zu prüfen, ist es zunächst nothwendig, die den einzelnen Drucken entsprechende Temperatur zu bestimmen. Die Temperaturen, welche den Drucken von 1 bis 10 Atmosphären angehören, sind bereits von Zeuner[2]) für sämmtliche von mir untersuchte Flüssigkeiten angegeben; für kleinere Drucke habe ich die Temperaturen nach den Angaben Regnault's durch Interpolation berechnet.

Die Dichtigkeit der Dämpfe ist von Zeuner für die hier verlangten Drucke nicht direct bestimmt, indessen hat derselbe mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie nach den Regnault'schen Gleichungen für die Gesammtwärme der Verdampfung Formeln aufgestellt, welche die Dichte der Dämpfe zu berechnen gestatten. Zeuner hat nämlich den Werth von Apu durch die Gleichung:

$$\text{(VIII)} \qquad Apu = a + bt^2 + ct^2$$

als Function der Temperatur berechnet. Hier bezeichnet $u = s - \sigma$ die Differenz zwischen dem specifischen Volumen des Dampfes und dem specifischen Volumen der Flüssigkeit, aus der der Dampf hervorging, p den Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter, welchen der gesättigte Dampf bei der Temperatur t ausübt, und $\frac{1}{A} = 424$ das Arbeitsäquivalent für die Wärmeeinheit; a, b, c sind constante Grössen, welche von Zeuner bestimmt sind. Aus der Gleichung (VIII) lässt sich u für die verlangten Drucke

1) Fortsetzung von p. 208.

2) Zeuner, Grundzüge der mechan. Wärmetheorie. p. 254. 1866.

berechnen, und mittelst der Kenntniss von σ lässt sich dann die Dichtigkeit des Dampfes γ nach der Gleichung:

$$\gamma = \frac{1}{s} = \frac{1}{u + \sigma}$$

bestimmen.

Um die Dichte des Dampfes, bezogen auf Luft als Einheit, zu erhalten, hat man den Werth γ, welcher sich auf den Druck p und die Temperatur t bezieht, durch den Werth γ_1 zu dividiren, der durch die Gleichung:

$$\gamma_1 = \frac{p}{29{,}272\,(273 + t)}$$

gewonnen wird.

Diese Werthe der Dampfdichten $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ gründen sich auf die empirischen Formeln, welche Regnault für die Gesammtwärme angegeben hat. Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, sind aber die Regnault'schen Formeln nicht immer mit seinen Beobachtungen in genügender Uebereinstimmung, und daher habe ich neue Formeln für die Gesammtwärmen berechnet, welche später mitgetheilt werden. Um mit Hülfe dieser neuen Formeln die Dichte der Dämpfe zu erhalten, habe ich folgenden Weg eingeschlagen, welcher im § 9 für das Wasser schon angedeutet ist.

Möge die Gesammtwärme der Verdampfung, welche sich nach der Formel Regnault's bei der Temperatur t ergibt, mit λ_1, und welche sich nach meiner Formel ergibt, mit λ_2 dargestellt werden. Bezeichnet dann c die specifische Wärme der Flüssigkeit, aus der der Dampf hervorgeht, so erhält man die entsprechenden Verdampfungswärmen r_1 und r_2 durch die Gleichungen:

$$r_1 = \lambda_1 - \int^{t} c\,.\,dt, \qquad r_2 = \lambda_2 - \int_0^t c\,.\,dt.$$

Da nun nach der mechanischen Wärmetheorie:

$$\frac{r}{u} = A\,.\,T\,.\,\frac{dp}{dt}$$

nun in der That die Dampfdichten vom Aether, Chloroform und Schwefelkohlenstoff kleiner als die theoretisch berechnete Dampfdichte dieser Stoffe sich ergibt. Beim Aceton und Chlorkohlenstoff ist das Umgekehrte der Fall; hier werden die Dampfdichten grösser, als der theoretisch berechnete Werth, und auch grösser, als sie nach dem Verlaufe der übrigen Werthe sein können. Beim Aceton ergibt sich nämlich für die Dampfdichte bei 21,17° ein grösserer Werth als bei 37,32° und 56,32°; die beiden letzten Temperaturen entsprechen den Drucken von $^1/_2$ und 1 Atmosphäre, während die erstere Temperatur dem Drucke von $^1/_4$ Atmosphäre zukommt. Da die Dampfdichte, für jede Temperatur bezogen auf Luft als Einheit, mit abnehmender Temperatur jedenfalls nicht zunehmen kann, so wird man schliessen müssen, dass der bei 21,17° berechnete Werth der Dichte zu gross ist, oder dass die beiden anderen Werthe zu klein sind. Bei Chlorkohlenstoff ist das Verhalten ein ganz ähnliches, auch dort findet man bei den niedrigen Temperaturen grössere Werthe für die Dampfdichten als bei den nächst höheren Temperaturen. Bei den zuletzt betrachteten Flüssigkeiten, Aceton und Chlorkohlenstoff, konnte daher die von Regnault an der Gesammtwärme angebrachte Correction den Grund abgeben, warum die Dichten für die entsprechenden Dämpfe bei den unteren Temperaturen zu gross sich ergeben. Wie soll man aber erklären, dass bei den drei anderen Flüssigkeiten das Umgekehrte eintritt? Man wird zuerst geneigt sein, die Ursache dieser Erscheinung in der Schwierigkeit der experimentellen Untersuchung, mit der nothwendig eine gewisse Ungenauigkeit verbunden ist, zu suchen; ohne die Bedeutung dieses Umstandes zu verkennen, glaube ich doch, dass ein anderer Punkt, auf den auch schon Herwig hingewiesen hat, nicht zu übersehen ist.

Regnault hat nämlich die Dichte der Dämpfe im ungesättigten Zustande nicht bestimmt, und daher ist es fraglich, ob dieselben wirklich jene chemische Zusammensetzung hatten, welche bei der Berechnung der theoreti-

schen Dampfdichte vorausgesetzt wird. Da diese Frage jedenfalls nicht unbedingt zu bejahen ist, so ist es auch zweifelhaft, ob die Werthe der mechanischen Wärmetheorie für die Dampfdichten in niedrigen Drucken wirklich kleiner als jene sind, welche die thatsächlich von Regnault untersuchten Flüssigkeiten bei einer Untersuchung als überhitzte Dämpfe gezeigt haben würden.

Ich bedaure es lebhaft, dass die Dichten der überhitzten Dämpfe nicht von Regnault bestimmt wurden; da gerade diese Dichte in der von mir aufgestellten Beziehung von Bedeutung ist, würde ich für die letztere durch eine solche Bestimmung eine viel sicherere Grundlage der Berechnung gefunden haben. Es blieb mir bei diesem Mangel aber nichts anderes übrig, als die theoretisch bestimmte Dampfdichte als Werth für die Dampfdichte der überhitzten Dämpfe einzusetzen und somit anzunehmen, dass die von Regnault untersuchten Flüssigkeiten wirklich jene Zusammensetzung besassen, welche der chemischen Formel entspricht.

§ 11.

Im Folgenden gebe ich für jede Flüssigkeit, resp. jeden Dampf zwei Tabellen, deren Einrichtung leicht erkennbar ist.

In den beiden vorderen Reihen der ersten Tabelle finden sich Druck und Temperatur, wie sie den Beobachtungen Regnault's entsprechen.

Die dritte Reihe enthält die Temperatur, welche nach der von mir aufgestellten Beziehung berechnet ist.

Die vierte Reihe gibt die Differenz der beobachteten und berechneten Temperaturen an.

Die fünfte Reihe enthält die Dichte d_n des gesättigten Dampfes bezogen auf Luft als Einheit, welche zur Berechnung der Temperatur t_n nach der schon genannten Beziehung gedient hat.

Die sechste und siebente Reihe enthalten die Ver-

dampfungswärmen r_1 und r_2, welche nach der Formel von Regnault und von mir berechnet sind; die Werthe meiner Formel haben dazu gedient, um die Dichte d_n zu berechnen.

Die achte Reihe stellt endlich die specifischen Volumina der Flüssigkeit für die in der ersten Reihe angegebenen Temperaturen dar, welche ebenfalls bei der Berechnung der Dichte zur Verwendung kamen.

Die zweite Tabelle bei jeder Flüssigkeit bezieht sich auf die Gesammtwärmen der Verdampfung, welche von Regnault beobachtet wurden. Die erste und zweite Reihe enthalten die Beobachtungen Regnault's, die dritte und vierte Reihe die nach der Formel von Regnault und von mir berechneten Werthe der Gesammtwärmen; die beiden letzten Reihen geben die Differenzen der Berechnung gegenüber der Beobachtung.

Aether. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes	Verdampfungswärmen nach		Specifisches
	beobachtet	berechnet	Differenz	d_n	Regnault r_1	Winkelm. r_2	Volumen
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1/8	−13,86	14,28	+0,42	2,562	—	—	—
1/4	0,50	0,62	−0,12	2,562	93,96	93,45	0,00136
1/2	16,70	16,98	−0,28	2,562	92,45	91,56	0,00138
1	34,96	34,96	±0,00	2,5960	90,20	89,11	0,00143
2	55,87	55,27	+0,60	2,6335	86,92	86,88	0,00148
3	69,61	69,08	+0,53	2,7061	84,38	83,54	0,00152
4	80,21	79,60	+0,61	2,7464	82,19	81,58	0,00156
5	88,96	88,40	+0,56	2,7773	80,13	79,88	0,00159
6	96,47	96,06	+0,38	2,8099	78,45	78,38	0,00162
7	103,08	102,89	+0,19	2,8363	76,81	77,00	0,00164
8	109,00	109,01	−0,01	2,8599	75,27	75,73	0,00166
9	114,37	114,62	−0,25	2,8811	73,82	74,54	0,00168
10	119,39	119,79	−0,40	2,8993	72,42	73,41	0,00170

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (166{,}14 + 34{,}96)\, n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - 166{,}14$$

berechnet.

Für d ist der constante Werth 2,652, welcher der theoretischen Dichte éntspricht, einzusetzen; A ist, wie beim Wasser, $= 0{,}13507$.

Bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre ist die theoretische Dichte 2,562, wie aus der fünften Reihe ersichtlich ist, zur Berechnung der Temperaturen eingeführt. Bei dem Drucke von $^1/_8$ Atmosphäre, entsprechend der Temperatur $-13{,}86^0$, war nämlich die Berechnung der Dichte nicht möglich, ohne das Intervall der Beobachtungen zu überschreiten, da die Gesammtwärmen der Verdampfung nur bis $-3{,}7^0$ beobachtet wurden. Für die beiden anderen Drucke wurden folgende Werthe für die Dichte gefunden:

2,547 bei $\frac{1}{4}$ Atmosphäre,
2,557 „ $\frac{1}{2}$ „

Beide Werthe sind kleiner als die theoretische Dampfdichte 2,562 und waren daher nicht anwendbar.

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen bestimmt, in denen r_1 sich auf die Formel von Regnault und r_2 auf jene von mir bezieht.

$$r_1 = 94{,}00 - 0{,}07901\,t - 0{,}000\,851\,4\,t^2$$
$$r_2 = 93{,}50 - 0{,}1082\,t - 0{,}000\,503\,3\,t^2$$

Das specifische Volumen ist nach den Beobachtungen Hirn's durch folgende Gleichung berechnet:

$$v_t = v_0 (1 + a t + b t^2 - c t^3 + d t^4),$$

in welcher:

$\log a = 0{,}12997 - 3$ $\qquad \log c = 0{,}53769 - 8$
$\log b = 0{,}81651 - 6$ $\qquad \log d = 0{,}52853 - 10$ ist.

Die Differenzen in der vierten Reihe zeigen eine solche Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung, dass $0{,}61^0$ nicht überschritten wird. Nach Mittheilung der betreffenden Tabellen für die anderen Flüssigkeiten werde ich auf die vorhandenen Differenzen nochmals zurückkommen.

Aether. Tabelle II.

Temperatur 1.	Gesammtwärmen beobachtet 2.	berechnet von Regnault 3.	berechnet von Winkelmann 4.	Differenz von 2 u. 3	Differenz von 2 u. 4
−3,7	92,235	92,328	91,840	−0,093	+0,395
7,51	95,370	97,348	96,649	−1,978	−1,279
12,90	97,282	99,713	98,895	−2,431	−1,613
15,50	98,801	100,841	99,973	−2,040	−1,174
17,15	101,278	101,554	100,657	−0,276	+0,621
21,95	104,366	103,609	102,638	+0,657	+1,628
34,83	109,117	109,000	107,905	+0,117	+1,212
90,05	128,900	130,017	129,706	−1,117	−0,806
93,85	130,880	131,339	131,165	−0,459	−0,285
108,80	138,196	136,384	136,848	+1,812	+1,248
120,90	140,781	140,285	141,334	+0,496	−0,553
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				1,04	0,98
„ „ mit „ „ „ „				−0,48	−0,05

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet, in denen sich λ_1 auf die Formel Regnault's und λ_2 auf meine Formel bezieht.

$$\lambda_1 = 94{,}00 + 0{,}45000\,t - 0{,}000\,555\,6\,t^2$$
$$\lambda_2 = 93{,}50 + 0{,}42083\,t - 0{,}000\,208\,3\,t^2$$

Aus den Differenzen in den beiden letzten Reihen der obigen Tabelle erkennt man, dass meine Formel sich den Beobachtungen Regnault's besser anschliesst als die von Regnault selbst aufgestellte Formel; ohne Rücksicht auf das Vorzeichen sind die mittleren Differenzen nicht sehr verschieden, mit dieser Rücksicht ist bei meiner Formel die mittlere Differenz fast zehnmal so klein als bei der Regnault'schen Formel.

Aceton. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos. 1.	Temperaturen des ges. Dampfes beobachtet 2.	Temperaturen des ges. Dampfes berechnet 3.	Differenz 4.	Dichte des ges. Dampfes d_n 5.	Verdampfungswärmen nach Regnault r_1 6.	Verdampfungswärmen nach Winkelm. r_2 7.	Specifisches Volumen 8.
1/4	21,17	20,94	+0,23	2,008	137,13	134,19	0,0012
1/2	37,32	37,43	−0,11	2,0465	134,01	129,94	0,00129
1	56,32	56,32	±0,00	2,0542	129,73	125,03	0,00134
2	78,03	77,52	+0,51	2,0923	124,01	119,56	0,00138
3	92,30	91,54	+0,76	2,1244	119,81	116,05	0,00141

Aceton. Tabelle I. (Fortsetzung.)

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes	Verdampfungswärmen nach		Specifisches Volumen
	beobachtet	berechnet	Differenz	d_n	Regnault r_1	Winkelm. r_2	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
4	103,26	102,37	+0,89	2,1521	116,31	113,38	0,00145
5	112,30	111,55	+0,75	2,1830	113,27	111,23	0,00147
6	120,08	119,50	+0,58	2,2082	110,53	109,39	0,00149
7	126,95	126,63	+0,32	2,2323	108,03	107,80	0,00151
8	133,15	133,15	±0,00	2,2548	105,68	106,35	0,00153
9	138,81	139,15	−0,34	2,2753	103,49	105,05	0,00155
10	144,05	144,65	−0,60	2,2924	101,41	103,85	0,00157

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (150{,}89 + 56{,}32)\, n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - 150{,}89$$

berechnet.

Für d ist der constante Werth 2,008, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen. A ist, wie beim Wasser, $= 0{,}13507$.

Bei dem Drucke von $^1/_4$ Atmosphäre ist die theoretische Dichte zur Berechnung der Temperatur eingeführt. Die Berechnung nach der mechanischen Wärmetheorie ergab den Werth 2,0585, welcher grösser ist als die beiden Werthe 2,0465 und 2,0542, die den Drucken von $^1/_2$, resp. 1 Atmosphäre entsprechen; es wurde daher der Werth 2,0585 verworfen.

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 140{,}5 - 0{,}13999\, t - 0{,}000\,912\,5\, t^2$$
$$r_2 = 139{,}9 - 0{,}27287\, t + 0{,}000\,157\,1\, t^2$$

Das specifische Volumen ist nach den Beobachtungen von Kopp durch folgende Gleichung bestimmt:

$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 + ct^3),$$

wo $\log a = 0{,}12969 - 3, \qquad \log b = 0{,}41647 - 6,$
$$\log c = 0{,}06296 - 8.$$

Die Differenzen in der vierten Reihe zeigen im Maximum den Werth 0,89°.

Aceton. Tabelle II.

Temperatur	Gesammtwärmen			Differenz von	
	beobachtet	berechnet von Regnault	berechnet von Winkelmann	2 u. 3	2 u. 4
1.	2.	3.	4.		
−3,1	137,54	139,37	139,12	−1,83	−1,58
8,1	140,73	143,43	141,83	−2,70	−1,10
21,0	148,21	147,96	145,04	+0,25	+3,17
56,3	153,65	159,50	154,80	−5,85	−1,15
56,8	159,74	159,65	154,95	+0,09	+4,79
86,7	169,85	168,39	164,29	+1,46	+5,56
115,7	168,47	175,91	174,33	−7,44	−5,86
131,3	177,78	179,72	180,10	−1,94	−2,32
146,9	186,21	183,20	186,17	+3,01	+0,04
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				2,73	2,84
„ „ mit „ „ „ „				−1,65	+0,17

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 140{,}5 + 0{,}36644\,t - 0{,}000\,516\,t^2$$
$$\lambda_2 = 139{,}9 + 0{,}23356\,t + 0{,}000\,553\,58\,t^2.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man, dass, während bei Regnault das dritte Glied der Gleichung ein negatives Vorzeichen besitzt, bei meiner Formel dasselbe positiv auftritt. Die Differenzen in den beiden letzten Reihen beweisen aber zur Genüge, dass meine Formel sich den Beobachtungen besser anschliesst; die grosse, positive Differenz 3,01, welche sich bei Regnault für den letzten Werth findet, weist darauf hin, dass eine Formel mit positivem Gliede den Beobachtungen besser entspricht. Auch hier ist die mittlere Differenz mit Rücksicht auf das Vorzeichen, ebenso wie beim Aether, nach Regnault's Formel fast zehnmal so gross als nach meiner Formel. Die mittlere Abweichung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen ist nach beiden Formeln recht gross; die Ursache hiervon ist die, dass für nahe zusammenliegende Temperaturen (56,3° und 56,8°) sehr verschiedene Werthe (153,6 und 159,7) gefunden wurden, und dass ferner für weit voneinander entfernte Temperaturen (86,7° und 115,7°) Werthe beobachtet wurden (169,8 und 168,4), die nicht einmal dem Sinne der Temperaturänderung entsprechen.

Chloroform. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes	Verdampfungswärmen nach		Specifisches
	beobachtet	berechnet	Differenz	d_n	Regnault r_1	Winkelm. r_2	Volumen
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$^1/_4$	23,79	20,84	+2,95	4,138	64,72	64,90	0,000 65
$^1/_2$	40,67	39,59	+1,08	4,138	63,04	63,28	0,000 65
1	60,18	60,18	±0,00	4,1460	61,11	61,35	0,000 713
2	82,59	83,24	−0,65	4,2003	58,83	58,98	0,000 743
3	97,55	98,14	−0,59	4,2535	57,27	57,21	0,000 766
4	109,04	109,49	−0,45	4,2864	56,05	55,99	0,000 786
5	118,56	118,92	−0,36	4,3232	55,05	54,87	0,000 804
6	126,78	127,02	−0,24	4,3556	54,15	53,88	0,000 820
7	134,08	134,20	−0,12	4,3860	53,37	52,99	0,000 835
8	140,66	140,68	−0,02	4,4144	52,63	52,17	0,000 850
9	146,70	146,62	+0,08	4,4432	52,00	51,39	0,000 864
10	152,34	152,13	+0,21	4,4681	51,37	50,67	0,000 877

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (170{,}22 + 60{,}18)\, n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - 170{,}22$$

berechnet.

Für d ist der constante Werth 4,138, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen. A ist, wie beim Wasser, $= 0{,}13507$.

Bei den Drucken von $^1/_2$ und $^1/_4$ Atmosphäre ist die theoretische Dichte zur Berechnung der Temperaturen eingeführt, weil sich hier Werthe ergaben, welche kleiner als die theoretische Dichte sind, nämlich bei dem Drucke

von $^1/_2$ Atmosphäre 4,1186
" $^1/_4$ " 4,1108

Die Verdampfungswärmen wurden nach den folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 67{,}00 - 0{,}09485\, t - 0{,}000\,050\,7\, t^2$$
$$r_2 = 67{,}00 - 0{,}08519\, t - 0{,}000\,144\,4\, t^2$$

Das specifische Volumen ist bei Drucken unterhalb 1 Atmosphäre constant $= 0{,}00065$ gesetzt, oberhalb dieser Drucke wurde dasselbe nach Beobachtungen von Pierre durch folgende Gleichung bestimmt:

$$v_t = v_0 (1 + a t + b t^2 + c t^3),$$

wo $\log a = 0{,}04420 - 3$ $\log b = 0{,}66885 - 6$
$\log c = 0{,}24130 - 8$.

Die Differenzen der vierten Reihe zwischen den beobachteten und berechneten Temperaturen sind oberhalb des Druckes von 1 Atmosphäre nur gering und überschreiten nirgends 0,65°; unterhalb dieses Druckes werden die Differenzen aber sehr beträchtlich und erreichen bei 23,79° fast 3°, auf diese werden wir später zurückkommen.

Chloroform. Tabelle II.

Temperatur	Gesammtwärmen			Differenz von	
	beobachtet	berechnet von Regnault	berechnet von Winkelmann		
1.	2.	3.	4.	2 u. 3	2 u. 4
−5,4	66,07	66,26	66,21	−0,19	−0,14
6,0	68,06	67,82	67,88	+0,24	+0,18
11,6	68,43	68,59	68,70	−0,16	−0,27
15,7	69,33	69,16	69,29	+0,17	+0,04
23,0	71,46	70,17	70,34	+1,29	+1,12
41,1	73,44	72,65	72,89	+0,79	+0,55
60,3	76,33	75,29	75,55	+1,04	+0,80
87,6	77,98	79,05	79,15	−1,07	−1,23
109,4	81,90	82,04	81,88	−0,14	+0,02
121,2	85,27	83,67	83,46	+1,60	+1,81
134,5	84,688	85,49	85,10	−0,80	−0,41
137,7	85,106	85,93	85,49	−0,82	−0,38
159,0	86,866	88,86	87,83	−2,00	−0,97
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				0,78	0,64
„ „ mit „ „ „ „				−0,01	+0,08

Die. Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 67{,}00 + 0{,}1375\,t$$
$$\lambda_2 = 67{,}00 + 0{,}14716\,t - 0{,}000\,093\,7\,t^2$$

Regnault stellt die Gesammtwärme durch eine Formel mit nur zwei Constanten dar, während meine Formel drei Constanten enthält. Chloroform ist ausser dem Wasser die einzige Flüssigkeit, für welche Regnault die Gesammtwärme durch eine gerade Linie dargestellt hat. Eine genauere Untersuchung lässt indess erkennen, dass derselbe wohl nur durch ein Versehen beim Chloroform hierzu geführt wurde.

Regnault gibt nämlich in seinen Beobachtungen für den letzten Werth der Gesammtwärme bei der Temperatur 159,0° nicht den Werth 86,866, welcher sich in obiger Tabelle findet, an, sondern statt dessen 89,866. Es lässt sicht aber zeigen, dass hier ein Fehler in der Berechnung vorliegt, und dass der richtige Werth in der That 86,866 ist. Der von Regnault angegebene Mittelwerth 89,866 ist aus Série X p. 842, und zwar aus den Werthen für X, nämlich:

86,587; 85,458; 86,554

abgeleitet. Das Mittel dieser Werthe ist indessen nicht:

89,866, sondern 86,166.

Untersucht man nun aber die einzelnen Werthe von X, so findet man, dass der zweite Werth 85,458 nicht richtig aus dem Werthe $\lambda = 81,359$ berechnet ist, sondern dass unter Annahme von 81,359 für λ sich 87,458 für X ergibt; somit sind die drei richtigen Werthe von X die folgenden:

86,587; 87,458; 86,554.

Das Mittel aus diesen Beobachtungen ist nun 86,866, und dieser Werth ist statt des Werthes 89,866, welchen Regnault berechnet hat, einzusetzen.

Regnault bemerkt dann p. 849 über die Gesammtwärme des Chloroform: „En portant sur une feuille quadrillée les points, qui sont donnés par les coordonnées de ce tableau, on reconnait, qu'ils ne représentent pas une courbe continue, comme ceux, qui sont fournis par les expériences faites sur les autres substances volatiles. On pouvait s'y attendre à cause de la non-homogénéité de la substance; les points oscillent autour d'une lingue droite . . . . . dont ils s'éloignent d'ailleurs très-peu.“

Berücksichtigt man aber, dass der letzte Werth für die Temperatur 159,0° nicht 89,866, sondern 86,866 ist, so sieht man, dass eine gerade Linie die Beobachtungen nicht gut darstellt, sondern eine Formel mit drei Constanten zu Hülfe zu nehmen ist.

Chlorkohlenstoff. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes	Verdampfungswärmen nach		Specifisches Volumen
	beobachtet	berechnet	Differenz	d_n	Regnault r_1	Winkelm. r_2	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$^1/_{16}$	6,69	4,69	+2,00	5,332	51,64	51,72	0,000 61
$^1/_8$	20,86	20,20	+0,66	5,332	50,81	51,04	0,000 61
$^1/_4$	36,84	37,31	−0,47	5,3381	49,74	49,95	0,000 61
$^1/_2$	55,26	55,67	−0,41	5,4132	48,34	48,25	0,000 61
1	76,52	76,52	±0,00	5,5426	46,50	45,94	0,000 674
2	101,37	100,96	+0,41	5,7533	44,06	43,05	0,000 695
3	117,90	117,58	+0,32	5,9035	42,25	41,14	0,000 716
4	130,50	130,08	+0,42	5,9622	40,78	39,78	0,000 731
5	141,18	141,19	−0,01	6,0777	39,47	38,74	0,000 745
6	150,19	150,14	+0,05	6,1193	38,31	37,95	0,000 756
7	158,12	157,77	+0,35	6,1379	37,25	37,34	0,000 768

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (153,45 + 76,52)\, n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - 153,45$$

berechnet.

Für d ist der constante Werth 5,332, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen. A ist wie beim Wasser $= 0,13507$.

Bei den Drucken von $^1/_{16}$ und $^1/_8$ Atmosphäre ist die theoretische Dichte zur Berechnung der Temperatur eingeführt, weil die Berechnung folgende Werthe lieferte:

5,4840 bei dem Drucke von $^1/_{16}$ Atmosphäre,
5,3774 „ „ „ „ $^1/_8$ „

Beide Werthe sind grösser als die Dichte bei dem Drucke von $^1/_4$ Atmosphäre, und der erste ist auch grösser als die Dichte bei dem Drucke von $^1/_2$ Atmosphäre; daher müssen diese Werthe unrichtig sein, wenn jene bei den höheren Drucken als richtig angenommen werden.

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 52,0 - 0,05173\, t - 0,000\,262\,6\, t^2$$
$$r_2 = 51,90 - 0,01931\, t - 0,001\,050\,5\, t^2 + 0,000\,003\,733\, t^3$$

Das specifische Volumen ist bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre constant gleich 0,00061 gesetzt, oberhalb die-

ses Druckes ist dasselbe nach Hirn durch die folgende Gleichung:

$$v_t = v_0\,(1 + at + bt^2 - ct^3 + dt^4)$$

bestimmt, wo:

$$\log a = 0{,}02824 - 3 \qquad \log c = 0{,}17435 - 8$$
$$\log b = 0{,}55206 - 6 \qquad \log d = 0{,}93034 - 11.$$

Die Differenzen der dritten Reihe zwischen den beobachteten und berechneten Temperaturen sind gering mit Ausnahme der ersten Differenz 2,00, welche sich bei dem kleinsten Drucke zeigt; dieselbe Erscheinung wurde auch beim Chloroform hervorgehoben. Die Temperaturen sind in der obigen Tabelle nicht weiter als bis zu dem Drucke von 7 Atmosphären geführt, weil die Beobachtungen Regnault's nicht weiter reichen.

Chlorkohlenstoff. Tabelle II.

Temperatur	Gesammtwärmen			Differenz von	
	beobachtet	berechnet von			
1.	2.	Regnault 3.	Winkelmann 4.	2 u. 3	2 u. 4
8,0	52,42	53,16	53,28	−0,74	−0,84
20,1	54,62	54,87	55,13	−0,25	−0,51
34,2	56,89	56,80	57,03	+0,09	−0,14
45,0	58,69	58,23	58,34	+0,46	+0,35
57,3	60,60	59,84	59,69	+0,76	+0,91
76,4	62,30	62,17	61,61	+0,13	+0,71
126,9	66,87	67,79	66,73	−0,92	+0,14
155,2	70,24	70,46	70,47	−0,22	−0,23
162,9	71,12	71,26	71,67	−0,14	−0,55
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				0,41	0,49
„ „ mit „ „ „ „				−0,09	−0,02

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 52{,}0 \;\; + 0{,}14625\,t - 0{,}000\,172\,t^2$$
$$\lambda_2 = 51{,}90 + 0{,}17867\,t - 0{,}000\,959\,9\,t^2 + 0{,}000\,003\,733\,t^2$$

Die Differenzen in den beiden letzten Reihen zeigen keine besonderen Unterschiede; die mittleren Differenzen sind nach beiden Formeln nahezu gleich. Ich habe hier nur deshalb eine neue Formel, welche sich ebenso gut wie die Regnault'sche den Beobachtungen anschliesst, aufgestellt,

um für die Dichten Werthe zu erhalten, welche für die zu berechnenden Temperaturen geringere Abweichungen zeigen.

Schwefelkohlenstoff. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes	Verdampfungswärmen nach		Specifisches Volumen
	beobachtet	berechnet	Differenz	d_n	Regnault r_1	Winkelm. r_2	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$^1/_8$	−6,37	−6,22	−0,15	2,631	90,60	89,91	0,00077
$^1/_4$	8,90	9,66	−0,76	2,631	89,17	88,83	0,00077
$^1/_2$	26,38	27,03	−0,65	2,6424	87,30	87,07	0,00077
1	46,25	46,25	±0,00	2,7045	84,82	84,49	0,00082
2	69,25	68,55	+0,70	2,7821	81,45	80,85	0,00084
3	84,45	83,55	+0,90	2,8457	78,95	78,22	0,00086
4	96,17	95,44	+0,73	2,9043	76,95	76,11	0,00087
5	105,86	105,18	+0,68	2,9407	75,02	74,35	0,00088
6	114,21	113,91	+0,30	2,9836	73,37	72,83	0,00089
7	121,59	121,59	±0,00	3,0168	71,85	71,49	0,00090
8	128,25	128,54	−0,29	3,0445	70,43	70,29	0,00091
9	134,34	134,90	−0,56	3,0697	69,11	69,23	0,00092
10	139,97	140,72	−0,75	3,0906	67,84	68,25	0,00093

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (168,03 + 46,25)\, n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - 168,03$$

berechnet.

Für d ist dann der constante Werth 2,631, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen. A ist, wie beim Wasser, = 0,13507.

Bei den Drucken von $^1/_8$ und $^1/_4$ Atmosphäre ist die theoretische Dichte 2,631 zur Berechnung der Temperatur eingeführt; bei diesen Drucken ergab die Rechnung Werthe, welche kleiner als die theoretische Dichte sind, nämlich:

2,6306 bei $^1/_8$ Atmosphäre
2,6286 „ $^1/_4$ „

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 90,00 - 0,08922\, t - 0,000\,493\,8\, t^2$$
$$r_2 = 89,50 - 0,06530\, t - 0,001\,097\,6\, t^2 + 0,000\,003\,424\,5\, t^3.$$

Das specifische Volumen ist bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre gleich 0,00077 gesetzt; oberhalb

dieses Druckes ist dasselbe nach den Beobachtungen von Hirn durch folgende Gleichung bestimmt:

$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4)$$

$$\text{wo } \log a = 0{,}06744 - 3 \qquad \log c = 0{,}90950 - 10$$
$$\log b = 0{,}21722 - 6 \qquad \log d = 0{,}78494 - 11.$$

Die Differenzen in der vierten Reihe zwischen den beobachteten und berechneten Temperaturen zeigen, dass die grösste Differenz 0,90° ist, und dass im übrigen dieselben mehrfach bis zu 0,7° reichen.

Schwefelkohlenstoff. Tabelle II.

Temperatur	Gesammtwärmen			Differenz von	
	beobachtet	berechnet von Regnault	berechnet von Winkelmann	2 u. 3	2 u. 4
1.	2.	3.	4.		
−0,25	89,29	90,04	89,54	−0,75	−0,25
8,70	89,70	91,24	90,94	−1,54	−1,24
14,75	90,64	92,06	91,80	−1,42	−1,16
21,60	91,63	92,96	92,72	−1,33	−1,09
23,90	91,87	93,42	93,02	−1,55	−1,15
46,60	96,80	95,91	95,55	+0,89	+1,25
75,60	98,93	98,69	98,02	+0,24	+0,91
93,00	99,16	100,43	99,70	−1,27	−0,54
101,80	100,59	100,59	99,88	±0,00	+0,71
111,80	100,88	101,17	100,59	−0,29	+0,29
123,30	101,56	101,73	101,42	−0,17	+0,13
142,80	102,48	102,44	103,02	+0,04	−0,54
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				0,79	0,77
" " mit " " " "				−0,60	−0,22

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach den folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 90{,}0 + 0{,}14601\, t - 0{,}000\,412\,3\, t^2$$
$$\lambda_2 = 89{,}5 + 0{,}16993\, t - 0{,}001\,016\,1\, t^2 + 0{,}000\,003\,424\,5\, t^3.$$

Aus den Differenzen der beiden letzten Reihen sieht man, dass meine Formel die Beobachtungen besser darstellt, als die Regnault'sche Formel; die grössten Differenzen bei Regnault sind entschieden grösser, als die grössten Differenzen nach meiner Formel, und es ist ferner die mittlere Differenz mit Rücksicht auf das Vorzeichen nach meiner Formel nur etwa $^1/_3$ von jener bei Regnault.

§ 12.

Nachdem im Vorstehenden die Resultate der Berechnung mitgetheilt sind, ist die Frage zu beantworten, ob die Differenzen, welche sich zwischen den beobachteten und den nach meiner Beziehung berechneten Werthen der Temperatur bei verschiedenen Drucken ergeben haben, durch Beobachtungsfehler erklärt werden können. Ich glaube, bei dieser Untersuchung von dem Wasser absehen zu dürfen, da durch die Tabelle X bewiesen ist, dass die Unterschiede von Beobachtung und Berechnung im Mittel nur 0,05° betragen, also äusserst geringfügig sind. Das Wasser bietet auch einen besondern Vortheil gegenüber den anderen Flüssigkeiten dadurch dar, dass die Ausgangstemperatur 100°, welche dem Drucke einer Atmosphäre entspricht, nicht durch Beobachtung gefunden ist, sodass der Gedanke einer fehlerhaften Bestimmung hier ganz ausgeschlossen ist. Aus den Formeln, welche ich für die anderen Flüssigkeiten aufgestellt habe, ebenso wie aus den entsprechenden Tabellen ersieht man, dass dieselben die von Regnault für den Druck von einer Atmosphäre ermittelten Temperaturen als richtig angenommen haben, obschon für diesen Druck nicht mehr Beobachtungen und infolge dessen auch keine grössere Sicherheit in der Bestimmung der Temperatur vorliegen, als bei anderen Drucken. Ein Fehler in dieser Temperatur macht sich aber auch für die Temperaturberechnung bei anderen Drucken geltend.

Um über die vorhandenen Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung ein sicheres Urtheil zu gewinnen, hat man zwei Grössen besonders zu betrachten: zunächst die Dichtigkeit des Dampfes und damit den Einfluss, welchen dieselbe auf die Berechnung der Temperatur ausübt, ferner die den einzelnen Drucken entsprechenden Temperaturen selbst, insofern bei Beobachtung derselben Fehler möglich sind.

Was die erste Grösse betrifft, so hängt diese, wie schon erwähnt wurde, von der Gesammtwärme der Verdampfung der Flüssigkeit und ferner von der specifischen Wärme der

letztern ab, da zur Bestimmung der Verdampfungswärme die specifische Wärme verwandt wird. Die beiden anderen Umstände, welche für die Berechnung der Dichte von Belang sind, nämlich der Zusammenhang von Druck und Temperatur einerseits und die Grösse des Arbeitsäquivalents der Wärmeeinheit andererseits, will ich hier ausser Betracht lassen, da sie für unsere Frage ohne grössere Bedeutung sind.

Die Gesammtwärme der Verdampfung ist mit einer solchen Genauigkeit bestimmt, dass, wie aus den mitgetheilten Tabellen hervorgeht, die mittlere Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung 0,8 bis 1,6 Proc. beträgt. Da die Verdampfungswärmen kleiner als die Gesammtwärmen der Verdampfung sind, so haben die ersteren, einzig infolge der Ungenauigkeit der Gesammtwärmen, einen noch grössern procentigen Fehler. Ein Fehler von 1 Proc. in der Verdampfungswärme zieht nun einen fast gleich grossen Fehler in der Dichte nach sich, und dieser hat einen verschiedenen Einfluss auf die Temperaturbestimmung, wie wir am Schlusse dieses Paragraphen zeigen werden.

Ein anderer Punkt für die Fehlerbestimmung in der Dampfdichte, auf den meiner Ansicht nach bisher zu wenig Gewicht gelegt ist, ist in der specifischen Wärme der Flüssigkeit begründet. Diese specifischen Wärmen sind von Regnault nur in den tieferen Temperaturen, etwa bis zu den normalen Siedepunkten der Flüssigkeiten bestimmt, und man geht daher schon aus dem Rahmen der Beobachtungen hinaus, wenn man die specifische Wärme in den höheren Temperaturen aus den Beobachtungen Regnault's berechnet. Es geschieht dies aber, sobald man für Drucke, die grösser als 1 Atmosphäre sind, aus den Gesammtwärmen die Verdampfungswärmen ableitet. Dazu kommt noch, dass die Beobachtungen Regnault's für die specifischen Wärmen nicht zahlreich sind, und ferner, dass diese wenigen Beobachtungen nicht immer gleichmässig zur Berechnung der specifischen Wärme und der Abhängigkeit der letztern von der Temperatur benutzt worden sind. Um

dieses Urtheil zu begründen und die Genauigkeitsgrenze festzuhalten, welche von Regnault erreicht worden, werde ich die einzelnen Flüssigkeiten an der Hand der Regnault'schen Beobachtungen betrachten.

1. Aether.[1]) Bei demselben liegen vier Beobachtungen vor, welche die mittlere specifische Wärme zwischen den Temperaturen:

I.	II.	III.	IV.
– 29,80	– 24,33	32,05	31,94
7,65	5,89	6,71	5,31

liefern. Von diesen werden die Beobachtungen I einerseits und der Mittelwerth von III und IV andererseits benutzt, um in der Gleichung:

$$Q = A \,.\, t + B \,.\, t^2$$

(wo Q die Wärme bezeichnet, welche nothwendig ist, um die Gewichtseinheit von 0^0 bis t^0 zu erwärmen) die beiden Constanten A und B zu berechnen. Regnault erhielt:

$$A = 0{,}52899 \qquad B = 0{,}000\,295\,9.$$

Der Werth II ist bei dieser Berechnung unbenutzt geblieben; würde man nun statt des Werthes I diesen Werth II zur Bestimmung der Constanten benutzen, so erhielte man:

$$A' = 0{,}53142 \qquad B' = 0{,}000\,232\,1.$$

Diese Constanten zeigen zwar nur geringe Unterschiede gegenüber den von Regnault erhaltenen Werthen, indessen ist der Einfluss dieses Unterschiedes in höheren Temperaturen nicht unbedeutend. Wählt man die Temperatur 119,39°, welche einem Drucke von 10 Atmosphären beim Aetherdampf entspricht, so erhält man nach der Berechnung von Regnault:

$$Q = 67{,}380;$$

und nach der zweiten Berechnung mittelst A' und B':

$$Q' = 66{,}761.$$

Mit dem ersten Werthe wird die Dichte des Aetherdampfes bei 119,39°: 2,8990,

1) Regnault, Mém. de l'Acad., **26.** p. 275.

und mit dem zweiten Werthe:

2,8751.

Der Werth 2,8990 für die Dichte bei 119,39 ist jener, welcher in der Formel zur Berechnung der Temperatur eingeführt ist und die Temperatur 120,05° geliefert hat; nimmt man jetzt den Werth 2,8751 für die Dichte und berechnet nach derselben Formel die Temperatur, so erhält man 119,21°. Dieses Resultat zeigt, welchen Einfluss die specifische Wärme der Flüssigkeit bei der Berechnung der Dichte des Dampfes ausübt, und welche Bedeutung die letztere auf die Temperaturbestimmung hat.

Der Grund, warum Regnault nicht auch die Beobachtung II zur Bestimmung der specifischen Wärme des Aethers verwerthet hat, scheint der zu sein, dass die beiden Temperaturen —29,80° und —24,33 in den beiden ersten Beobachtungen um mehrere Grade auseinander liegen. Es ist dieser Grund zwar nicht von Regnault selbst angegeben, eine Vergleichung der Rechnungsweise bei den verschiedenen Flüssigkeiten lässt denselben aber vermuthen. Es ist einleuchtend, dass man sehr wohl beide Beobachtungen I und II zur Bestimmung der Constanten benutzen kann, und hätte ich die Rechnung auch durchgeführt und für die Bestimmung der Dichte verwerthet, wenn nicht eine bestimmte Ueberlegung mich davon abgehalten hätte. Die genauere Bestimmung der Constanten der specifischen Wärme hätte doch nur eine wirkliche Bedeutung innerhalb der Temperaturgrenzen gehabt, welche die Beobachtungen Regnault's umfassen, also beim Aether bis 32°; in den höheren Temperaturen wäre die Unsicherheit in Bezug auf die specifische Wärme doch grösstentheils bestehen geblieben, und hier wäre eine grössere Sicherheit gerade am meisten von Werth gewesen.

Aus dem Vorstehenden geht jedenfalls hervor, dass in der specifischen Wärme des Aethers in den höheren Temperaturen, auch wenn man davon absieht, dass die Beobachtungen nicht so weit reichen, eine Ungenauigkeit von etwa 0,5 bis 1,0 Proc. besteht, und dass diese Unge-

nauigkeit für die Temperaturbestimmung nach meiner Formel eine Unsicherheit bis zu 0,8° in den hohen Temperaturen nach sich zieht.

2. Aceton.[1]) Bei dieser Flüssigkeit liegen nur zwei Versuche vor, welche den Temperaturgrenzen:

I.	II.
– 21,71	53,81
8,99	9,51

entsprechen, und durch welche die beiden Constanten berechnet wurden.

3. Chloroform.[2]) Hier liegen fünf Versuche von Regnault vor und entsprechen dieselben den folgenden Temperaturgrenzen:

I.	II.	III.	IV.	V.
– 31,99	– 29,28	53,82	61,15	55,31
7,47	5,98	4,93	6,65	6,62

Von diesen fünf Versuchen wurden nur drei, nämlich I, III, V, zur Berechnung der Constanten A und B benutzt und:

$$A = 0{,}23235 \qquad B = 0{,}000\,050\,715$$

gefunden.

Berechnet man mit diesen Werthen die Wärmemengen, welche den Versuchen II und IV entsprechen, so erhält man folgende Werthe, denen die Beobachtungen beigefügt sind:

	Wärmemenge Q		
	beobachtet	berechnet	Differenz
II.	7,9260	8,1509	– 0,2249
IV.	12,761	12,851	– 0,090

Man ersieht hieraus, dass bei dem Versuche II die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung fast 3 Proc. beträgt.

4. Chlorkohlenstoff.[3]) Die drei Werthe, welche

1) l. c. p. 284.
2) l. c. p. 276.
3) l. c. p. 282.

Regnault beobachtet hat, entsprechen den Temperaturgrenzen:

I.	II.	III.
– 20,57	63,48	66,49
7,70	4,13	5,04

Berechnet man mit den Constanten Regnault's:

$$A = 0{,}19797 \qquad B = 0{,}000\,090\,586$$

die Wärmemengen, welche den Versuchen II und III entsprechen, so erhält man folgende Werthe:

	Wärmemenge Q beobachtet	berechnet	Differenz
II.	12,103	12,113	– 0,010
III.	12,575	12,563	+ 0,012

Hier stimmen die beiden Beobachtungen in den Resultaten nahe überein.

5. Schwefelkohlenstoff.[1]) Die vier vorliegenden Versuche liefern die mittleren specifischen Wärmen zwischen den Temperaturen:

I.	II.	III.	IV.
– 37,31	– 29,67	39,49	39,53
6,98	6,11	5,85	6,33.

Diese Versuche sind benutzt, um die Constanten:

$$A = 0{,}23523 \qquad B = 0{,}000\,081\,516$$

zu berechnen. Mit diesen Constanten erhält man folgende Werthe für die Wärmemengen:

	Wärmemenge Q beobachtet	berechnet	Differenz
I.	8,8528	8,9312	– 0,0784
II.	8,4240	8,3480	+ 0,0760
III.	7,9941	8,0336	– 0,0375
IV.	7,9673	7,9394	+ 0,0279

Die beiden Beobachtungen I und II unterscheiden sich um 1,7 Proc., die Abweichung vom Mittel beträgt 0,8 Proc.

Von den fünf hier genannten Flüssigkeiten gibt es eine, nämlich Schwefelkohlenstoff, bei welcher vier Beob-

1) l. c. p. 274.

achtungen zur Berechnung der Constanten benutzt wurden. Bei drei Flüssigkeiten, Aether, Chloroform und Chlorkohlenstoff wurden nur drei Beobachtungen verwerthet, um die specifische Wärme und die Abhängigkeit derselben von der Temperatur zu bestimmen; endlich wurden für Aceton nur zwei Beobachtungen ausgeführt.

Aus diesen Bemerkungen geht mit Rücksicht auf die angestellte Vergleichung von Beobachtung und Berechnung hervor, dass die specifische Wärme der Flüssigkeit mit einer Unsicherheit von etwa 1 Proc. behaftet ist, und dass diese Unsicherheit in den höheren Temperaturen, besonders ausserhalb des Intervalls der Regnault'schen Beobachtung sich noch vergrössert. Diese Ungenauigkeit bedingt dann einen mit der Temperatur wachsenden Einfluss auf die Verdampfungswärme und damit auf die Dichte des Dampfes; derselbe steigt bis zu 1 Proc. an. Man wird daher wohl nicht zu hoch greifen, wenn man in Anbetracht der Beobachtungsfehler in den Gesammtwärmen und ebenso jener in den specifischen Wärmen behauptet, dass die Dichte der Dämpfe durchschnittlich mit einer Unsicherheit von 1 Proc. behaftet ist, und dass diese in den höchsten Temperaturen bis zu 2 Proc. wachsen kann.

Ein Fehler in der Dichte macht sich für die Berechnung der Temperatur nach der von mir aufgestellten Beziehung bei verschiedenen Temperaturen in verschiedener Weise geltend; der Einfluss wird um so grösser, je weiter die Temperatur von dem Normalsiedepunkt entfernt liegt. Für Schwefelkohlenstoff habe ich eine Berechnung ausgeführt, welche dies erkennen lässt. Nimmt man einen Fehler von 1 Proc. in der Dichte an, so erhält man folgende Aenderungen der betreffenden Temperatur:

bei dem Drucke von Atmosphären	Temperatur-änderung	bei dem Drucke von Atmosphären	Temperatur-änderung
10	1,10	4	0,55
8	0,97	2	0,24
	0,79		

Ganz ähnliche Werthe erhält man auch bei den Dämpfen anderer Flüssigkeiten.

§ 13.

Die Beobachtungen Regnault's über den Zusammenhang von Druck und Temperatur der gesättigten Dämpfe sind durch eine Gleichung von der Form:

$$\log F = a + b \,.\, \alpha^t + c\beta^t$$

dargestellt, welche auf der rechten Seite fünf constante Grössen enthält, und in welcher auf der linken Seite F den Druck in Millimetern Quecksilber angibt. Zur Bestimmung der Constanten hat Regnault nur eine beschränkte Zahl seiner Beobachtungsreihen verwendet, weil die verschiedenen Reihen sich nicht immer auf dasselbe Präparat beziehen. Will man daher eine Vergleichung von Beobachtung und Rechnung anstellen, — welche durch die Form der aufgestellten Gleichung sehr erschwert ist — so darf man nur jene Beobachtungsreihen berücksichtigen, auf welche Regnault seine Formeln gegründet hat.

Ich will hier zunächst den Chlorkohlenstoff wählen, weil bei demselben eine Untersuchung in kleineren Drucken möglich ist, und sich hier besonders grosse Abweichungen zeigen. Für den Chlorkohlenstoff liegen vier Beobachtungsreihen vor, von denen Regnault jedoch nur zwei, nämlich die 3. und 2. zur Bestimmung der Constanten benutzt. Die 3. Reihe[1]) beginnt mit der Temperatur 75,77^0, enthält dann wachsende Temperaturen bis 189,15^0, und führt ferner von der Temperatur 28,20 ausgehend die Beobachtung bis zu 77,14^0. Die 4. Reihe umfasst dagegen die Temperaturen von $-36{,}53^0$ bis $+56{,}40^0$.

Vergleicht man nun den zweiten Theil der Beobachtungen der genannten 3. Reihe mit der Berechnung, so findet man sehr grosse Differenzen. Um hierfür den Beweis zu liefern, habe ich zunächst zur Abkürzung der Rechnung die beobachteten Temperaturen, welche nahe

1) l. c. p. 432.

zusammen liegen, in einen Mittelwerth vereinigt; diese Vereinigung zeigt die folgende Zusammenstellung.

Chlorkohlenstoff.

Temperatur des ges. Dampfes 1.	Druck des Dampfes 2.	Mittelwerthe der Temperatur 3.	Mittelwerthe des Druckes 4.
28,20	123,6	28,20	123,6
28,56	127,9	28,56	127,9
29,09	131,5	29,09	131,5
34,60	166,1	34,69	166,7
34,78	167,3		
44,81	250,2	44,86	250,7
44,91	251,2		
53,04	336,0	52,89	336,8
52,79	336,9		
52,83	337,7		
59,47	427,2	59,58	427,9
59,55	427,2		
59,73	429,5		
68,35	574,0	68,38	574,0
68,42	574,0		
77,18	757,5	77,16	757,5
77,14	757,5		

Wie man sieht, stimmen die Beobachtungen bei nahe liegenden Temperaturen sehr nahe überein; man kann daher die Reihen 3 und 4 der vorliegenden Zusammenstellung als den Ausdruck der Beobachtungen ansehen.

Ich habe jetzt nach der Formel Regnault's die den beobachteten Temperaturen zugehörigen Drucke berechnet. In dieser Formel ist:

$$a = 12{,}096\,233\,1 \qquad \log \alpha = 0{,}999\,712\,0 - 1$$
$$b = -9{,}137\,518\,0 \qquad \log \beta = 0{,}994\,978\,0 - 1$$
$$c = -1{,}967\,489\,0 \qquad t = T + 20,$$

wo T die Temperatur des Dampfes bezeichnet.

Die nach dieser Formel berechneten Drucke sind in der 3. Reihe der folgenden Tabelle angegeben; die 4. Reihe enthält die Differenz dieses Druckes gegenüber dem beobachteten Werthe. Um endlich den Einfluss auf die Temperaturbestimmung zu erfahren, sind in der 5. Reihe die Temperaturdifferenzen mitgetheilt, welche der angegebenen

Druckdifferenz entsprechen, und welche durch Interpolation bestimmt wurden.

Chlorkohlenstoff.

Temperatur des Dampfes beobachtet 1.	Druck des Dampfes beobachtet 2.	berechnet 3.	Differenz von 2 u. 3 4.	Temperaturdifferenz entsprechend der Druckdifferenz 5.
28,20	123,6	131,8	− 8,2	1,46
28,56	127,9	133,7	− 5,8	1,02
29,09	131,5	136,8	− 5,3	0,95
34,69	166,7	173,3	− 6,6	0,99
44,86	250,7	259,6	− 8,9	0,97
52,89	336,8	349,0	−12,2	1,02
59,58	427,9	441,1	−13,2	0,93
68,38	574,1	590,2	−16,2	0,87
77,16	757,5	775,1	−17,6	0,77

Die mittlere Differenz der Temperaturen beträgt 0,99^{0}, wie aus der letzten Reihe hervorgeht. Während bei den obigen Werthen die berechneten Drucke immer beträchtlich grösser als die beobachteten sind, ist bei der 4. Serie der Regnault'schen Versuche in demselben Temperaturintervall und bei noch niedrigeren Temperaturen häufig das Gegentheil der Fall. Auf diese Werthe will ich hier nicht näher eingehen, da durch die obige Tabelle zur Genüge bewiesen ist, dass zwischen Beobachtung und Berechnung bei den Regnault'schen Versuchen Differenzen vorkommen, welche bis zu 1,00^{0} gehen. Es handelt sich hierbei nicht etwa um einen vereinzelten Werth, dessen Abweichung durch zufällige Umstände veranlasst sein könnte, sondern eine grosse Anzahl von Versuchen (die vorliegende Tabelle umfasst 17 Beobachtungen) zeigt beträchtliche Abweichungen in demselben Sinne. Diese Abweichungen sind nicht Folge von Beobachtungsfehlern, sei es der Drucke oder der Temperaturen, sondern sind durch Aenderungen bedingt, welche der Dampf während der Beobachtung erfährt. Es geht dies aus der 3. Serie hervor; der erste Versuch bezieht sich nämlich auf die Temperatur 75,77^{0} und liefert den Druck 745,6 mm; die Berechnung ergibt 743,0, also nahe übereinstimmend, aber doch etwas

kleiner. Dieser erste Versuch zeigt also gerade das entgegengesetzte Verhalten, wie die späteren Versuche der 3. Serie, welche in der obigen Tabelle mitgetheilt sind, woraus wohl mit Recht zu schliessen ist, dass der Dampf während der folgenden Versuche eine Aenderung erfahren hat.

Die Versuche Regnault's, welche in derselben Reihe nnmittelbar aufeinander folgen, zeigen meistens eine gute Uebereinstimmung und das gleiche Verhalten gegenüber den Beobachtungen. Die grössten Differenzen kommen unter den Beobachtungen verschiedener Reihen vor; nur, wenn verschiedene Reihen Versuche enthalten, welche demselben Temperaturintervall angehören, oder wenn in derselben Reihe die beobachteten Temperaturen sich nicht immer in demselben Sinne ändern, finden sich beträchtliche Abweichungen gegenüber den berechneten Werthen. Solche Reihen können aber allein dazu dienen, um eine Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen zu erhalten.

Beim Chlorkohlenstoff habe ich Drucke unterhalb einer Atmosphäre zur Vergleichung von Beobachtung und Rechnung gewählt, weil in diesen Drucken doppelte Reihen von Beobachtungen vorhanden waren. Um auch ein Beispiel von höheren Drucken zu erhalten, möge der Aether dienen, und sollen im Folgenden diejenigen Drucke verglichen werden, welche sich auf Temperaturen oberhalb 100° beziehen. In der folgenden Zusammenstellung sind zunächst die Mittelwerthe angegeben.

Aether.

Temperatur des ges. Dampfes 1.	Druck des Dampfes 2.	Mittelwerthe der Temperatur 3.	Mittelwerthe des Druckes 4.
100,15	4939,32	100,13	4936,3
100,11	4939,37		
100,45	5078,33	100,46	5078,5
100,47	5078,73		
104,77	5589,41	104,76	5587,7
104,75	5585,92		
109,03	6139,75	109,03	6136,3
109,03	6132,82		

Aether. (Fortsetzung.)

Temperatur des ges. Dampfes 1.	Druck des Dampfes 2.	Mittelwerthe der Temperatur 3.	Mittelwerthe des Druckes 4.
111,93	6520,64	111,91	6513,6
111,89	6506,64		
116,03	7084,53	115,94	7066,3
115,86	7048,14		
106,23	5651,11	106,23	5647,1
106,22	5643,11		
113,35	6596,70	113,31	6584,6
113,30	6582,25		
113,28	6574,76		

In den Reihen 3 und 4 der obigen Tabelle sind die Mittelwerthe angegeben, welche den unmittelbaren Beobachtungen entsprechen. An den Temperaturbestimmungen, welche sich auf das Quecksilberthermometer beziehen, ist noch eine kleine Correction anzubringen, um dieselben auf die Angaben des Luftthermometers zurückzuführen. Regnault gibt für die beim Aether benutzten Thermometer an, dass bei 110° das Luftthermometer 0,05°, und bei 120° dasselbe 0,11° niedriger als das Quecksilberthermometer zeigt. Berücksichtigt man dies, so erhält man folgende Temperaturen, denen die beobachteten und berechneten Drucke beigefügt sind. Die letzteren wurden nach Regnault's Formel berechnet, in welcher:

$$a = 5{,}028\,629\,8 \qquad \log \alpha = 0{,}014\,577\,5$$
$$b = 0{,}000\,228\,4 \qquad \log \beta = 0{,}996\,877\,7 - 1$$
$$c = -3{,}190\,639\,0 \qquad t = T + 20$$

zu setzen ist.

Aether.

Temperatur des Dampfes beobachtet 1.	Druck des Dampfes beobachtet 2.	Druck des Dampfes berechnet 3.	Differenz von 2 u. 3 4.	Temperaturdifferenz entsprechend der Druckdifferenz 5.
100,13	4936,3	4969,4	−33,1	−0,27
100,46	5078,5	5007,4	+71,1	+0,59
104,74	5587,7	5511,8	+75,9	+0,63
108,99	6136,3	6078,0	+58,3	+0,44
111,86	6513,6	6475,7	+36,9	+0,26
115,86	7066,3	7064,7	− 1,7	+0,01
106,20	5647,1	5710,0	−62,9	−0,48
113,25	6584,6	6675,5	−91,1	−0,63

In der letzten Reihe der obigen Tabelle sind die den Druckdifferenzen entsprechenden Temperaturänderungen berechnet. Wie man sieht, kommt das positive und negative Vorzeichen ziemlich gleichmässig vor, sodass in der That die Regnault'sche Curve die Beobachtungen gut wiedergibt; die mittlere Abweichung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen beträgt indessen 0,41°, Hieraus erkennt man, dass auch bei den hohen Drucken bis zu 10 Atmosphären die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung nicht so klein sind, als man leicht anzunehmen geneigt ist, weil ja einer geringern Temperaturänderung schon eine so bedeutende Druckänderung entspricht.

Es sind jetzt noch die grossen Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung (nach der von mir aufgestellten Beziehung) zu besprechen, welche sich beim Chloroform und Chlorkohlenstoff in niedrigen Drucken ergeben. Beim Chloroform steigt diese Differenz bei dem Drucke von $^1/_4$ Atmosphäre auf 2,95° und beim Chlorkohlenstoff bei dem Drucke von $^1/_{16}$ Atmosphäre auf 2,00°.

Was zunächst das Chloroform angeht, so hat Regnault von 6 Versuchsreihen nur 3, nämlich die 2., 5. und 6. zur Bestimmung seiner Formel benutzt. Die Reihe 5 reicht von der Temperatur 21,78° bis 59,79°, und die Reihe 6 von der Temperatur 59,87° bis 161,29°. Diese beiden Reihen umfassen kein den Reihen gemeinschaftliches Temperaturintervall, und daher ist eine Untersuchung der Genauigkeit hier nicht ausführbar. Die 2. Reihe geht von 12,55° bis 42,99° und enthält nur 5 Versuche eines Präparates, von dem Regnault, gegenüber dem Präparate, welches zu den Reihen 5 und 6 verwandt ist, bemerkt: „La série 2 appartient à un chloroforme différent et probablement moins pur, mais qui, dans ses forces élastiques ne diffère sensiblement de l'autre qu'à des températures superieures à 35°." Wenn diese Reihe 2 mit der Reihe 5 in niedrigen Temperaturen eine Uebereinstimmung zeigt, so kann darin kein Beweis für die Richtigkeit der Reihe 5 liegen, da thatsächlich, wie Regnault selbst bemerkt, die Reihe 2

sich auf ein Präparat bezieht, welches von dem Präparate der Reihe 5 verschieden ist, und da die Resultate beider Reihen in den Temperaturen über 35° nicht mehr übereinstimmen. Wie gross der Unterschied der Präparate hier ist, das geht aus der 3. Reihe hervor, welche sich auf dasselbe Präparat wie die Reihe 2 bezieht. Nach dieser Reihe berechnet sich der Siedepunkt bei dem Drucke von 1 Atmosphäre auf 60,95°, während er aus den Reihen 5 und 6 nach der Formel Regnault's zu 60,18° angegeben wird. Ich glaube daher, dass der grosse Unterschied von 2,95° zwischen Beobachtung und Berechnung bei dem kleinen Drucke von $^1/_4$ Atmosphäre keine grosse Bedeutung hat, und dass derselbe durch eine kleine Aenderung in der Zusammensetzung der Flüssigkeit hervorgerufen werden kann.

Beim Chlorkohlenstoff ist die Differenz von 2,00° für den Druck von $^1/_{16}$ Atmosphäre leichter zu erklären, weil dort schon nachgewiesen ist, dass die beiden Versuchsreihen, welche zur Darstellung der Formel gedient haben, sehr grosse Differenzen zeigen. Würde man jede der dort in Frage stehenden Versuchsreihen für sich durch eine Curve darstellen, so würden dieselben einen ganz verschiedenen Verlauf nehmen. Wenn man nun doch, so gut es geht, beide Versuchsreihen durch eine Curve darzustellen versucht, so werden daraus Resultate entstehen, welche besonders in den Anfangs- und Endwerthen eine grosse Unsicherheit in sich schliessen müssen.

Fasst man das Resultat dieses Paragraphen zusammen, so wird man es als erwiesen betrachten, dass bei den Beobachtungen Regnault's über die Spannkräfte der hier in Betracht kommenden Flüssigkeiten häufig grössere Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung nach Regnault's Formel vorkommen, und dass dieselben bei Drucken grösser als 1 Atmosphäre 0,4° erreichen und bei Drucken kleiner als 1 Atmosphäre bis zu 1° ansteigen.

§ 14.

Für die Beurtheilung der Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung der bestimmten Drucken ent-

sprechenden Temperaturen, wie sie sich nach den von mir aufgestellten Formeln ergaben, bleibt ausser dem bereits Gesagten noch zu erwägen, dass die beiden hier vor allem in Betracht kommenden Beobachtungen, die Spannkraftsbestimmung einerseits und die Ermittelung der Gesammtwärmen andererseits zeitlich um viele Jahre auseinander liegen und darum auch wohl nicht auf völlig gleiche Präparate sich beziehen.

Bedenkt man dies und berücksichtigt man ferner alle die Umstände, welche in den beiden letzten Paragraphen besprochen sind, und welche dazu beigetragen haben können, eine Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung nach der von mir aufgestellten Beziehung herbeizuführen, so wird man, glaube ich, die thatsächlich vorhandenen Differenzen, welche in den Tabellen angegeben sind, nicht gross finden und daher schliessen, dass die fragliche Beziehung genügend bestätigt wird.

Nur auf einen Punkt möchte ich hier noch hinweisen. Aus der Vergleichung der in den Tabellen (§ 11) angegebenen Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung geht hervor, dass die Differenzen bei den Drucken von 2 bis 7 oder 8 Atmosphären bei allen Dämpfen mit Ausnahme jener des Chloroforms positiv werden. Diese Uebereinstimmung scheint anzudeuten, dass in einer oder mehreren Grössen, welche für die fragliche Differenz massgebend sind, ein constanter Fehler vorhanden ist. Ich vermuthe, dass dieser Fehler in der Gesammtwärme der Verdampfung liegt, und dass die Form der Gleichung:

$$\lambda = a + bt + ct^2 + \dots.$$

zur Darstellung der Gesammtwärmen nicht geeignet ist, wenn man nicht eine sehr grosse Anzahl von Constanten bestimmen will; ich glaube vielmehr, dass sich eine andere Form zur Darstellung der Gesammtwärmen finden lässt, welche mit den Beobachtungen wenigstens ebenso gut übereinstimmt, wie die von Regnault angenommene Form, und welche sich von dieser dadurch unterscheidet, dass sie bei den Drucken von 2 bis 5 Atmosphären etwas kleinere

Werthe liefert. Leider geben die Beobachtungen über die Gesammtwärmen bei diesen Drucken nur sehr wenig Werthe; so geht beim Aether der Druck von 1 Atmosphäre ohne ein Zwischenglied zu 5 Atmosphären; Chlorkohlenstoff liefert zwischen den Drucken von 1 und 4 Atmosphären keine Beobachtung, und beim Aceton hat man nur Werthe bei 1, 3, 5, 8 und 10 Atmosphären, die eine geringe Uebereinstimmung zeigen. Wenn aber auch die Beobachtungen bei den fraglichen Drucken keine oder nur wenige directe Anhaltspunkte bieten, so ist es doch wünschenswerth, den Versuch, die Gesammtwärmen durch eine andere Form der Gleichung darzustellen, wirklich auszuführen.

§ 15.

Vor einiger Zeit hat Dühring[1]) ein Gesetz aufgestellt, welches den Zusammenhang der Siedetemperaturen verschiedener Flüssigkeiten bei demselben Drucke angibt. Dasselbe lässt sich so aussprechen: Siedet das Wasser unter einem Drucke von n Atmosphären bei der Temperatur t_n, und siedet eine andere Flüssigkeit unter demselben Drucke bei der Temperatur T_n, so ist:

$$T_n = r + q \, . \, t_n,$$

wo r und q zwei constante Grössen sind, die von dem Drucke n unabhängig sind und nur von der Natur der zweiten Flüssigkeit abhängen.

Würde dieses Gesetz von Dühring richtig sein, so müsste die von mir aufgestellte Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Dichte der gesättigten Dämpfe falsch sein; nur in einem Falle könnten beide Beziehungen gleichzeitig bestehen, nämlich dann, wenn die Dichten der gesättigten Dämpfe aller Flüssigkeiten sich mit wachsendem Drucke gleichmässig änderten, sodass der Quotient der Dichten zweier Dämpfe, bezogen auf gleiche Drucke, unabhängig vom Drucke wäre. Dies trifft aber für die Dichten in der That nicht zu, und daher bleibt die oben aufgestellte Alternative bestehen.

1) Dühring, Neue Grundgesetze der rationellen Physik und Chemie. Erste Folge. 1878.

Es lässt sich nun aber leicht zeigen, dass das von Dühring aufgestellte Gesetz nur als eine Annäherung zu betrachten ist, und dass dasselbe in höheren Drucken ganz beträchtliche Abweichungen zeigt. Zwar sagt Dühring[1]): „Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Temperaturen sind, wie die Tabellen zeigen, äusserst geringfügig. Nur bei den niedrigsten Drucken werden für Alkohol und Aether die Unterschiede beachtenswerth, erklären sich aber sehr leicht aus der beträchtlichen Wirkung, die bekanntlich schon die geringste fremde Beimischung bei diesen Substanzen auf die niederen Dampfspannungen hervorbringt."

Unter den Dämpfen, welche Dühring als Beweis für die Richtigkeit seines Gesetzes in ihren Temperaturen tabellarisch geordnet mittheilt, befinden sich zwei, welche auch uns früher beschäftigt haben, nämlich Aether und Schwefelkohlenstoff. Dühring verfolgt den Aether bis zu einer Temperatur von 80° und findet dort eine Abweichung von 1,22° Diese Differenz von 1,22° bei dem Drucke von etwa vier Atmosphären steigert sich immer mehr, wenn man zu höheren Drucken übergeht, wie die folgende Tabelle in der letzten Reihe zeigt.

Aether.

Druck in Atmosphären	Temperatur des Dampfes		Differenz
	beobachtet	berechnet nach Dühring	
1	34,97	34,97	0,00
2	55,87	55,57	+0,30
3	69,61	68,88	+0,73
4	80,21	78,97	+1,24
5	88,96	87,19	+1,77
6	96,47	94,19	+2,28
7	103,08	100,31	+2,77
8	109,00	105,78	+3,22
9	114,37	110,74	+3,63
10	119,39	115,28	+4,11

Die Werthe der dritten Reihe sind nach der Formel:

$$T_n = -65{,}03 + 1{,}000\, t_n,$$

welche Dühring für den Aether aufgestellt hat, berechnet.

1) l. c. p. 81.

Beim Schwefelkohlenstoff geht die Berechnung von Dühring bis 90° und zeigt dort eine Abweichung von 0,88° gegenüber der Beobachtung. Auch hier werden die Differenzen beträchtlich grösser mit wachsendem Drucke, wie wieder die letzte Reihe der folgenden Tabelle zeigt.

Schwefelkohlenstoff.

Druck in Atmosphären	Temperatur des Dampfes beobachtet	berechnet nach Dühring	Differenz
1	46,25	46,20	+0,05
2	69,25	69,09	+0,16
3	84,45	83,88	+0,57
4	96,17	95,08	+1,09
5	105,86	104,21	+1,65
6	114,21	111,99	+2,22
7	121,59	118,79	+2,80
8	128,59	124,87	+3,38
9	134,34	130,38	+3,96
10	139,97	135,42	+4,55

Die Werthe der dritten Reihe sind nach der Formel:

$$T_n = -64{,}90 + 1{,}111\,t,$$

welche Dühring für Schwefelkohlenstoff aufgestellt hat, berechnet.

Aus den beiden vorgeführten Tabellen geht hervor, dass die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werthen in den hohen Drucken sehr gross werden; die Differenzen in der vierten Reihe steigen bis über 4°.

Auch für die übrigen von mir untersuchten Dämpfe habe ich nach dem von Dühring angegebenen Gesetze die Temperaturen berechnet und ganz ähnliche Differenzen gefunden, wie beim Aether und Schwefelkohlenstoff. Ich unterlasse es, die hierauf bezüglichen Resultate mitzutheilen, da ich die beiden vorgeführten Tabellen für genügend halte, um den Beweis zu liefern, dass das von Dühring aufgestellte Gesetz der Wahrheit nicht entspricht und nur als eine gewisse Annäherung betrachtet werden kann, die in niedrigen Drucken zur Geltung kommt.

Hohenheim, im December 1879.

III. *Untersuchungen über die Schwingungen einer Normalstimmgabel; von Dr. Rudolph Koenig in Paris.*

Im Verlaufe der letzten zwanzig Jahre hat die Stimmgabel als Präcisionsinstrument eine immer ausgedehntere Anwendung gefunden und ist zu immer genaueren Untersuchungen verwendet worden, damit haben sich denn auch natürlich die Ansprüche an die Genauigkeit der Kenntniss ihrer Schwingungszahl beträchtlich steigern müssen. Die Stimmgabel, welche ich in den ersten Zeiten, als ich mich mit der Construction akustischer Instrumente zu beschäftigen anfing, mit den mir damals zu Gebote stehenden Mitteln etablirte, und als Etalon adoptirt hatte, trug die Angabe Ut_3 $(\bar{c}) = 512$ v. s. ohne die besondere Angabe der Temperatur, sollte aber meiner Absicht nach diese Schwingungszahl bei 20 Centigrad Wärme geben. Ich bemerkte bei meinen ferneren Arbeiten, dass diese Gabel aller Wahrscheinlichkeit nach bei $+20^0$ um einen Bruchtheil einer einfachen Schwingung zu hoch war, und also ihre Temperatur um einige Grade erhöht werden musste, wenn sie die Zahl von 512 v. s. in der Secunde mit absoluter Genauigkeit geben sollte. Da der Experimentator, welcher eine Stimmgabel anwendet, nur in den seltensten Fällen gerade bei der Temperatur arbeiten wird, für welche die Gabel construirt ist, und daher doch immer eine Correctur wird machen müssen, wenn seine Untersuchungen derart sind, dass sie eine Genauigkeit der Stimmung erfordern, bei welcher die Wirkung geringer Temperaturveränderungen schon in Rechnung kommt, so ist es im Grunde ganz gleichgültig, ob seine Gabel bei einigen Graden Wärme mehr oder weniger gestimmt ist, und es kommt nur darauf an, dass ihm dieser Wärmegrad selbst und die Aenderung, welche die Schwingungszahl seiner Gabel bei anderen Temperaturen erleidet, genau bekannt seien. — Es schien mir, dass die Bestimmung der sehr kleinen Grösse, um welche die erwähnte Gabel von dem

wahren Werthe abweichen mochte, wie auch die sehr genaue Bestimmung des Temperatureinflusses vermittelst der bisher für Untersuchungen dieser Art angewendeten Methoden, schwer mit Sicherheit zu erreichen sein würde, und ich habe daher die folgenden Untersuchungen erst unternommen, nachdem es mir möglich geworden war, einen neuen Apparat auszuführen, welcher meinen Zwecken vollständig entsprach. Derselbe zeichnet sich nicht allein durch die ausserordentliche Präcision seiner Angaben aus, sondern hat auch noch die Vorzüge, dass er diese Angaben ohne jede umständliche oder schwierige Manipulation des Beobachters liefert, und gestattet zu jeder Zeit die absolute Schwingungszahl der Normalgabel verificiren und die geringste, durch irgend welche Umstände bewirkte Abweichung derselben von ihrer ursprünglichen Stimmung, sofort nachweisen zu können. Um denselben herzustellen, habe ich nicht nöthig gehabt, etwas Neues zu erfinden, sondern nur verschiedene bekannte Elemente passend verbinden dürfen.

Eine Stimmgabel $C(Ut_1) = 128$ v. s.[1]) ist mit einem Uhrwerke in der Weise verbunden, dass sie vermittelst des Echappements den Gang desselben regulirt, zugleich aber auch durch dasselbe bei jeder Vibration eine kleine Impulsion erhält, sodass ihre Schwingungsbewegung dauernd unterhalten wird, wie dieses zuerst in einer Uhr realisirt worden war, welche Hr. Niaudet am 10. December 1866 der Akademie der Wissenschaften in Paris präsentirt hat, und welche auch auf den Ausstellungen von Paris 1867, und von Wien 1873 figurirte. Dieses Uhrwerk, welches für mich von Hrn. Brown in vorzüglicher Weise ausgeführt wurde, trägt drei Zifferblätter. Auf dem ersten, welches in 128 Theile getheilt ist, macht der Zeiger einen Umlauf in der Zeit, in welcher die Stimmgabel 128 v. s. ausführt, also in einer Secunde. Das zweite Zifferblatt und das dritte und grösste, zeigt die Secunden, Minuten und Stunden an, wie ein gewöhnlicher Chronometer. Beim

1) Alle hier angewandten Stimmgabeln waren aus demselben englischen Gussstahl gefertigt.

Aufziehen des Uhrwerkes wird die Schwingungsbewegung der Gabel in keiner Weise gestört oder unterbrochen. — Auf beiden Zinken der Stimmgabel befinden sich Mikrometerschrauben mit schweren Köpfchen, welche eine äusserst genaue Regulirung der Schwingungsperiode gestatten. Auf einer Zinke derselben ist ausserdem das Objectiv eines Mikroskopes befestigt, dessen Körper mit dem Ocular sich dahinter auf dem Gestelle befestigt befindet, sodass auf diese Weise ein Vibrationsmikroskop nach Lissajous gebildet wird. Das Gegengewicht der Objectivlinse auf der zweiten Zinke der Gabel besteht in einem Stahlspiegel. Zwischen den Zinken der Gabel ist ein Thermometer angebracht, dessen Quecksilberbehälter bis in die Biegung hinabreicht, wo die Bewegung der Arme am geringsten, der Einfluss der Wärme auf dieselben aber am grössten ist.



Setzt man bei diesem Apparate Gabel und Uhrwerk in Gang, so erhält man nun eine durchaus isochrone, immer gleich weite Schwingungsbewegung von unbegrenzt langer Dauer, welche man mit der Bewegung jedes andern tönenden Körpers optisch vergleichen kann, und deren absolute Schwingungszahl sich aus dem blossen Vergleiche

der Uhr des Instrumentes mit einem Chronometer ergibt. Ist diese Uhr während einer Stunde durchaus richtig gegangen, so hat die Stimmgabel genau 3600.128 = 460,800 v. s., oder in jeder Secunde 128 v. s. gemacht, ist sie dagegen in einer Stunde z. B. eine Secunde vor oder nach gegangen, so zeigt sie damit an, dass die Stimmgabel in derselben Zeit 128 v. s., und in einer Secunde $\frac{128}{3600} = 0{,}0355$ v. s. mehr oder weniger ausgeführt hat.

Ist die Stimmgabel bei einer bestimmten Temperatur so gestimmt, dass die Uhr absolut richtig, wie das Chronometer, geht, so gibt die Abweichung von diesem Gange, welche sich bei einer andern Temperatur zeigt, dann natürlich unmittelbar den Einfluss an, welchen der betreffende Unterschied in der Temperatur auf die absolute Schwingungszahl der Gabel ausgeübt hat, nur muss man sich hüten, die Angaben des Thermometers immer ohne weiteres als auch für die Temperatur der Gabel gültig anzusehen, denn diese letztere braucht eine weit längere Zeit, um die Temperatur der sie umgebenden Luft vollständig anzunehmen, als das Thermometer.

Um die Länge dieser Zeit genauer zu bestimmen, habe ich mehrere Versuchsreihen in folgender Weise ausgeführt. Von zwei Unisonogabeln $\bar{c}$ (Ut_3) = 512 v. s., welche das genaue Intervall der Octave mit der Gabel eines Vibrationsmikroskopes c (Ut_2) bildeten, wurde eine erhitzt und dann die Abnahme der durch die Wärme erzeugten Verstimmung von 5 zu 5 Minuten, zuerst vermittelst der Stösse mit der Unisonogabel, so lange diese noch schnell genug waren, um ihre Dauer ohne Schwierigkeit wahrnehmen zu lassen, darauf aber durch Beobachtungen mit dem Vibrationsmikroskope bestimmt.

Erhitzte ich die Gabel $\bar{c}$, bis ihr Ton um 4 v. s. vertieft war, so betrug diese Vertiefung durchschnittlich:

nach	$5^1/_2$	Minuten	nur	noch	2,000	v. s.
„	12	„	„	„	1,000	„
„	25	„	„	„	0,500	„
„	37	„	„	„	0,250	„

nach	50	Minuten	nur	noch	0,133	v. s.
„	60	„	„	„	0,080	„
„	70	„	„	„	0,054	„
„	80	„	„	„	0,039	„
„	100	„	„	„	0,016	„
„	120	„	„	„	0,002	„

In diesem letzten Falle machte also die durch das Vibrationsmikroskop beobachtete optische Figur während einer Minute noch etwa ein Achtel einer halben Umdrehung. Zehn bis zwanzig Minuten später verschwand dann aber auch schliesslich die letzte Spur einer Drehung der Figur, sodass demnach die Stimmgabel zwischen zwei und zweieinhalb Stunden gebraucht, um von einer Temperatur, welche sie um 4 v. s. vertieft, zur Temperatur der sie umgebenden Luft zurückzukehren.

Vertieft man die Gabel um nur 0,5 v. s., indem man sie etwa eine Minute lang in der Hand hält, so verschwindet diese Vertiefung schon ungefähr eine Viertelstunde früher als die gleiche Vertiefung bei vorhergegangener starker Erhitzung. Der Grund hierfür liegt wahrscheinlich darin, dass im ersten Falle dieselbe Vertiefung durch eine vielleicht etwas grössere, aber nicht tief in die Masse der Gabel eindringende, im letztern dagegen durch eine etwas geringere, aber die Gabel ganz durchdringende Wärme hervorgerufen wird. Dieses dürfte auch die Erklärung dafür abgeben, weshalb bei der Stimmgabel des Apparates die Zeitdauer für die Annahme der Temperatur der sie umgebenden Luft, wie sie sich aus der Beobachtung der Uhr ergab, etwas grösser war als bei den verhältnissmässig ziemlich schnell erhitzten Gabeln. Als z. B. bei einer ersten Versuchsreihe die Gabel genau bei $+18^0$ gestimmt war, und an einem Nachmittage von 5 bis 10 Uhr bei dieser immer unveränderten Temperatur die Uhr einen durchaus gleichen Gang mit dem Chronometer gezeigt hatte, konnte man am nächsten Morgen, wo das Thermometer wieder $+18^0$ angab, von 9 Uhr an ein Vorgehen noch bis gegen $1\frac{1}{2}$ Uhr wahrnehmen, welches beiläufig im

ganzen für diese $4^1/_2$ Stunden eine Secunde betrug, und erst dann blieb ihr Gang wieder bis 10 Uhr in absoluter Uebereinstimmung mit dem Chronometer. Die Gabel hatte also in diesem Falle $4^1/_2$ Stunden gebraucht, um die während der Nacht angenommene geringe Erkältung wieder vollständig zu verlieren. Man ersieht aus allen diesen Beobachtungen, dass man nur dann der Gabel des Apparates die vom Thermometer angegebene Temperatur zuschreiben kann, wenn diese Temperatur während mehrerer Stunden unverändert geblieben ist, und die Uhr, mit dem Chronometer verglichen, in ihrem Gange während einiger Stunden keinen Wechsel mehr bemerken lässt,

Es wäre hiernach am zweckmässigsten, in einem Raume zu experimentiren, in dem die Temperatur immer gleich bliebe, aber es ist schwer und sehr umständlich, durch künstliche Heizung in einem Zimmer während mehrerer Tage und Nächte einen immer gleichen Wärmegrad zu unterhalten, und tiefe Kellerräume, in denen die Temperatur von selbst unverändert bleibt, haben wieder den Nachtheil, dass ihre Temperatur zu niedrig ist, nämlich für Paris 12°. Will man aber eine Normalstimmgabel herstellen, welche durchschnittlich bei der gewöhnlichen Zimmertemperatur so richtig als möglich ist, so muss man sie für eine höhere als die mittlere Temperatur des Ortes construiren, denn bei der Bestimmung der letztern ist die grösste Kälte so gut wie die grösste Wärme in Anschlag gebracht worden, wogegen die mittlere Temperatur, bei der man mit Stimmgabeln zu arbeiten pflegt, doch wohl nur aus der gewöhnlichen Temperatur geheizter Zimmer und den über diese hinausgehenden Temperaturen des Ortes abzuleiten ist, da die Anwendung von Stimmgabeln zu genauen Experimenten bei starker Kälte nur sehr vereinzelt vorkommen dürfte. Ich habe aus diesen Gründen für die Normalgabel die Temperatur von 20 Centigrad Wärme gewählt und alle Experimente in einem sehr grossen und hohen, überall geschlossenen Zimmer ausgeführt, in dem die Temperatur sich immer nur sehr langsam und

verhältnissmässig wenig änderte, sodass oft das Thermometer von morgens bis abends fast gar keine Schwankungen anzeigte, wie dieses besonders an bewölkten, ganz sonnenlosen Tagen der Fall war, an denen es in diesem Jahre in Paris nicht mangelte.

Man könnte sich auch fragen, ob der Einfluss des sehr lange fortgesetzten Vibrirens der Gabel auf ihre Temperatur nicht schon gross genug wäre, um bei der Bestimmung ihrer Temperatur in einem gegebenen Augenblicke mit in Rechnung gebracht werden zu müssen, derselbe scheint jedoch so äusserst gering zu sein, dass man ihn wohl nur genau bestimmen könnte, wenn man in einem Raume experimentirte, in dem die Temperatur immer constant bliebe. Ich habe unter meinen zahlreichen Beobachtungen nur zwei gefunden, bei denen die Umstände für die Wahrnehmung dieses Einflusses günstig genug waren, und in welchen derselbe deutlich sichtbar zu sein scheint. Die Temperatur des Zimmers bei der ersten (25. Juli 1879), jede Stunde beobachtet, blieb von 8 Uhr morgens bis 4 Uhr abends beständig $+20^0$, und der Gang der Uhr in vollkommener Uebereinstimmung mit dem des Chronometers, um 5 Uhr war sie jedoch bis zu etwa $+19{,}7^0$ gesunken, die Uhr aber, statt infolge dessen etwas vorzugehen oder doch wenigstens noch denselben Gang beizubehalten, retardirte jetzt um $^1/_4$ Secunde, und bis 8 Uhr, wo die Temperatur noch immer $+19{,}7^0$ war, sogar um eine halbe Secunde. Erst nach 8 Uhr zeigte sich dann die Wirkung einer Erkaltung, indem bis 10 Uhr, bei $+19{,}5^0$, die Uhr wieder um eine halbe Secunde vorgegangen war, und somit auf den Punkt zurückgekehrt, auf dem sie ohne innere Erwärmung hätte bleiben müssen, wenn die Temperatur des Zimmers, statt zu sinken, bis 10 Uhr auf $+20^0$ geblieben wäre.

In der zweiten Beobachtungsreihe (22. Sept.) finden sich leider nicht genug Ablesungen, um den ganzen Gang der Erscheinung, wie bei der ersten, verfolgen zu können. Die Temperatur war um 2 Uhr und um 7 Uhr abends $+20^0$, und der Gang der Uhr in vollständiger Uebereinstimmung

stimmung mit dem Chronometer. Dann erst wieder um 10 Uhr 30 Minuten beobachtet, fand diese Uebereinstimmung noch statt, obgleich die Temperatur bis zu etwa 19,6° gesunken war.

Ich stimmte nun die Stimmgabel des Apparates bei der Temperatur von 20 Centigrad Wärme in der Weise, dass sie während sechs Stunden durchaus keinen Gangunterschied mit dem Chronometer wahrnehmen liess, welcher selbst in 24 Stunden nur eine Secunde vorging, und hatte Gelegenheit, mich von der Richtigkeit dieser Stimmung noch mehrfach zu überzeugen, indem die Temperatur des Zimmers bei ihren Schwankungen im Juni und Juli noch sechsmal, und in der zweiten Hälfte des September noch einmal, und stets auf vier bis acht Stunden, durch 20° passirte, wo sich dann immer die absolute Uebereïnstimmung zwischen dem Gange der Uhr und des Chronometers wieder herstellte. — Auch als bei einer Beobachtungsreihe (19. Juli), von 7 Uhr 46 Min. 45 Sec. Morgens, bis 6 Uhr 46 Min. 45 Sec. Abends die Temperatur von 19,3° bis 20,3° variirt hatte, aber die Berechnung für die ganze Zeitdauer die mittlere Temperatur von 20° ergab, war die Uhr erst bis 9 Uhr 46 Min. 45 Sec. um eine halbe Secunde vorgegangen, dann bis 2 Uhr 46 Min. 45 Sec. in gleichem Gange mit dem Chronometer geblieben, bis 5 Uhr 46 Min. 45 Sec. aber dann wieder um eine halbe Secunde nachgegangen, sodass das schliessliche Resultat ganz dasselbe war, als wäre die Temperatur von morgens bis abends 20° gewesen. — Beiläufig gesagt, blieb an dem Tage nach 6 Uhr die Temperatur noch bis 11 Uhr auf 20°, und die Uhr in absoluter Uebereinstimmung mit dem Chronometer.

Mit der in solcher Weise regulirten Gabel des Apparates stimmte ich darauf bei 20° Wärme optisch eine Gabel auf die Doppeloctave $\bar{c}$ (Ut_3) = 512 v. s. mit solcher Genauigkeit, dass, wenn sie gleiche Temperatur mit der Gabel C = 128 v. s. hatte, und ihre Schwingungen durch das Vibrationsmikroskop bis zu ihrem Verschwinden, also wäh-

rend 80 bis 90 Secunden beobachtet wurden, die Figur der rechtwinkeligen Composition der Schwingungen von 1 : 4 durchaus nicht die geringste Drehung wahrnehmen liess.

Somit machten nun also die Gabel des Apparates *C* und die oben beschriebene Gabel $\bar{c}$ bei 20 Centrigrad Wärme genau 128 und 512 v. s.

Der Umstand, dass die optische Figur der beiden Schwingungsbewegungen bis zum Verschwinden der Schwingungen der Gabel $\bar{c}$ durchaus keine Drehung wahrnehmen liess, zeigte zugleich auch an, dass die Schwingungen dieser Gabel während der ganzen Zeit, in der sie tönte, isochron waren, was von der grössten Wichtigkeit ist, denn da die Bestimmungen äusserst kleiner Tonunterschiede immer auf der Beobachtung der optischen Figur, oder dem Zählen der Stösse zweier Gabeln während einer längern Zeitdauer beruhen, so würde die Richtigkeit derselben durchaus illusorisch sein, wenn die Tonhöhe dieser Gabeln während der Zeit des Experiments eine Aenderung erlitte, wie dieses schon von Scheibler an Gabeln von unpassender Form beobachtet worden war, deren Zinken, statt parallel zu sein, sich nach den Enden zu mehr schlossen oder öffneten, und wie dieses auch mitunter, obgleich in weit geringerem Maasse, durch die Befestigung der Gabel auf einem Resonanzkasten bewirkt werden kann. — Ich sagte hier ausdrücklich „mitunter", denn der Einfluss der Resonanzkästen auf die Schwingungen der Gabel ist im allgemeinen sehr verschieden. — Wenn der Eigenton des Kastens von dem Tone der Stimmgabel noch ziemlich weit entfernt ist, obgleich schon nahe genug, um ihn gut zu verstärken, so lässt sich oft nicht der geringste Einfluss desselben auf die Schwingungen der Gabel nachweisen, und die Gabel tönt lange und mit gleichmässig abnehmender Stärke bis zum Verschwinden ihres Tones; ist dagegen der Ton des ganzen Systems, welches durch die Luftmasse und die Decken mit der Belastung der Gabel gebildet wird, dem Eigentone der Stimmgabel zu nahe und auch

sonst noch in gewissen Verhältnissen, welche ein sehr starkes Mitschwingen befördern, so lässt die Gabel, welche frei in der Hand gehalten, oder, auf einem soliden Ständer befestigt, 60 bis 90 Secunden lang mit gleichmässig abnehmender Intensität vibriren würde, mit dem Bogen angestrichen, erst einen ganz lauten Ton hören, ich möchte sagen, sie schreit förmlich auf, dieser verliert aber seine Intensität sehr bald, etwa schon nach 20 Secunden, und es bleiben dann nur noch für einige Zeit Schwingungen von ganz geringer Amplitude übrig, welche zu schwach sind, um noch die Schwingungen des Resonanzkastens merklich erregen zu können. Wenn der Resonanzkasten in dieser Weise auf die Schwingungsdauer der Gabel wirkt, so bleibt er auch nie ganz ohne Einfluss auf den Isochronismus und die Zahl ihrer Schwingungen, obgleich ersterer nur so klein ist, dass man geneigt sein könnte, den Nachweis desselben Beobachtungsfehlern zuzuschreiben, wenn man nur in der Weise die Untersuchungen anstellte, dass man die Gabel abwechselnd auf einem festen Ständer, und dann wieder auf einem Resonanzkasten befestigte, wo es allerdings an Fehlerquellen nicht mangeln würde. Ich habe jedoch Gelegenheit gehabt, diesen Einfluss eines Resonanzkastens auf die Schwingungen der Gabel zu beobachten, während sie gar nicht zwischen zwei Experimenten angerührt wurde, indem ich nur den Eigenton des Kastens dadurch veränderte, dass ich die Hand seinem offenen Ende mehr oder weniger näherte, wo dann die mit dem Vibrationsmikroskop beobachtete optische Figur, welche eine Schwankung in 20 Secunden sehen liess, wenn die Oeffnung des Kastens ganz frei gelassen wurde, nur noch 12 Secunden brauchte, um dieselbe Schwankung auszuführen, wenn ich die Oeffnung zudeckte, was also einen Unterschied der Schwingungszahlen in beiden Fällen von 0,033 v. s. in der Secunde anzeigte.[1]

Auch wenn man, um den Ton der Stimmgabel zu verstärken, diese, statt auf einem Resonanzkasten vor einem Resonator mit starken Wänden, deren Schwingungen ganz

vernachlässigt werden können, befestigt, sodass der resonirende Körper allein in der Luftmasse besteht, zeigt sich eine Einwirkung des Resonanztones auf die Schwingungsbewegung der Gabel, die sich in diesem Falle genauer in ihrem ganzen Wesen untersuchen lässt. — Für diese Experimente war die Stimmgabel $\bar{\bar{c}}$ (Ut_3 = 512 v. s.) auf einer Eisenplatte befestigt, und einige Millimeter hinter ihr eine Resonanzröhre von Messing, welche 12 cm im Durchmesser hatte, vorne einen Deckel mit einer 25 mm breiten und 11 cm langen Oeffnung trug und hinten einen verschiebbaren Stempel, durch den der Ton in genügenden Grenzen abgeändert werden konnte. — Die Gabel, auf ihrer Eisenplatte ohne Resonator geprüft, vibrirte gut während etwa 90 Secunden; befand sich jedoch der Resonator hinter ihr, und erhöhte man den Eigenton desselben, von einem beträchtlich tiefern als dem der Stimmgabel ausgehend, mehr und mehr, so konnte man folgenden Vorgang beobachten. — Schon wenn der Resonatorton noch eine kleine Terz tiefer als die Stimmgabel war, also auf *a* (la_2) stimmte, liess sich eine kleine Verringerung der Schwingungsdauer und gleichzeitig eine geringe Erhöhung der Schwingungszahl, etwa um 0,011 v. s., wahrnehmen. Je mehr von hier ab dann der Eigenton des Resonators sich dem der Stimmgabel näherte, je mehr nahm die Schwingungsdauer der Gabel ab und ihre Höhe zu, bis ganz nahe zu dem vollständigen Einklange beider Töne; war dieser jedoch wirklich erreicht, so verschwand plötzlich die Erhöhung der Schwingungszahl der Gabel ganz und gar, und sie zeigte dieselbe Stimmung, wie wenn sie ganz frei ohne Resonator vibrirte. Der Ton war dabei mächtig angeschwollen, nahm jedoch sehr schnell an Intensität ab und dauerte im ganzen nur etwa 8 bis 10 Secunden. Nach einer geringen Erhöhung des Resonatortones trat dann wieder eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Verstimmung der Gabel ein, d. h. sie zeigte sich nun um so viel tiefer geworden, als sie bei etwas tieferem Resonatortone vor der Erreichung des reinen Einklanges höher gewesen war, und diese Vertiefung wurde

dann bei immer grösserer Höhe des Resonatortones immer geringer, während die Schwingungsdauer der Gabel schliesslich wieder bis zu 80 und 90 Secunden anwuchs.

In folgender Tabelle habe ich die bei diesen Experimenten gefundenen Mittelwerthe zusammengestellt:

Stimmgabelton	Resonatorton	Schwingungsdauer d. Stimmgabel in Secund.	Veränderung der Schwingungszahl der Stimmgabel
$\bar{c}$	*a*	80	+0,011 v. s.
„	*ais*	60	+0,017 „
„	*h*	30	+0,033 „
„	496 v. s.	20	+0,071 „
„	$\bar{c}$	8—10	0 „
„	528 v. s.	18	−0,071 „
„	$\overline{cis}$	22	−0,058 „
„	$\bar{d}$	45	−0,030 „
„	$\overline{dis}$	70	−0,017 „

Nachdem die Schwingungszahlen der Gabel des Apparates *C* und der Normalgabel $\bar{c}$ mit absoluter Genauigkeit für die Temperatur von 20° C. hergestellt waren, fragte es sich, welches die Schwingungszahlen dieser Gabeln bei jeder beliebigen andern Temperatur sein würden.

Um den Einfluss eines Wärmegrades auf die Schwingungszahl der Stimmgabel des Apparates aus dem Gangunterschiede der Uhr und des Chronometers bestimmen zu können, machte ich in den Monaten von Juli bis in die erste Hälfte des Decembers des laufenden Jahres zwischen drei und vierhundert Beobachtungen, welche eine Anzahl von Reihen bilden, von denen sich einige über mehrere Tage und Nächte hintereinander erstreckten. Da jedoch während der Nächte nur wenige, und öfters gar keine Ablesungen gemacht waren, und somit die Bestimmung der mittlern Temperatur während der Nachtstunden unsicher wurde, zog ich es schliesslich vor, nur die Tagbeobachtungen zu benutzen, welche in 66 Gruppen enthalten waren. Wegen der Kleinheit und der Langsamkeit des Temperaturwechsels während jeder Beobachtungsperiode konnte wohl angenommen werden, dass die Temperatur

der Stimmgabel, wenn auch natürlich nicht in jedem Augenblick mit der Temperatur der Luft, so doch durchschnittlich mit der mittlern Temperatur derselben während der Zeit der Beobachtungen genügend gut übereinstimmte, und sollte in den Morgenstunden die Gabel gewöhnlich etwas kälter gewesen sein, so würden die hieraus entstandenen Fehler der Resultate, welche von Beobachtungen bei Temperaturen über 20° Wärme, und von solchen bei Temperaturen unter 20° Wärme abgeleitet wurden, sich doch zum grössten Theil gegenseitig aufheben müssen.

Da in den Fällen, in denen die Temperatur 20° Wärme zu nahe ist, die geringste Ungenauigkeit der Ablesung sofort zu den unrichtigsten Resultaten führen würde, so habe ich aus den erwähnten Beobachtungsreihen alle ausgeschieden, bei denen die mittlere Temperatur nicht unter 19° oder über 21° Wärme betrug, sodass nur 48 übrig blieben, welche zwei Serien bilden, und von denen eine, von Ende Juli bis Ende August, 14 Beobachtungsreihen bei Temperaturen von +21° bis +26,1° enthält, und die andere, von Ende September bis Mitte December, 34 Beobachtungsreihen bei Temperaturen von 3,1° bis 17°. In folgender Tabelle habe ich alle 48 Beobachtungsreihen verzeichnet, und es bedeutet in derselben: A die Anzahl der Ablesungen; B die Dauer der Beobachtungen in Stunden; C den Gangunterschied der Uhr und des Chronometers während der ganzen Zeit des Experiments in Secunden, D denselben Gangunterschied für die Dauer einer Stunde in Secunden, E die äussersten Grenzen der Temperatur während der Dauer des Experiments, F die mittlere Temperatur während der Dauer des Experiments; G den Einfluss von einem Centigrad in einer Stunde auf den Gang der Uhr.

Wie man aus nachstehender Tabelle ersieht, ist der Einfluss eines Centigrades Wärme in einer Stunde auf den Gang der Uhr, abgeleitet allein aus den 14 Beobachtungsreihen bei Temperaturen über $+21^0 = \frac{5,60}{14} = 0,400$

	A.	*B.*	*C.*	*D.*	*E.*	*F.* 20°	*G.*
1	9	10^h	$4,3^s$	$0,40^s$	20,5—21,8°	+ 1,1°	^{s} 0,40
2	4	4	3,5	0,87	21,4—22,7	+ 2,2	0,40
3	9	10,5	7	0,67	21,3—22,3	+ 1,6	0,42
4	9	13	18	1,38	21,8—23,5	+ 3,0	0,46
5	11	15	20	1,35	22,8—24,3	+ 3,8	0,35
6	9	16,5	25	1,51	23,3—24,0	+ 3,6	0,42
7	10	14,5	27	1,86	24,0—25,5	+ 5,0	0,36
8	7	15	30,5	2,03	24,0—25,4	+ 5,1	0,40
9	5	7	15	2,14	25,0—27,0	+ 6,1	0,35
10	7	15	31,5	2,10	25,0—25,8	+ 5,4	0,39
11	2	4	7,5	1,87	24,3—25,6	+ 4,9	0,38
12	4	11	16,5	1,50	23,3—24,0	+ 3,7	0,40
13	5	14	17	1,21	22,3—23,8	+ 2,9	0,42
14	4	15,5	14	0,90	21,4—22,5	+ 2,0	0,45
							5,60
15	8	14,3	21,5	1,50	16,5—17,5	— 3,0	0,50
16	7	12	21	1,75	15,8—16,3	— 3,9	0,45
17	3	6	10	1,66	16,4—16,8	— 3,4	0,49
18	6	13	24,5	1,88	15,8—16,6	— 3,6	0,50
19	2	13	19	1,46	16,6—16,8	— 3,3	0,44
20	6	9	20	2,22	14,7—15,0	— 5,0	0,44
21	4	8	16,5	2,06	15,2—15,5	— 4,6	0,45
22	2	5	10	2,00	15,0—15,2	— 4,9	0,41
23	4	6	13,5	2,25	13,6—14,2	— 6,1	0,37
24	3	7	15	2,14	13,3—14,0	— 6,1	0,34
25	10	14	33	2,35	12,5—13,4	— 6,9	0,34
26	6	15	41	2,73	13,0—13,5	— 6,6	0,41
27	4	5	13	2,60	13,2—13,5	— 6,6	0,39
28	2	13,5	29	2,14	14,2—15,2	— 5,3	0,40
29	2	13	32,5	2,50	14,0—14,2	— 5,9	0,42
30	2	6	17,5	2,91	12,7—13,0	— 7,2	0,40
31	4	15	42	2,88	13,0—13,5	— 6,8	0,42
32	3	16	45	2,81	13,0—13,8	— 7,0	0,40
33	3	12	39,5	3,29	12,5—12,5	— 7,5	0,44
34	9	12	39,7	3,31	10,0—11,4	— 9,2	0,36
35	3	14	40	2,86	11,6—12,3	— 7,9	0,36
36	5	12	44	3,66	10,2—10,7	— 9,4	0,39
37	5	9	33,5	3,72	9,2—11,0	— 9,4	0,40
38	7	15	52	3,47	9,9—10,1	—10,8	0,35
39	6	14	48,2	3,45	9,8—10,2	—10,8	0,35
40	2	6	21	3,50	10,2—10,2	— 9,8	0,36
41	5	15	57	3,80	10,0—10,5	— 9,7	0,39
42	3	10	35,5	3,56	9,3— 9,8	— 9,4	0,38
43	4	14	68	4,57	8,2— 8,4	—11,5	0,42
44	2	3	16	5,33	6,6— 6,8	—13,3	0,40
45	4	11	56,5	5,5	6,3— 6,9	—13,4	0,41
46	3	12	67	5,6	5,2— 5,9	—14,2	0,39
47	4	12	72	6	4,3— 4,7	—15,4	0,39
48	3	12	79	6,6	2,2— 3,5	— 3,1	0,39
							13,75

$$\frac{5{,}60}{14} = 0{,}400 \qquad \frac{13{,}75}{34} = 0{,}404 \qquad \frac{5{,}60 + 13{,}75}{48} = 0{,}403$$

Secunden, abgeleitet allein aus den 34 Beobachtungsreihen bei Temperaturen unter $+19^0 = \frac{13,75}{34} = 0,404$ Secunden, und wenn man die Beobachtungen über $+21^0$ und unter $+19^0$ zusammennimmt $= \frac{13,75 + 5,60}{48} = 0,403$ Secunden.

Die Aenderung der Tonhöhe der Gabel $C = 128$ v. s., welche durch einen Gangunterschied der Uhr von einer Secunde in der Stunde angezeigt wird, beträgt aber $\frac{128}{3600} = 0,0356$ v. s. und also für einen Gangunterschied von 0,403 Secunden, $0,0356 . 0,403 = 0,0143$ v. s.

Um dieses Resultat auch bei Temperaturen, welche über die Grenzen der direct beobachteten hinausgehen, mit Sicherheit anwenden, und auch bei Stimmgabeln von verschiedener Stärke und verschiedener Tonhöhe, verwerthen zu können, war es nöthig, direct zu untersuchen, ob der Temperatureinfluss auch bei bedeutend grösserer Wärme oder Kälte noch proportional bleibt, wie er es in den Temperaturgrenzen zu sein scheint, in denen obige Beobachtungen gemacht wurden, ferner, ob die Wirkung der Wärme auf Gabeln von gleicher Tonhöhe aber verschiedener Masse dieselbe ist, und schliesslich, ob nahezu gleichgeformte Stimmgabeln von verschiedener Tonhöhe im Verhältniss ihrer Schwingungszahlen von der Temperatur beeinflusst werden.

Ich wendete bei diesen Experimenten einen Kasten mit sehr dicken Holzwänden an, dessen Boden aus einer Eisenplatte bestand, welche durch einen untergesetzten kleinen Gasapparat beliebig erhitzt werden konnte. Die Vorderwand wurde durch eine starke Spiegelglasscheibe gebildet, und in der Decke befand sich eine Oeffnung, in welche eine dickwandige Glasröhre eingesetzt war, deren aus dem Kasten hervorragendes Ende nach Belieben offen gelassen oder durch einen Kork geschlossen werden konnte. — Die Temperatur der Luft in diesem Kasten war natürlich je nach der Entfernung von der geheizten Bodenplatte sehr verschieden, sie konnte jedoch an derselben Stelle leicht während langer Zeit constant erhalten werden, oder

vielmehr in geringen Grenzen um denselben Wärmegrad oscillirend, indem man die Gasflammen verkleinerte oder vergrösserte, auch die Glasröhre in der Decke offen liess oder schloss, je nachdem das Thermometer über den gewünschten Wärmegrad zu steigen oder zu sinken anfing.

Um zu sehen, ob der Wärmeeinfluss auf die Gabel bei in weiteren Grenzen verschiedenen Temperaturen derselbe bleibt, wendete ich zuerst eine Gabel $C(Ut_1) = 128$ v. s. an, die in Grösse und Form der des Apparates vollständig gleich war, auch einen eben solchen Spiegel mit Gegengewicht und eine gleiche Stimmvorrichtung trug. Da die Dimensionen des Kastens nicht gestatteten, sie in ihrer ganzen Länge der Eisenplatte parallel zu befestigen, so wurde sie an der Decke desselben vertical mit den Zinken nach unten disponirt, wobei diese also durch sehr verschieden warme Luftschichten reichten, sodass demnach nur von vergleichenden Experimenten, aber in keiner Weise von absoluten Bestimmungen die Rede sein konnte. Die Schwingungen der Gabel, am Kasten selbst durch eine einfache Vorrichtung erregt, wurden in der bekannten Weise optisch beobachtet, indem ein Lichtstrahl auf ihren Spiegel und von diesem auf den Spiegel einer zweiten, vorher mit ihr im Unisono gestimmten, geleitet wurde, die in genügender Entfernung von dem Kasten horizontal aufgestellt war und also, wenn die Gabeln vibrirten, die Ellipse sehen liess, welche durch ihre Schwankungen jede Abweichung von der ursprünglichen Tonhöhe der Stimmgabel im Kasten anzeigte. — War die Temperatur im Kasten an der Decke in der Nähe der Biegung der Gabel während mehrerer Stunden um 5° wärmer erhalten, als die im Zimmer, welche 23° betrug, so wurde die Gabel um 1 v. s. in 10 Secunden vertieft, betrug der Unterschied der Temperatur im Kasten an derselben Stelle und im Zimmer aber 25°, so entstand eine Vertiefung um 1 v. s. erst in 2,37 Secunden, statt in 2, wie die Resultate bei der Temperaturdifferenz von 5° erwarten liessen.

Noch zahlreichere Versuche in derselben Richtung

stellte ich mit einer Gabel $\bar{c}$ (Ut_3) = 512 v. s. an. Diese wurde horizontal, parallel zu der erwärmten Platte befestigt, und die Enden ihrer Zinken reichten bis dicht vor die Glasplatte, sodass ihre Schwingungen mit dem Vibrationsmikroskop beobachtet werden konnten, welches natürlich immer nur für die kurze Zeit der Beobachtung der Glasplatte genähert, sonst aber in genügender Entfernung vom Kasten gehalten wurde. Das Thermometer reichte mit seinem Quecksilberbehälter bis zwischen die Zinken der Gabel. Die Temperatur im Zimmer betrug durchschnittlich $+26^0$, und eine Erhöhung derselben im Kasten um 5^0 ergab für den Einfluss eines Wärmegrades 0,059 v. s., eine Erhöhung von 10^0 ergab 0,055, und die von 15^0, 0,054 v. s. als mittlere Werthe. Bei nur zwei Experimenten, bei welchen der Temperaturunterschied bis zu 30^0 gesteigert worden war, erhielt ich einmal für den Einfluss eines Wärmegrades 0,053 v. s., das andere mal 0,055 v. s., sodass der Mittelwerth gleich dem bei der Temperaturdifferenz von 15^0 gefundenen war.

Man ersieht aus allen diesen Ergebnissen, dass es sich hier immer nur um sehr kleine Differenzen handelt, deren Grösse schon in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen kann, und dass man also jedenfalls praktisch, wenigstens bis zu 50^0 bis 60^0 Wärme, den Einfluss der Wärme auf eine Stimmgabel als constant betrachten kann. Die grosse Sorgfalt jedoch, mit der ich die zahlreichen Versuche ausgeführt, deren summarische Resultate ich oben gegeben, und die geringen Abweichungen der einzelnen Beobachtungen voneinander und von den aus ihnen gezogenen Mitteln lassen annehmen, dass der Wärmeeinfluss bei verschieden hohen Temperaturen nicht absolut derselbe bleibt, sondern bei immer höher werdenden Temperaturen etwas kleiner wird.

Was den Einfluss der Wärme anf Gabeln von gleicher Tonhöhe aber verschiedener Masse anlangt, so gaben zwei Gabeln $\bar{c}$ = 512 v. s. mit Zinken von 6 bis 4 mm Dicke, welche bei $+20^0$ genau im Einklang gestimmt waren,

nachdem sie 5 Stunden lang in dem Kasten, parallel zur Bodenplatte und in gleicher Entfernung von derselben, einer Temperatur von 50° ausgesetzt gewesen waren, miteinander annähernd eine Schwebung in 6 Secunden, zwei Gabeln $\bar{c}$ (Ut_4) mit 7 und 3 mm Zinkendicke, unter gleichen Verhältnissen zu 45° erhitzt, eine Schwebung in 5 Secunden, und zwei Gabeln $\bar{\bar{c}}$ (Ut_5), welche 7 und 5 mm dicke Zinken hatten, ebenfalls zu 45° erhitzt, eine Schwebung in 4 Secunden, welche Werthe den Unterschied des Einflusses von einem Wärmegrade für diese drei Gabelpaare zu annähernd 0,011 v. s., 0,016 v. s. und 0,02 v. s. bestimmen. — Dabei waren es immer die stärkeren Gabeln, welche am meisten von der Wärme influencirt und somit am tiefsten geworden waren.

Da es mir bei diesen Experimenten nicht auf eine äusserst genaue Bestimmung der Tondifferenz bei den erhitzten Gabelpaaren ankam, so wurden die Gabeln nicht im Kasten selbst zum Tönen gebracht, sondern ausserhalb desselben entweder nacheinander einzeln geprüft, oder beide zugleich aus dem Kasten genommen und auch zusammen angeschlagen. Dabei war es denn bemerkenswerth, dass während einer sehr kurzen Zeit nach ihrer Entfernung aus dem Kasten die Differenz ihrer Tonhöhe etwas zunahm, weil wahrscheinlich die dünnere Gabel sich schneller abkühlte und somit schneller höher wurde, als die tiefere dicke.

Um den Unterschied in der Aenderung der Tonhöhe verschieden starker Stimmgabeln bei noch grösseren Temperaturveränderungen zu beobachten, machte ich eine Reihe Versuche, indem ich die betreffenden Stimmgabeln zusammen in Eiswasser erkältete und in kochendem Wasser erhitzte, und die ganze Aenderung ihrer Tonhöhe bei diesem grossen Temperaturwechsel bestimmte. Dieses Letztere war nicht leicht, da zu allen anderen Uebelständen dieser Methode noch der Umstand hinzutritt, dass die bis zur Temperatur des kochenden Wassers erhitzten Gabeln nur noch eine ausserordentlich kurze Schwingungsdauer haben und nach dem Anschlagen gleich wieder aufhören zu

vibriren. Von einer grossen Genauigkeit der absoluten Werthe konnte daher hier noch weniger die Rede sein, als bei den Versuchen im geheizten Kasten, aber diese Experimente dienten doch dazu, das schon gefundene Resultat, dass nämlich die dickeren Stimmgabeln stärker von der Wärme beeinflusst werden, als dünne, noch bestimmter festzustellen. So betrug der Unterschied in der Aenderung der Tonhöhe bei den beiden schon erwähnten Stimmgabeln $\overline{\overline{c}}$ ungefähr 1,5 v. s. und bei den beiden Gabeln $\overline{\overline{\overline{c}}}$ 1,8 v. s., wobei wieder die dickeren Gabeln immer diejenigen waren, welche den grössten Einfluss erlitten.

Dieses Resultat ist darum interessant, weil die Frage vorlag, worin eigentlich der hauptsächliche Grund der Wirkung der Wärme auf die Stimmgabel läge, da diese Wirkung offenbar doppelter Natur sein muss, indem durch die Wärme nicht nur die Länge der Zinken der Gabel, sondern auch ihre Elasticität verändert wird. Da nun bei verschieden starken Gabeln für denselben Ton die Länge im Verhältniss zur Dicke ihrer Zinken um so kleiner wird, als diese letztere zunimmt, so müsste der Einfluss der Temperatur auf die Tonhöhe bei dünnen Gabeln grösser sein, im Falle die Veränderung der Länge der Zinken die vornehmste Ursache der Aenderung der Tonhöhe wäre, und bei dickeren Gabeln bedeutender, wenn die Aenderung der Elasticität bei der ganzen Erscheinung die grösste Bedeutung hätte, durch die beschriebenen Beobachtungen ist nun aber festgestellt, dass dieses letztere wirklich der Fall sei.

Da verschieden starke Stimmgabeln von gleicher Tonhöhe etwas verschieden von der Wärme beeinflusst werden, so geht hieraus auch hervor, dass das Intervall, welches zwei Stimmgabeln von beliebiger Stärke und Tonhöhe bilden, meistens nicht ganz unverändert bleiben wird, wenn die Temperatur wechselt. Wendet man jedoch Gabeln an, welche nicht zu sehr in der Stärke und Form voneinander abweichen, so wird die Störung des Intervalls zweier Stimmgabeln durch den Temperaturwechsel so ausserordent-

lich gering, dass sie gar nicht in Rechnung gezogen zu werden braucht. So zeigte z. B. eine Stimmgabel $\bar{c}$, welche bei 20° Wärme mit der Gabel C des Apparates eine durchaus reine Doppeloctave bildete, bei + 12° optisch durch dieselbe Gabel beobachtet, nur eine Schwankung der Figur 1 : 4 in 50 Secunden, und bei 9° eine Schwankung in 45 Secunden, welche Abweichungen von dem reinen Intervall, resp. 0,020 v. s. und 0,022 v. s. entsprechen. Man kann also im allgemeinen unbedingt annehmen, dass der Wärmeeinfluss auf verschieden hohe Stimmgabeln von nicht zu sehr verschiedener Stärke ihren Schwingungszahlen proportional ist.

Da der für die Gabel des Apparates, $C = 128$ v. s., gefundene Werth für den Einfluss von einem Centigrad Wärme = 0,0143 v. s. ist, so kann man nun also ganz im allgemeinen sagen, dass die Schwingungsperiode einer Stimmgabel durch die Temperaturdifferenz eines Centigrad Wärme um $\frac{1}{8943}$ vergrössert oder verringert wird.

Die Aenderung aber, welche speciell die Tonhöhe der Normalgabel $Ut_3 = 512$ v. s. bei 20° durch die Temperaturdifferenz eines Centigrad Wärme erleidet, beträgt 0,0572 v. s.

Diese in oben beschriebener Weise mit Hülfe der Stimmgabeluhr construirte Normalgabel mit der Gabel $\bar{c}$, welche bisher als Etalon gedient, bei durchaus gleicher Temperatur verglichen, ist tiefer als diese und lässt mit ihr 11 Schwebungen in 62 Secunden hören, wodurch die wahre Schwingungszahl der alten Gabel zu 512,3548 v. s. bei 20 Centigrad Wärme bestimmt wird. Da ein Grad Wärme eine Vertiefung derselben Gabel um 0,0572 v. s. bewirkt, so macht sie 512 v. s. bei $20 + \frac{0,3548^0}{0,0572} = 26,2$ Centigrad Wärme.

Dieses letzte Resultat habe ich noch durch einige sehr sorgfältig ausgeführte directe Versuche bestätigt gefunden, indem ich eine Gabel Ut_3, mit der alten Stimmung, in dem Wärmekasten durch sehr lange fortgesetzte langsame Er-

wärmung bis zum vollkommenen Einklang mit der neuen Gabel brachte, und dann diesen Einklang während einer längern Zeit zu bewahren suchte, wobei ich einen Temperaturunterschied zwischen der Luft im Kasten und der des Zimmers von etwas über 6° und unter 6,5° fand.

Will man also bei einer beliebigen Temperatur die richtige Schwingungszahl seiner Gabel wissen, so muss man, je nachdem man eine Gabel von 512 v. s. bei 20° oder bei 26,2° anwendet, den Unterschied dieser Temperatur in Graden mit der von 20° oder 26,2° nehmen, diese Zahl mit 0,0572 multipliciren und den gefundenen Werth, wenn die Temperatur unter resp. 20° und 26,2° war, zu 512 v. s. zuschlagen, im entgegengesetzten Falle aber von 512 v. s. abziehen.

Um diese Rechnung zu vermeiden, schien es mir zweckmässig, eine Gabel so einzurichten, dass sie bei jeder Temperatur genau 512 v. s. geben könne. Ich versah zu diesem Zwecke jede Zinke derselben mit einer kleinen Scheibe, welche um ihr Centrum gedreht und in jeder Stellung befestigt werden konnte, und befestigte an ihren Rändern ein kleines Gewicht, welches gestattete, durch eine halbe Umdrehung der Scheibe die Schwingungszahl der Gabel von 511,142 v. s. bis zu 512,858 v. s. bei 20° zu verändern. Bei der höchsten Stellung der Gewichte, bei der die Gabel bei 20° 511,142 v. s. macht, muss die Temperatur also 15° unter 20° sinken, damit die Schwingungszahl 512 v. s. werden könne, und ebenso muss die Temperatur 15° über 20° steigen, wenn die Gabel bei der tiefsten Stellung der Gewichte 512 v. s. geben soll. Auf dem Rande der Scheiben ist angegeben, welche Stellung ihnen bei jeder Temperatur zwischen 5° und 35° gegeben werden muss, damit die Schwingungszahl der Gabel genau 512 v. s. werde. — Laufgewichte, mit denen ich zuerst dasselbe Resultat zu erreichen gesucht, hatten sich als weniger praktisch ergeben, da sie nicht ohne Schwierigkeit mit gehöriger Solidität so äusserst leicht construirt werden konnten, als es nöthig gewesen wäre, wenn sie die geringe Tonverän-

derung bei einer genügend weiten Verschiebung bewirken sollten.

Von der Normalgabel $\bar{c} = 512$ v. s. bei 20 Centigrad Wärme kann man mit Leichtigkeit auf folgende Weise zu einer Gabel von 870 v. s. bei 15° Wärme gelangen, welches bekanntlich die Stimmung der französischen Normalgabel $\bar{a}$ (La_3) sein soll, die sich im Conservatoire de musique et de déclamation zu Paris befindet.

Man stimmt vermittelst der Stösse eine Gabel um 10 v. s. höher als die Gabel $\bar{c} = 512$ v. s. bei 20° und stellt zwischen dieser Gabel von 512 v. s. und einer zweiten optisch das absolut reine Verhältniss von 3 : 5 her, wo man dann eine Gabel von 870 v. s. bei 20° Wärme erhält. — Da nun der Einfluss eines Wärmegrades auf eine Gabel von 870 v. s. = 0,0972 v. s. ist, so würde diese selbe Gabel bei 15° $870 + 5 . 0{,}0972 = 870{,}486$ v. s. machen, oder sie müsste bei 20° um 0,486 v. s. tiefer als 870 v. s. sein, um bei 15° genau 870 v. s. geben zu können. Man hat also nur mit der Gabel von 870 v. s. bei 20° bei gleicher Temperatur eine zweite um 0,486 v. s. in der Secunde oder um 15 Schwebungen in $61^1/_2$ bis 62 Secunden tiefer zu stimmen, um die gewünschte Gabel von 870 v. s. bei 15 Centigrad Wärme zu erhalten.

Eine in dieser Weise construirte Gabel mit der französischen Normalgabel im Conservatoire verglichen, nachdem sie einige Tage lang neben dieser gelegen hatte, um dieselbe Temperatur anzunehmen, ergab für die Schwingungszahl der französischen Normalgabel bei 15 Centigrad Wärme 870,9 v. s., und da der Wärmeeinfluss eines Grades auf eine Gabel von 870 v. s. = 0,0972 v. s., so würde sie 870 v. s. bei 24,26 Centigrad Wärme machen.

Wenn ich diese Zahlen, welche die französische Normalgabel betreffen, nicht mit ganz derselben Genauigkeit angebe, als ich es sonst im Laufe dieser Untersuchungen immer gethan habe, so hat dieses seinen Grund darin, dass diese Gabel nur etwa 20 Secunden lang Schwebungen mit einer andern Gabel gut zu zählen gestattet, was jeden-

falls von der Wirkung des Resonanzkastens herrührt, auf dem sie befestigt ist. Nach dem Tone der Stimmgabel, und auch nach der Art seines Verklingens zu urtheilen, scheint dieser nämlich in ziemlich hohem Grade die Eigenschaften zu besitzen, bei denen, wie ich oben angegeben, ein Resonanzkasten eine starke Einwirkung auf die Schwingungen der Gabel ausübt, und wollte man daher eine sehr genaue Bestimmung der Differenz der Schwingungszahlen zwischen dieser officiellen Gabel und einer andern machen, so würde man wahrscheinlich gezwungen sein, sie von ihrem Kasten zu entfernen. Eine solche sehr weit getriebene Genauigkeit würde aber in diesem Falle wohl nicht einmal von einem grossen Interesse sein, da die Experimente nicht veröffentlicht worden sind, auf denen die Angabe der Schwingungszahl von 870 v. s. bei 15 Centigrad Wärme für diese Gabel beruht und sich somit von vornherein jeder Discussion entziehen.

Es sind im Laufe der letzten Jahre eine Reihe Bestimmungen der absoluten Schwingungszahl meiner Gabel, welche $ut_3 = 512$ v. s., ohne Angabe der Temperatur, markirt war, von verschiedenen Gelehrten veröffentlicht worden, welche alle nur wenig voneinander abweichen. So fand Prof. A. M. Mayer in Hoboken[1]) vermittelst der graphischen Methode $Ut_3 = 255{,}96$ v. d. bei 60° F. als Mittelwerth von sechs Experimenten, deren äusserste Werthe 255,94 v. d. und 256,2 v. d. waren, und die Verzögerung oder Beschleunigung der Schwingungsperiode für den Temperaturunterschied von 1° F. = $\frac{1}{22000}$; Dr. R. C. Cooley[2]), ohne Temperaturangabe, mit seinem electric. register, bei 15 Experimenten immer $ut_3 = 256$ v. d.; Lord Rayleigh[3]), ohne Temperaturangabe, mit einem gewöhnlichen Harmonium, $Ut_1 = 63{,}98$ v. d. bis 64,06 v. d., endlich

1) Mayer, Amer. Journ. of Science. Aug. 1877.
2) Cooley, Journ. of the Franklin Institute. Sept. 1877.
3) Rayleigh, Nature, p. 275. London, Jan. 1879.

Prof. Mc Leod und Lieut. Clarke[1]), ebenfalls ohne Temperaturangabe, mit Hülfe ihres Cycloscops, $Ut_3 = 256{,}281$ v. d. bis 256,287 v. d., und durch Experimente mit einem geheizten Kasten die Vertiefung einer Gabel durch 1 Centigrad Wärme = 0,011 Proc.

Eine Ausnahme von diesen, dem wahren Werthe sehr nahe kommenden Resultaten macht nur die Bestimmung des Hrn. Prof. Preyer, der $Ut_3 = 258{,}2$ v. d. fand und erklärte, dass „die erste Decimale dieser auf eine Secunde bezogenen Schwingungszahl als völlig zuverlässig feststände“[2]), während selbst die Zahl der ganzen Doppelschwingungen um zwei Einheiten von dem wahren Werthe abweicht. Dieses auffällige Resultat findet aber seine Erklärung in der Anwendung bei den Experimenten eines Tonometers, bei welchem die einzelnen Töne, statt durch Stimmgabeln, von Harmoniumzungen gebildet wurden, die auf demselben Brette befestigt und in derselben Luftmasse eingeschlossen, beim Zusammenklingen sich gegenseitig influenzirten, etwa in der Art, wie es die Pendel in den bekannten Pendelversuchen von Savart thun, wodurch das Instrument, wenn man diese Fehlerquelle unberücksichtigt lässt, zur genauen Bestimmung der Schwingungszahl vollständig unbrauchbar wird. — Hr. A. J. Ellis hat später ähnliche Resultate veröffentlicht[3]), zu denen ihn die Benutzung eines Apparates derselben Art geführt hatte, doch von Lord Rayleigh auf die muthmassliche Fehlerquelle bei seinen Bestimmungen aufmerksam gemacht[4]), hat Hr. Ellis diese seitdem schon selbst erkannt und angekündigt, dass die von ihm gefundenen Werthe einer Correctur zu unterwerfen wären.[5])

Paris, December 1879.

---

1) Mc Leod u. Clarke, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. Dec. 1877.

2) Preyer, „Ueber die Grenzen der Tonwahrnehmung“, p. 46. Jena 1876.

3) Ellis, Soc. of Arts. 23. May 1877. — Nature, p. 85. London 1877.

4) Rayleigh, Nature, p. 12. London 1877.

5) Ellis, Nature, p. 26. London 1877.

IV. *Untersuchungen über die aequipotentiale Vertheilung der magnetischen Fluida cylindrischer Stahlstäbe; von W. Schaper.*

I. Historische Notizen.

Es ist schon mehrfach der Versuch gemacht worden, auf experimentellem Wege die Vertheilung des Magnetismus in Stahlstäben zu ermitteln, ohne dass bislang endgültige Resultate erreicht wurden. Von allen Methoden scheint diejenige am geeignetsten zu sein, die den Magnetismus aus den von ihm in Drahtkreisen inducirten Strömen bestimmt, weil sie eine grosse Schärfe bezüglich der Beobachtungen wie der mathematischen Behandlung gestattet.

Lenz und Jacobi waren die ersten, welche diese Methode anwandten, und zwar auf Electromagnete. Ihre Arbeiten sind schon öfter besprochen.

Insbesondere benutzte R. v. Rees ihre Beobachtungen. Dieser suchte nachzuweisen, dass der freie Magnetismus nach dem Gesetze $y = B(m^z - m^{-z})$ vertheilt sei, wenn z die Entfernung der Punkte des Magnets von der Mitte bedeutet. Uebrigens erregt es Bedenken, dass v. Rees den in der Inductionsrolle inducirten Strom sich nur durch das unmittelbar unter derselben befindliche magnetische Moment entstanden denkt.

Bei der Untersuchung von Stahlmagneten wandte v. Rees folgendes Verfahren an. Er bewegte eine Inductionsrolle von dem zu untersuchenden Punkte z_1 fort über das Ende des Magnets hinaus und setzte den entstehenden Strom proportional $\int_{z_1}^{l} y\,dz$, worin y wie oben den freien Magnetismus in z bedeutet. Auch hier ist den bestehenden Verhältnissen nicht genügend Rechnung getragen worden. Wir denken uns nämlich die Bewegung der Inductionsrolle von z_1 bis über das Ende des Stabes in Theile zerlegt.

$$\int_{z_1}^{l} y\,dz = \int_{z_1}^{z_2} y\,dz + \int_{z_2}^{z_3} + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} + \int_{z_n}^{l}.$$

Während der Bewegung von z_1 bis z_2 wirken die Theile des Stabes, die diesem Intervall nahe liegen, von $z_1 - \zeta_1$ bis $z_2 + \zeta_2$ u. s. f., bis z. B. auf dem Wege von z_{n-2} bis z_{n-1} das Intervall von $z_{n-2} - \zeta_{n-2}$ bis $z_{n-1} + \zeta_{n-1} = l$ inducirt. Bei der nun folgenden Bewegung von z_{n-1} bis z_n inducirt $z_{n-1} - \zeta_{n-1}$ bis l, bei der letzten von z_n bis l inducirt $z_n - \zeta_n$ bis l. Die dann noch folgende Entfernung der Rolle vom Stabe bringt einen Strom S hervor. Wir sehen also, dass zu den letzten Theilbewegungen eine immer kleinere Wirkungssphäre gehört, dass sie also nothwendig einen geringern Strom hervorbringen, als wenn sie nicht am Ende lägen. Liegt nun z_1 in der Mitte des Stabes, so treten stets die drei letzten Integrale als additive Grössen auf, sie haben also durchaus keinen Einfluss auf die Gestalt der die Inductionsströme darstellenden Curve. Dies geht nach unserer Bezeichnungsweise bis $z_{n-1} = l - \zeta_{n-1}$, d. h. so weit, bis die Rolle von einem solchen dem Ende sehr nahen Punkte abgezogen wird, dass bereits beim ersten Differential der Bewegung genau schon die Strecke des Magnets bis zum Endpunkte wirkt. Von hierab müssen die Resultate bedeutend unrichtig werden.[1])

Eine genauere mathematische Behandlung des Problems suchte Rothlauf[2]) durchzuführen. Er nimmt den Magnetismus lediglich in der Mantelfläche cylindrischer Magnete an, denkt sich die Inductionsrolle um ein kleines Stück über dem Magnet verschoben und gelangt zu folgendem Integral für den Inductionsstrom:

$$J_z = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{dw\,.\,dz\,.\,f(z)\,.\,ds\,.\,ds'\,(R - r\cos\varphi)}{[(z-w)^2 + R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi]^{\frac{3}{2}}}.$$

Darin ist $f(z)$ der Magnetismus im Punkte z, w die Grösse der Verschiebung der Rolle, ds' das Element des kreisförmigen Querschnittes des Magnets, ds dasjenige der

1) Vgl. Wiedemann, Galvanismus.

2) Rothlauf, Pogg. Ann. **116**. p. 592. 1862.

Rolle, r der Radius des Querschnittes des Magnets, R derjenige der Inductionsrolle und φ der Winkel, den der nach ds gezogene Radius R mit einer festen Lage bildet. Weil $f(z)$ unbekannt ist, so nimmt Rothlauf an, dass man eine Interpolationsfunction II. Grades dafür setzen könne. Da die Auflösung des Integrals nicht gelingt, so wird ein Linearmagnet substituirt. Statt nun aber als Integrationsgrenzen für z die durch das Problem vorgegebenen $z = \pm l$ zu nehmen, nimmt Rothlauf an, dass nur ein Theil des Magnets bei einer jeden Stellung der Spirale inducire. Da sich nur die obere Grenze dieses Theils näherungsweise, die untere aber durchaus nicht bestimmen lässt, so ist ersichtlich, dass die Constanten des Problems von der Wahl der Grenzen abhängig werden, was natürlich unzulässig ist. Uebrigens ergab sich auf diese Weise, dass die Gleichung:

$$y = B(m^z - m^{-z})$$

ziemlich genau die Vertheilung des freien Magnetismus angibt, dass aber am Ende sehr viel mehr magnetisches Fluidum zu denken ist, als aus der Annahme des in Rede stehenden Vertheilungsgesetzes folgt. Die Grösse der am Ende vorkommenden Abweichungen zeigt die folgende Tabelle.

Länge des Magnets	Beobacht. Ablenkung	Berechnete Intensität	Biot'sche Curve	Differenz	Mittel d. vorhergeh. Differenz
10 par Z.	27,62	74,76	32,03	−42,73	±0,26
10	26,14	71,68	32,61	−39,07	±0,77
8	23,53	63,36	31,51	−31,85	±0,59
4	17,44	48,66	25,74	−22,92	±0,52

Wir sehen, dass keine der mitgetheilten Entwickelungen einwurfsfrei ist. Man kann weder annehmen, dass bei der Bewegung einer Inductionsrolle über einem Magnet nur der jedesmal unter der Rolle befindliche Magnetismus inducire, noch dass man für die Wirkungsweite mehr oder weniger willkürlich andere Grenzen nehmen kann als die durch die Enden des Magnets vorgeschriebenen. Auch

die Vertheilung des Magnetismus in der Axe, wie sie stillschweigend oder ausdrücklich bisher vorausgesetzt wurde, ist nicht ohne Nachweis der Berechtigung anzunehmen.

II. Entwickelungen für neue Versuche.

Da es sich um die Wirkung von Magneten auf ziemlich dicht anschliessende Inductionsrollen handelt, so kann man den Magnetismus zunächst nur auf der Oberfläche der Magnete, auf der es ja nach Gauss stets eine aequipotentiale Vertheilung gibt, annehmen. Dazu kommt, dass nach den Untersuchungen von v. Feilitsch[1]) bei nicht starken magnetisirenden Kräften der Magnetismus sich meist in den oberflächlichen Schichten befindet. Dies ist insofern wichtig, als mithin eine grosse Uebereinstimmung zwischen der Gauss'schen idealen und der wirklichen Vertheilung anzunehmen ist. Hieraus ist auch ersichtlich, dass die Endflächen der Stäbe bedeutenden Magnetismus haben müssen.

Soll nun untersucht werden, ob nicht für praktische Zwecke mit hinreichender Genauigkeit eine Vertheilung des Magnetismus in der Axe substituirt werden kann, so liegt die Entscheidung nur im Experiment.

Wir haben uns dann zu denken, dass die Vertheilung des Fluidums des Cylindermantels einer ähnlichen in der Axe, und das Fluidum der Endflächen einer Masse in den Endpunkten entspricht.

Es ist nun im Folgenden aus den in zwei Inductionsrollen, die verschiedenen Radius hatten, inducirten Strömen je eine zugehörige Vertheilung in der Axe der Magnete berechnet. Jede dieser Vertheilungen ist derart, dass sie die Wirkung des Magnets für eine bestimmte Entfernung, die dem Radius der betreffenden Rolle gleich ist, erklärt. Für den Fall nun, dass beide Rollen nahezu dasselbe Vertheilungsgesetz angeben, und aus jedem Gesetze sich die Inductionswirkungen auf die nicht zugehörige Rolle er-

1) v. Feilitsch, Pogg. Ann. **80.** p. 321. 1850.

geben, ist man allerdings zu dem Schlusse berechtigt, dass für praktische Zwecke die gefundene Vertheilung in der Axe als eine aequipotentiale anzusehen ist. Sind jedoch die gefundenen Vertheilungsgesetze verschieden, so ist evident, dass der Magnetismus nicht in der Axe vertheilt gedacht werden kann.

Es bezeichne P die Lage des Linienelements du, in diesem sei μ die Dichte des Magnetismus, also $\mu\, du$ seine Masse. Durch ihre Bewegung entsteht in einem nahen Drahtkreise ein Strom. Bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem seien ξ, η, ζ die Coordinaten von P, x, y, z diejenigen eines Drahtelementes ds in M, und es sei $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Die Bewegung des Punktes P in der Richtung der XYZ-Axe sei resp. gleich p, q, t, und die Gesammtbewegung $w = \sqrt{p^2 + q^2 + t^2}$.

Da hier transversale Kräfte wirken, so entsteht durch die Bewegungscomponente dq und dt ein Strom in der X-Axe, der proportional dem Magnetismus $\mu . du$ und der Projection des Drahtelementes ds auf die X-Axe und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ϱ der Punkte M und P ist.

Also ist der Strom in der X-Axe:

$$dX = \frac{\mu\, du\, ds \cos(s/x)}{\varrho^2} \left\{ \frac{y - (\eta - q)}{\varrho} dt - \frac{z - (\zeta - t)}{\varrho} dq \right\}$$

analog:

$$dY = \frac{\mu\, du\, ds \cos(s/y)}{\varrho^2} \left\{ \frac{z - (\zeta - t)}{\varrho} dp - \frac{x - (\xi - p)}{\varrho} dt \right\}$$

$$dZ = \frac{\mu . du . ds \cos(s/z)}{\varrho^2} \left\{ \frac{x - (\xi - p)}{\varrho} dq - \frac{y - (\eta - q)}{\varrho} dp \right\}.$$

Wir legen nun das Coordinatensystem der Art, dass die Z-Axe senkrecht auf dem Drahtkreise steht und durch seine Mitte geht (Taf. II Fig. 3), daher:

$$\sphericalangle (s/z) = 90^0 \qquad \cos(s/z) = 0.$$

Ferner setzen wir $x = 0$, d. h. wir lassen den Anfangspunkt des Drahtelementes mit der Y-Axe zusammenfallen, sodass:

$$\sphericalangle (s/x) = 0 \qquad \sphericalangle (s/y) = 90^0$$

mithin $y = R$, wenn wir mit R den Radius des Drahtkreises bezeichnen. Es reducirt sich daher die Wirkung der Bewegung von P auf:

$$dX = \frac{\mu . du\, ds}{\varrho^3} \{[R - (\eta - q)]\, dt - [z - (\xi - t)]\, dq\},$$

indem $dY = 0$; $dZ = 0$.

Wir bestimmen ferner, dass der Punkt P nur parallel der Z-Axe verschoben werde, also:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad w = t, \quad dq = 0.$$

Somit ist das Differential des inducirten Stromes:

$$\text{(I*)} \qquad dX = dJ = \frac{\mu\, du\, ds}{\varrho^3} \{R - \eta\}\, dt.$$

Fällt der magnetische Punkt in die Z-Axe, so ist $\eta = 0$, also:

$$dJ = \frac{\mu\, du\, R\, ds\, dt}{\varrho^3}.$$

Denken wir uns nun den Magnetismus in der Axe des Magnets vertheilt und lassen dieselbe so mit der Z-Axe zusammenfallen, dass der Mittelpunkt des Stabes mit dem Coordinatenanfangspunkt übereinstimmt, so ist die Dichte μ eine Function von z, und wir werden diese allgemein darstellen können in der Form:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n z^n$$

Bei regelmässiger Magnetisirung wird in zwei von der Mitte gleich weit entfernten Punkten der Magnetismus an absoluter Grösse gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt sein. Also $f(-z) = -f(z)$, daher $M_{2k} = 0$ für $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$, sodass:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} M_{2k+1} z^{2k+1}.$$

Indessen wird in Wirklichkeit eine ganz symmetrische Vertheilung nicht stattfinden, und wir wollen daher im Folgenden die allgemeine Form:

$$f(z) = \sum_n M_n z^n$$

beibehalten.

Befindet sich die Inductionsrolle über dem Punkte Z, so können wir uns für diesen Punkt das Gesetz der Vertheilung dargestellt denken durch eine nach Potenzen von $z-Z$ fortschreitende Reihe. Wenn wir $z-Z=u$ setzen, also u positiv rechnen in der Richtung der positiven Z-Axe, so erhalten wir:

$$f(u)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\mu_m\, u^m,$$

worin der allgemeine Coëfficient μ_m abhängt von dem Coëfficienten M_n und von Z. Da nun $z=Z+u$ also:

$$z^n=(Z+u)^n=\sum_{m=0}^{m=n}{}^m\overset{n}{\mathfrak{B}}\, Z^{n-m}\, u^m,$$

wenn ${}^m\overset{n}{\mathfrak{B}}$ den $m$ten Binomialcoëfficienten der $n$ten Potenz bedeutet, so erhalten wir aus $f(z)$ den Coëfficienten μ_m einfach, indem wir z^n durch Z und u ausdrücken und darauf den Coefficienten von u^m suchen. Letzteren finden wir aber, indem wir n alle möglichen Werthe geben und dann die Summe der Coefficienten aus u^m bilden. Damit aber z^n überhaupt u^m enthält, muss $n\geqq m$ sein, daher lautet der Coëfficient von u^m:

$$\mu_m=\sum_{n\geqq m}M_n\,{}^m\overset{n}{\mathfrak{B}}\, Z^{n-m},$$

wobei vielleicht besondere Erwähnung verdient, dass $\mu_0=M_0$.

Kehren wir nunmehr zu dem aufgestellten Ausdruck für den Differentialstrom zurück, so ist zu setzen $\mu=f(u)$, und wenn $d\psi$ der Winkel, den der nach dem Endpunkte von ds gezogene Radius R mit der X-Axe bildet, so ist $R\,d\psi=ds$, daher folgt als Ausdruck für den Gesammtstrom:

$$J_z'=\int\!\!\int\!\!\int\frac{f(u)\,.\,R^2\,.\,d\psi\,.\,du\,.\,dt}{\varrho^3},$$

worin $\varrho^3=\{(u-t)^2+R^2\}^{\frac{3}{2}}$.

Das Integral über ψ hat die Grenzen 0 und 2π. Da u die Entfernung des inducirenden Magnetismus vom Mittelpunkt der Spirale bedeutet, so hat das hierauf bezügliche Integral $u_2=l-Z$ als obere und $u_1=-(l+Z)$ als untere Grenze. Das dritte Integral endlich hat die Grenzen $Z-t_1$ und $Z+t_1$.

wenn $2t_1$ die Grösse der Bewegung der Rolle bedeutet. Allein diese Bewegung beträgt in den unten angeführten Versuchen nur 1 mm, also ändert sich die Entfernung jedes Punktes der Axe nur unbedeutend gegen die mittlere Stellung der Inductionsrolle. Da nun in einem so kleinen Intervalle, wie unten experimentell nachgewiesen wird, der Magnetismus sich nur unmerklich ändert, so können wir statt $(u - t)$ einfach u und $dt = 1$ setzen. Dann ist der Inductionsstrom, der durch die magnetische Axe hervorgebracht wird:

$$i_1 = \int\limits_{u=u_1}^{u_2} \int\limits_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \frac{f(u) \,.\, R^2 \,.\, d\psi \, du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der vom Magnet inducirte Gesammtstrom wird aber auch von den magnetischen Massen der Endpunkte bedingt. Bezeichnen wir mit N_2 die nordmagnetische, mit N_1 die südmagnetische Masse, so erhalten wir den Beitrag zum Inductionsstrom, indem wir statt des im Linienelement du concentrirten Magnetismus $f(u) \,.\, du$ einfach N_1 resp. N_2 setzen und die Integration in Bezug auf u fortfallen lassen, da $u = u_1$ resp. $= u_2$ ist. Der Gesammtstrom ist daher:

$$J_z = \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} \int\limits_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u) \,.\, R^2 \, d\psi \, du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} \frac{N_1 \, R^2 \, d\psi}{(u_1^{\,2} + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} \frac{N_2 \, R^2 \, d\psi}{(u_2^{\,2} + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituiren wir für $f(u)$ die oben angegebene Reihe und führen die Integration nach ψ aus, so folgt:

$$J_z = 2 R^2 \pi \sum_m \mu_m \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{u^m \, du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2 R^2 \pi N_1}{(u_1^{\,2} + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2 R^2 \pi N_2}{(u_2^{\,2} + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzen wir zur Vereinfachung:

$$\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{u^m \, du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = A_m, \quad \text{so folgt:} \quad A_0 = \left| \frac{u}{R^2 \sqrt{u^2 + R^2}} \right|_{u_1}^{u_2};$$

$$A_{2k} = \left| \left\{ \frac{u^{m-1}}{m-2} + \sum_{h=1}^{h=\infty} (-1)^h \frac{(m-1)(m-3)\dots(m-2h+1)\, u^{m-2h+1} \, R^{2h}}{} \right\} \frac{1}{\sqrt{u^2 + R^2}} \right.$$

$$\left. + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{(m-1)(m-3)\dots 3 \, R^{m-2}}{(m-2)(m-4)\dots 2} \log \text{nat} \left(u + \sqrt{u^2 + R^2} \right) \right|_{u_1}^{u_2};$$

$$A_{2k+1} = \Bigg| \Bigg\{ \frac{u^{m-1}}{m-2}$$

$$+ \sum_{h=0}^{h=\infty} (-1)^h \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-2h+1)\,u^{m-2h+1} R^{2h}}{(m-2)(m-4)\ldots(m-2h-2)} \Bigg\} \frac{1}{\sqrt{u^2+R_2}} \Bigg|_{u_1}^{u_2}.$$

Ferner setzen wir:

$$C_1 = \frac{1}{(u_1{}^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad C_2 = \frac{1}{(u_2{}^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun ist, wie wir oben bemerkt:

$$\mu_m = \sum_{n \geqq m} M_n \, {}^m\overset{n}{\mathfrak{B}} \, Z^{n-m}$$

also:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \mu_m A_m = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \sum_{n \geqq m} M_n \, {}^m\overset{n}{\mathfrak{B}} \, Z^{n-m} = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n \sum_{0 \leqq m \leqq n} {}^m\overset{n}{\mathfrak{B}} \, A_m \, Z^{n-m}.$$

Wir können nun symbolisch:

$$\sum_{0 \leqq m \leqq n} {}^m\overset{n}{\mathfrak{B}} \, A_m \, Z^{n-m} = \left\{ [A+Z]^n \right\}$$

setzen, wenn nach Auflösung des Binomiums statt A^k wieder A_k eingeführt wird. Dann ist:

$$\sum_m \mu_m A_m = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n \left\{ [A+Z]^n \right\}$$

und:

$$\text{(II*)} \; J_z = 2R^2\pi . \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n \left\{ [A+Z]^n \right\} + 2R^2\pi \, C_1 N_1 + 2R^2\pi \, C_2 N_2 .$$

In dieser Gleichung haben wir die $(n+2)$ Unbekannten M_n, N_1, N_2, die aus einer gegebenen grösseren Anzahl Beobachtungen J_z mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden können.

Hat man aus zwei mit verschiedenen Rollen gemachten Beobachtungsreihen zwei Systeme der Constanten M_n und N_1 und N_2 berechnet, so ist das aus der einen Reihe sich ergebende System im allgemeinen nicht unmittelbar zu vergleichen mit dem andern, weil die zu Grunde gelegten Einheiten nicht dieselben sind.

Man kann jedoch die in Rede stehenden Grössen auf

die absolute magnetische Maasseinheit reduciren, wenn das magnetische Moment des untersuchten Stabes in dieser Einheit gegeben ist.

Es sei g der Quotient aus der absoluten und der unbekannten Einheit, in welcher die vorgegebenen Grössen ausgedrückt sind, so sind gM_n, gN_1 und gN_2 die Constanten der die Vertheilung angebenden Function in absolutem Maass; wir bezeichnen sie der Reihe nach mit $\mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$. Zur Bestimmung von g hat man die Gleichung:

$$\text{Magn. Moment} = g\left\{\int_{-l}^{+l} z \,.\, f(z)\,.\,dz - lN_1 + lN_2\right\}$$

$$= 2g\sum_n M_n \frac{z^{n+2}}{n+2} + gl(-N_1 + N_2)\,.$$

Zum Zwecke einer weitern Controle, ob die vorliegenden zwei Systeme der Constanten $\mathfrak{M}_n'$, $\mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{N}_2'$ und $\mathfrak{M}_n''$, $\mathfrak{N}_1''$, $\mathfrak{N}_2''$, die wir hier durch Indices unterschieden haben, wesentlich dasselbe Vertheilungsgesetz angeben, kann man aus beiden die Distanz der Massenmittelpunkte der magnetischen Massen berechnen.

Ist diese gesuchte Distanz $= 2\lambda$, so ist:

$$2\lambda\left\{\int_0^l f(z)\,dz + \mathfrak{N}_2\right\} = 2\lambda\left\{\int_{-l}^0 f(z)\,dz + \mathfrak{N}_1\right\}$$

$$= \int_{-l}^{+l} z\,.\,f(z)\,dz + l\mathfrak{N}_2 - l\mathfrak{N}_1\,.$$

Auch die kürzlich von Hrn. E. Riecke[1]) eingeführten äquivalenten Pole können zur Controle benutzt werden.

Setzen wir deren Distanz $= 2\varDelta$, so ist:

$$2\varDelta^2\left\{\int_0^l z\,f(z)\,dz + z\mathfrak{N}_2\right\} = 2\varDelta^2\left\{\int_{-l}^0 zf(z)\,dz + z\,\mathfrak{N}_1\right\}$$

$$= \int_{-l}^{+l} z^3 f(z)\,dz + z^3\,[\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1]\,.$$

---

1) E. Riecke, Wied. Ann. 8. p. 299. 1879.

III. Anordnung der Versuche.

An einem etwa 1 m langen verticalen Hebelarme (ab), (Taf. II Fig. 4) der sich zwischen den Mikrometerschrauben c_1 und c_2 bewegen konnte, und nicht angezogen der Spitze c_2 anlag, wurde die Inductionsrolle s befestigt. Die Verschiebung derselben, wenn ein Faden d den Hebelarm gegen die Schraubenspitze c_1 zog, wurde mittelst des Kathetometers k beobachtet und so durch die Schrauben c_1 und c_2 regulirt, dass sie genau 1 mm betrug. Diese Art und Weise der Anordnung war so stabil, dass während mehrerer Beobachtungssätze die Grösse der Verschiebung sich höchstens um 0,01 bis 0,03 mm veränderte. Mittelst des Stativs e wurde der Magnet m in die Inductionsrolle gebracht, genau centrirt und senkrecht zu ihr gerichtet. Die Stellung seiner Enden gegen die Mitte der Verschiebung der mittlern Windung der Rolle wurde mit Hülfe des Kathetometers regulirt. Hierdurch konnte die Rolle genau über die gewünschte Stelle des Magnets gebracht werden.

Die Ebene der Inductionsrolle bewegte sich parallel der Declinationsrichtung, und der Magnet stand senkrecht zur Inclinationsrichtung. Bei dieser Aufstellung konnte also der Erdmagnetismus keinerlei Einfluss auf die Beobachtungen haben.

Jede der beiden angewandten Inductionsrollen wurde aus 0,5 mm dickem, mit Seide doppelt umsponnenem Kupferdraht hergestellt und war 3 Windungen breit und 3 Windungen hoch, sodass ihr Querschnitt ein Quadrat bildete. Die Radien der mittelsten Windung waren bei

der engern Rolle I $R = 13{,}26$ mm,
der weitern Rolle II $R = 20{,}53$ mm.

Bei jedem Versuch waren stets beide Rollen in den Stromkreis eingeschaltet, sodass der Widerstand in beiden Beobachtungsreihen derselbe war. Das benutzte Galvanometer ist wesentlich dem Wiedemann'schen ähnlich. Der magnetische Stahlring aber, in dem sich der Spiegel befindet, hat eine im Verhältniss zu der ihn umgebenden

Inductionsrolle ziemlich bedeutende Masse, wodurch die Empfindlichkeit des Instrumentes sehr beeinträchtigt wird.

Die Bewegung der über dem zu untersuchenden Magnet befindlichen Inductionsrolle geschah momentan. Die durch die inducirten Ströme hervorgebrachten Galvanometerausschläge waren äusserst gering, es wurde daher die Gauss'sche Multiplicationsmethode angewandt. Die Anzahl der Umkehrpunkte, nach der die Ausschläge constant wurden, war verschieden. Auch konnte hierauf kein Gewicht gelegt werden, weil mannichfache Störungen nicht zu vermeiden waren. Die unten angeführten Zahlen sind die doppelten Elongationen in Scalentheilen. Der Werth eines Scalentheils beträgt 32,5 Sec., die Entfernung der Scala vom Spiegel war nämlich gleich 3175 Scalentheilen.

IV. Die Versuche und deren Resultate.

Bei der Aufstellung der Fundamentalgleichung für den Inductionsstrom setzten wir voraus, dass auf der Strecke eines Millimeters sich der Magnetismus nur unmerklich ändere. Versuche an allen Stellen von Stäben ergaben nämlich, dass der Inductionsstrom vollständig proportional war der Grösse der Verschiebung der Rolle von 0,5 mm bis 2,0 mm über demselben Punkte, wodurch die gemachte Annahme gerechtfertigt wird.

Die Untersuchungen wurden an einem cylindrischen Magnet, dessen Durchmesser 11,3 mm, dessen Länge 300,56 mm, gemacht. Zunächst wurde derselbe, um Ungleichmässigkeiten in der Härte, die ja durch das Bearbeiten der Endflächen entstehen, zu vermeiden, bis etwa 60° erwärmt und dann abgekühlt.

In diesem Härtezustande ist er den ersten beiden Versuchsreihen unterworfen. Für die letzte wurde er glashart gemacht.

Um die Verhältnisse möglichst zu vereinfachen, wurde eine galvanische Spirale zur Magnetisirung angewandt. In einem Abstande b von der Mitte der Spirale ist nach W. Weber[1]) die electromagnetische Scheidungskraft:

1) Weber, Abhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wissensch., 1852.

$$X = \frac{2\pi n i}{d}\left\{1 - \frac{2d^2-b^2}{2(d^2-b^2)}\left(\frac{r}{d}\right)^2 b^2 + \ldots\right\},$$

worin n die Anzahl der Windungen der Spirale, i die Intensität des Stromes, $2d = 2\sqrt{a^2 + r^2}$ die Diagonale der Spirale und r ihren Radius bezeichnet. Im vorliegenden Falle war die Länge der Spirale $2a = 600$ mm, $r = 90$ mm, und da der Stab 300,56 mm lang war und behufs Magnetisirung mitten in die Spirale gehängt wurde, so ergibt sich, dass die magnetisirende Kraft am Ende um den 0,013 ten Theil von derjenigen in der Mitte verschieden war. Man kann daher die magnetisirende Kraft als für alle Punkte des Magnets gleich ansehen. Die in der letzten Versuchsreihe sich dennoch vorfindenden Abweichungen von der Symmetrie sind mithin durch die Verschiedenheit der Härte der einzelnen Stellen des Magnets bedingt.

Zur Beurtheilung des angewandten Verfahrens wollen wir die Rechnungen der I. Reihe ausführlich mittheilen.

Für alle hier angeführten Versuchsreihen reicht hin, wenn man setzt:

$$f(z) = M_1 z + M_3 z^3$$

und $$-N_1 = N_2 = N,$$ also:

$$J_z = 2R^2\pi\left(M_1\{[A+Z]^1\} + M_3\{[A+Z]^3\} + N\{C_2 - C_1\}\right).$$

Um bequemere Zahlen zu bekommen, dividire man diese Gleichung mit $\frac{1000}{2R^2\pi}$.

Bezeichnet man die daraus entstehenden Coëfficienten mit einem (*), so erhält man Gleichungen von der Form:

$$J_z^* = \{[A+Z]^1\} M_1^* + \{[A+Z]^3\} M_3^* + N^*\{C_2 - C_1\}.$$

Eine Auflösung der Gleichungen:

$$n_k = a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 + \ldots \text{ und } k = 1, 2, 3\ldots$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate hat Gauss gegeben in dem Aufsatze: Disquisitio de elementis ellipt. Palladis. Zur Bezeichnung der in der Rechnung auftretenden Normalgleichungen sind die dort gewählten Symbole beibehalten.

Wie oben werden wir auch hier die Constanten M_n^* und N^*, die zu der engern Spirale (I) gehören, durch ('), die zu der weitern (II) gehören, durch ('') bezeichnen.

Man findet für die

engere Inductionsrolle (I)

	A'_0	A'_1	A'_2	A'_3
z_1	+0,000 068	−0,016 584	+ 3,0053	−296,20
z_2	0,005 709	−0,072 150	1,0394	−280,47
z_3	0,009 611	−0,051 754	42,7020	−261,53
z_4	0,010 751	−0,031 895	71,9502	−242,30
z_5	0,011 235	−0,015 460	125,42	−197,06
z_6	0,011 330	−0,008 781	167,38	−149,10
z_7	0,011 367	−0,005 008	197,20	−100,47
z_8	0,011 381	−0,002 361	216,21	− 51,64
	weitere Inductionsrolle (II)			
z_1	+0,000 176	−0,015 740	+ 2,9465	−290,47
z_2	0,002 373	−0,045 452	1,5048	−266,80
z_3	0,003 591	−0,038 261	21,9160	−248,83
z_4	0,004 196	−0,027 399	32,6261	−232,69
z_5	0,004 558	−0,014 616	53,5063	−191,74
z_6	0,004 650	−0,008 521	70,9431	−145,98
z_7	0,004 684	−0,005 123	83,1405	− 98,54
z_8	0,004 697	−0,002 321	91,2361	− 49,79

Gleichungen für die engere Inductionsrolle (I)

$z_1 = 200{,}01 \quad 0{,}1819 = -0{,}0029\, M_1^{*\prime} + 60{,}6\, M_3^{*\prime} + 0{,}000\,007\, N^{*\prime}$
$z_2 = 150{,}29 \quad 17{,}0250 = +0{,}7859\, M_1^{*\prime} + 14\,680{,}0\, M_3^{*\prime} + 0{,}000\,428\, N^{*\prime}$
$z_3 = 137{,}86 \quad 19{,}8200 = +1{,}2738\, M_1^{*\prime} + 39\,668{,}8\, M_3^{*\prime} + 0{,}000\,168\, N^{*\prime}$
$z_4 = 125{,}43 \quad 17{,}0620 = +1{,}3165\, M_1^{*\prime} + 46\,540{,}0\, M_3^{*\prime} + 0{,}000\,045\, N^{*\prime}$
$z_5 = 100{,}57 \quad 13{,}3510 = +1{,}1918\, M_1^{*\prime} + 53\,667{,}3\, M_3^{*\prime} + 0{,}000\,007\, N^{*\prime}$
$z_6 = 75{,}71 \quad 9{,}6634 = +0{,}8490\, M_1^{*\prime} + 42\,633{,}7\, M_3^{*\prime} + 0$
$z_7 = 50{,}83 \quad 6{,}1755 = +0{,}5728\, M_1^{*\prime} + 30\,081{,}0\, M_3^{*\prime} + 0$
$z_8 = 25{,}97 \quad 2{,}8194 = +0{,}2842\, M_1^{*\prime} + 16\,987{,}1\, M_3^{*\prime} + 0$

Daraus:

$[nn] = +1291{,}50$
$[an] = -89{,}541$
$[bn] = -319\,2401$
$[cn] = -0{,}011\,478$
$[aa] = +6{,}5235$
$[ab] = +245\,551$
$[ac] = +0{,}000\,617\,93$
$[bb] = +984\,633\,0000$
$[bc] = +15{,}4177$
$[cc] = +0{,}000\,000\,213\,53$

hieraus wieder:

$[nn, 1] = +62{,}47$
$[bn, 1] = +177\,999$
$[cn, 1] = -0{,}002\,9963$
$[bc, 1] = -7{,}842$
$[bb, 1] = +603\,530\,000$
$[cc, 1] = +0{,}000\,000\,1550$

dann:

$[nn, 2] = +9{,}977$
$[cn, 2] = -0{,}000\,6836$
$[cc, 2] = +0{,}000\,000\,0531$

Aus dieser Rechnung folgt, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$[nn, 3] = +1{,}18.$$

Zur Berechnung der Unbekannten dienen die Gleichungen:

$$0 = -0{,}000\,683\,6 + 0{,}000\,000\,053\,1\,N^{*\prime}$$
$$0 = +177\,999 + 603\,530\,000\,M_3^{*\prime} - 7{,}842\,N^{*\prime}$$
$$0 = -89{,}541 + 6{,}5235\,M_1^{*\prime} + 245\,551\,M_3^{*\prime} + 0{,}000\,617\,93\,N^{*\prime}$$

daraus:

$$\begin{cases} N^{*\prime} = +12874 \\ M_3^{*\prime} = -0{,}000\,127\,65 \\ M_1^{*\prime} = +17{,}312 \end{cases} \quad \text{also:} \quad \begin{cases} N' = +14154 \\ M_3' = -0{,}000\,140\,35 \\ M_1' = +19{,}0395 \end{cases}$$

Gleichungen für die weitere Inductionsrolle (II)

$$z_1 = 200{,}01 \quad 0{,}19937 = 0{,}01938\,M_1^{*\prime\prime} + 993{,}9\,M_3^{*\prime\prime} + 0{,}000\,006\,N^{*\prime\prime}$$
$$z_2 = 150{,}29 \quad 5{,}31170 = 0{,}31114\,M_1^{*\prime\prime} + 5\,377{,}2\,M_3^{*\prime\prime} + 0{,}000\,116\,N^{*\prime\prime}$$
$$z_3 = 137{,}86 \quad 6{,}69500 = 0{,}45460\,M_1^{*\prime\prime} + 16\,057{,}3\,M_3^{*\prime\prime} + 0{,}000\,073\,N^{*\prime\prime}$$
$$z_4 = 125{,}43 \quad 6{,}26080 = 0{,}49884\,M_1^{*\prime\prime} + 19\,030{,}3\,M_3^{*\prime\prime} + 0{,}000\,030\,N^{*\prime\prime}$$
$$z_5 = 100{,}57 \quad 5{,}13580 = 0{,}47532\,M_1^{*\prime\prime} + 22\,219{,}5\,M_3^{*\prime\prime} + 0{,}000\,006\,N^{*\prime\prime}$$
$$z_6 = 75{,}71 \quad 3{,}88220 = 0{,}34355\,M_1^{*\prime\prime} + 17\,838{,}5\,M_3^{*\prime\prime} + 0$$
$$z_7 = 50{,}83 \quad 2{,}51110 = 0{,}23297\,M_1^{*\prime\prime} + 13\,154{,}8\,M_3^{*\prime\prime} + 0$$
$$z_8 = 25{,}97 \quad 1{,}21210 = 0{,}12176\,M_1^{*\prime\prime} + 7\,136{,}1\,M_3^{*\prime\prime} + 0$$

Daraus:	hieraus wieder:
$[nn] = +161{,}4981$	$[nn, 1] = +4{,}05$
$[an] = -12{,}3308$	$[bn, 1] = +18907$
$[bn] = -480\,453{,}0$	$[cn, 1] = -0{,}000\,2100$
$[cn] = -0{,}001\,320\,86$	$[bb, 1] = +101\,991\,000$
$[aa] = +0{,}9657$	$[bc, 1] = -1{,}0202$
$[ab] = +39107{,}9$	$[cc, 1] = +0{,}000\,000\,0016$
$[ac] = +0{,}000\,087$	dann:
$[bb] = +168\,572\,1000$	$[nn, 2] = +0{,}545$
$[bc] = +2{,}50302$	$[cn, 2] = -0{,}000\,0208$
$[cc] = +0{,}000\,000\,019\,57$	$[cc, 2] = +0{,}000\,000\,0016$

Aus dieser Rechnung folgt, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$[nn, 3] = +0{,}2746.$$

Zur Berechnung der Unbekannten dienen die Gleichungen:

$$0 = -0{,}000\,0208 + 0{,}000\,000\,0016\,N^{*\prime\prime}$$
$$0 = +18907 + 101\,991\,000\,M_3^{*\prime\prime} - 1{,}0202\,N^{*\prime\prime}$$
$$0 = -12{,}3308 + 0{,}9657\,M_1^{*\prime\prime} + 39107{,}9\,M_3^{*\prime\prime} + 0{,}000\,087\,N^{*\prime\prime}$$

daraus:

$$N^{*\prime\prime} = +13000$$
$$M_3^{*\prime\prime} = -0{,}000\,055\,344$$
$$M_1^{*\prime\prime} = +13{,}827\,,$$

also:

$$N^{\prime\prime} = +34427$$
$$M_3^{\prime\prime} = -0{,}000\,146\,57$$
$$M_1^{\prime\prime} = +36{,}618\,.$$

Aus den mitgetheilten Summen der Fehlerquadrate geht hervor, dass in der That die berechneten Constanten vollkommen die aus den Beobachtungen entnommenen Grössen J_z^* erklären.

In den folgenden Tabellen gibt die erste Spalte die Punkte der Z-Axe an, über denen die in der zweiten Spalte aufgenommenen Beobachtungen gemacht sind. In der Regel sind drei Beobachtungsreihen für jeden Punkt angestellt, die mitgetheilten Zahlen sind die constanten doppelten Endelongationen in Scalentheilen. In der dritten Spalte finden sich die doppelten Endelongationen, wie sie sich aus den auf Grund der Beobachtungen berechneten Constanten ergeben, welche über den Tabellen stehen; in der vierten Spalte die zur zweiten und dritten gehörenden Differenzen; in der fünften die aus den Beobachtungen mit der andern Inductionsrolle berechneten doppelten Endelongationen, die hier auf diejenige Einheit zuvor reducirt sind, in der die in der zweiten Spalte gemachten Beobachtungen angegeben sind; die Differenzen mit den in der zweiten Spalte stehenden Beobachtungen füllen die sechste Spalte.

Länge des Magnets = 300,[illegible] mm, magn. Moment = [illegible]

Der Magnet bis zur Sättigung magnetisirt und nicht glashart.

Engere Inductionsrolle.

$M_1' = +19{,}039 \quad M_3' = -0{,}000\,140\,35 \quad N' = +14154 \quad 2\lambda' = 203{,}69$

$\mathfrak{M}_1' = +18{,}636 \quad \mathfrak{M}_3' = -0{,}000\,137\,88 \quad \mathfrak{N}' = +13854 \quad 2\Lambda' = 235{,}94$

Nord-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle I beobacht.	Galvanometer-ausschläge Rolle I berechn.	Differenz	Rolle II berechn.	Differenz	Süd-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle I beobacht.	Galvanometer-ausschläge Rolle I berechn.	Differenz	Rolle II berechn.	Differenz
200,01	0,20	0,16	+0,04	0,17	+0,03	−200,01	−0,35	−0,16	−0,19	−0,17	−0,18
	0,35		+0,19		+0,18		−0,24		−0,08		−0,07
	0,14		−0,02		−0,03		−0,12		+0,04		+0,05
	0,16		±0,00		−0,01		—		—		—
150,29	18,80	18,95	−0,15	20,05	−1,25	−150,29	−18,43	−18,95	+0,52	−20,05	+1,62
	18,50		−0,45		−1,55		−18,80		+0,15		+1,25
	18,96		+0,01		−1,09		−18,80		+0,15		+1,25
137,86	22,44	21,06	+1,38	22,66	−0,22	−137,86	−21,80	−21,06	−0,74	−22,66	+0,86
	21,83		+0,77		−0,83		−21,90		−0,84		+0,76
	21,78		+0,72		−0,88		−21,00		+0,06		+1,66
125,43	18,85	19,16	−0,31	20,87	−2,02	−125,43	−19,68	−19,16	−0,52	−20,87	+1,19
	18,77		−0,39		−2,10		−18,65		+0,51		+2,22
	17,85		−1,31		−3,02		−18,80		+0,36		+2,07
100,57	14,87	15,25	−0,38	17,51	−2,64	−100,57	−14,70	−15,25	+0,55	−17,51	+2,81
	14,40		−0,85		−3,11		−14,92		+0,33		+2,59
	14,42		−0,83		−3,09		−14,80		+0,45		+2,71
75,71	10,14	10,18	−0,04	12,07	−1,93	−75,71	−10,90	−10,18	−0,72	−12,07	+1,17
	10,77		+0,59		−1,30		−10,50		−0,32		+1,57
	10,60		+0,42		−1,47		−10,58		−0,40		+1,49
50,83	6,80	6,73	+0,07	8,05	−1,25	−50,83	−6,91	−6,73	−0,18	−8,05	+1,14
	6,63		−0,10		−1,42		−6,82		−0,09		+1,23
	6,80		+0,07		−1,25		−6,79		−0,06		+1,26
25,97	3,20	2,98	+0,22	3,85	−0,65	−25,97	−3,10	−2,98	−0,12	−3,85	+0,75
	3,00		+0,02		−0,85		−3,10		−0,12		+0,75
	—		—		—		−3,15		−0,17		+0,70

Weitere Inductionsrolle.

$M_1'' = +36,618$ $M_3'' = -0,000\,2887$ $N'' = +29116$ $2\lambda'' = 206,68$
$\mathfrak{M}_1'' = +17,423$ $\mathfrak{M}_3'' = -0,000\,0697$ $\mathfrak{N}'' = +16381$ $2\Lambda'' = 239,48$

Nord-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle II beobacht.	Galvanometer-ausschläge Rolle II berechn.	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz	Süd-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle II beobacht.	Galvanometer-ausschläge Rolle II berechn.	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz
200,01	0,67	0,78	−0,11	0,66	+0,01	−200,01	− 0,65	− 0,78	+0,13	− 0,66	+0,01
	0,44		−0,34		−0,22		− 0,50		+0,28		+0,16
	0,50		−0,28		−0,16		− 0,43		+0,35		+0,23
150,29	13,60	14,58	−0,98	13,99	−0,39	−150,29	−14,36	−14,58	+0,22	−14,00	−0,36
	13,97		−0,61		−0,02		−14,58		±0,00		−0,58
	13,80		−0,78		−0,19		−14,11		+0,47		−0,11
137,86	17,00	16,80	+0,20	15,28	+1,72	−137,86	−17,70	−16,80	−0,90	−15,28	−2,42
	17,66		+0,86		+2,38		−18,00		−1,20		−2,72
	17,88		+1,08		+2,60		—		—		—
125,43	16,60	16,51	+0,09	14,91	+1,69	−125,43	−16,45	−16,51	+0,06	−14,91	−1,54
	16,70		+0,19		+1,79		−16,54		−0,03		−1,63
	16,71		+0,20		+1,80		−16,55		−0,04		−1,64
100,57	13,66	14,34	−0,68	12,38	+1,28	−100,57	−13,10	−14,34	+1,24	−12,38	−0,72
	13,05		−1,29		+0,67		−14,46		−0,12		−2,08
	13,23		−1,11		+0,85		−12,95		+1,39		−0,57
75,71	10,28	9,97	+0,31	8,30	+1,98	− 75,71	− 9,90	− 9,97	+0,07	− 8,30	−1,60
	9,90		−0,07		+1,60		−10,50		−0,53		−2,20
	10,21		+0,24		+1,91		−10,51		−0,54		−2,21
50,83	6,30	6,60	−0,30	5,52	+0,78	− 50,83	− 6,89	− 6,60	−0,29	− 5,52	−1,37
	6,30		−0,30		+0,78		− 6,87		−0,27		−1,35
	6,70		+0,10		+1,18		—		—		—
25,97	3,06	3,41	−0,35	2,71	+0,35	− 25,97	− 3,40	− 3,41	+0,01	− 2,71	−0,69
	3,40		−0,01		+0,69		− 3,00		+0,41		−0,29

Zweite Reihe.

Magn. Moment = 204 931 00. Härte wie vorhin, Magnetismus noch weit unter dem Sättigungspunkte.

Engere Inductionsrolle.

$M_1' = 9{,}4483 \quad M_3' = -0{,}000\,058\,0 \quad N' = 5394{,}4 \quad 2\lambda' = 202{,}73$

$\mathfrak{M}_1' = 9{,}1233 \quad \mathfrak{M}_3' = -0{,}000\,056\,0 \quad \mathfrak{N}' = 5221{,}2 \quad 2\Lambda' = 234{,}94$

Nord-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle I beobacht.	Galvanometer-ausschläge Rolle I berechn.	Differenz	Rolle II berechn.	Differenz	Süd-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle I beobacht.	Galvanometer-ausschläge Rolle I berechn.	Differenz	Rolle II berechn.	Differenz
150,29	8,96	8,88	+0,08	8,26	+0,70	−150,29	−9,04	−8,88	−0,16	−8,26	−0,78
	9,00		+0,12		+0,74		−9,02		−0,14		−0,76
	8,70		−0,18		+0,44		−8,80		+0,08		−0,54
	9,00		+0,12		+0,74		—				—
125,43	10,27	9,98	+0,29	8,11	+2,16	−125,43	−9,33	−9,98	+0,65	−8,11	−1,22
	10,46		+0,48		+2,35		−9,02		+0,96		−0,91
	10,43		+0,45		+2,32		−9,08		+0,90		−0,97
100,57	8,06	8,18	−0,12	7,22	+0,84	−100,57	−8,17	−8,18	+0,01	−7,22	−0,95
	8,18		±0,00		+0,96		−8,21		−0,03		−0,99
	8,01		−0,17		+0,79		−7,84		−0,34		−0,62
75,71	5,92	5,55	+0,37	5,17	+0,75	− 75,71	−5,92	−5,55	−0,37	−5,17	−0,77
	5,59		+0,04		+0,42		−5,59		−0,04		−0,42
	6,09		+0,54		+0,92		−6,09		−0,54		−0,92
50,83	3,72	3,66	+0,06	3,51	+0,21	− 50,83	−3,78	−3,66	−0,12	−3,51	−0,27
	3,80		+0,14		+0,29		−4,00		−0,34		−0,49
	3,80		+0,14		+0,29		−4,12		−0,46		−0,61
25,97	1,20	1,70	−0,50	1,77	−0,57	− 25,97	−2,00	−1,70	−0,30	−1,77	−0,23
	2,01		+0,31		+0,24		−1,54		+0,16		+0,23
	1,60		−0,10		−0,17		—		—		—

Weitere Inductionsrolle.

$M_1'' = +12{,}0016 \quad M_3'' = +0{,}000\,0365 \quad N'' = +2058{,}2 \quad 2\lambda' = 216{,}04$

$\mathfrak{M}_1'' = +7{,}1363 \quad \mathfrak{M}_3'' = +0{,}000\,0217 \quad \mathfrak{N}'' = +1223{,}9 \quad 2\Lambda'' = 247{,}72$

Nord-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle II		Differenz	Rolle I	Differenz	Süd-ende	Galvanometer-ausschläge Rolle II		Differenz	Rolle I	Differenz
	beobacht.	berechn.		berechn.			beobacht.	berechn.		berechn.	
150,29	6,36	6,31	+0.05	8,44	−2,08	−150,29	−6,20	−6,31	+0,11	−8,44	+2,24
	6,61		+0,30		−1,83		−6,30		−0,01		+2,14
	6,05		−0,26		−1,39		−6,30		−0,01		+2,14
125,43	7,05	7,30	−0,25	8,63	−1,58	−125,43	−7,86	−7,30	−0,56	−8,63	+0,77
	7,57		+0,27		−1,06		−7,45		−0,15		+1,18
	7,52		+0,22		−1,11		−7,31		−0,01		+1,32
100,57	6,12	6,64	−0,52	7,41	−1,29	−100,57	−6,03	−6,64	+0,61	−7,41	+1,38
	6,10		−0,54		−1,31		−6,30		+0,34		+1,11
	6,03		−0,61		−1,38		−5,85		+0,79		+1,56
75,71	5,01	4,78	+0,23	4,50	+0,51	− 75,71	−4,93	−4,78	−0,15	−4,45	−0,48
	5,10		+0,32		+0,51		−5,34		−0,56		−0,89
	5,31		+0,53		+0,81		−5,07		−0,29		−0,62
50,83	3,47	3,28	+0,19	3,29	+0,18	− 50,83	−3,36	−3,28	−0,08	−3,29	−0,07
	3,20		−0,08		−0,09		−3,35		−0,07		−0,06
	3,21		−0,07		−0,08		−3,44		−0,16		−0,15
	4,04		+0,76		−0,75		—		—		—
25,97	1,70	1,72	−0,02	1,69	+0,01	− 25,97	−1,90	−1,72	−0,18	−1,69	−0,21
	1,75		+0,03		+0,06		−1,77		−0,05		−0,08

Dritte Reihe.

Magn. Moment = 501 356 00. Stahlstab glashart, bis zur Sättigung magnetisirt.

Engere Inductionsrolle.

$M_1' = +21,886$ $M_3' = -0,000\,2032$ $N' = 11208$ $2\lambda' = 204,91$
$\mathfrak{M}_1' = +23,513$ $\mathfrak{M}_3' = -0,000\,2183$ $\mathfrak{N}' = 22939$ $2\Lambda' = 237,10$

Nordende	Galvanometerausschläge Rolle I		Differenz	Südende	Galvanometerausschläge Rolle I		Differenz
	beobachtet	berechnet			beobachtet	berechnet	
z = 200,01	0,25	0,15	+0,10	−200,01	− 0,22	− 0,15	−0,07
	0,30		+0,15		− 0,23		−0,08
	0,11		−0,04		− 0,21		−0,06
150,29	22,00	20,91	+1,09	−150,29	−19,60	−20,91	+1,31
	21,68		+0,77		−19,30		+1,61
	21,60		+0,69		−19,90		+1,01
125,43	22,81	21,84	+0,97	−125,43	−21,34	−21,84	+0,50
	21,00		−0,84		−21,47		+0,37
	22,80		+0,96		−21,29		+0,55
100,57	16,94	15,26	+1,68	−100,57	−16,65	−15,26	−1,39
	16,93		+1,67		−16,81		−1,55
	16,90		+1,64		−16,90		−1,64
75,71	11,57	10,90	+0,67	− 75,71	−12,27	−10,90	−1,37
	11,27		+0,37		−12,91		−2,01
	11,29		+0,39		—		—
50,83	6,33	7,06	−0,73	− 50,83	− 6,33	− 7,06	+0,73
	6,35		−0,71		− 6,35		+0,71
	6,40		−0,66		− 6,38		+0,68
25,97	1,83	2,77	−0,94	− 25,97	− 2,80	− 2,77	−0,03
	1,82		−0,95		− 2,65		+0,12

Aus den vorstehenden Tabellen ist zu ersehen, dass die Vertheilung des Magnetismus durch eine Curve $f(z) = M_1 z + M_3 z^3$ und durch magnetische Massen in den Endpunkten hinreichend dargestellt wird, indem die Inductionswirkungen für die betreffende Rolle sich vollständig daraus erklären. Dagegen genügt das aus einer Inductionsrolle gefundene Gesetz nicht vollständig für die andere. Der Verlauf der Rechnung, wie die beigegebenen graphischen Darstellungen, zu denen wir uns gleich wenden werden, zeigen, dass dieser Umstand fast allein von dem Magnetismus der Endflächen herrührt, indem derselbe nur auf Kosten der Genauigkeit in einem Punkte concentrirt gedacht werden kann.

Die beigegebene Fig. 5 (Taf. II) stellt die Vertheilung des Magnetismus in der Axe durch die unterbrochenen Linien dar. Die Curven B_2 und B_1 gehören zur I. Reihe und zwar B_2 zu Rolle I, B_1 zu Rolle II. Die Curven A_1 und A_2 gehören zu Reihe II, Rolle I resp. II; die Curve C gehört zur III. Reihe. Diese Curven weichen in der I. wie II. Reihe wenig voneinander ab. Sie wenden aber alle, mit Ausnahme derjenigen, die der weitern Rolle der II. Reihe entstammt, die concave Seite der Z-Axe zu. Diese Gestalt steht in directem Widerspruche mit allen bisherigen Untersuchungen, die, wie oben bemerkt, die Biot'sche Curve, welche eine der Sinuslinie entgegengesetzt gekrümmte ist, ergaben. Die Genauigkeit, mit der aber die hier gefundenen Curven selbst mit Einschluss des fehlerhaften Einflusses der magnetischen Massen der Endpunkte die gemachten Beobachtungen darstellen, lässt kaum einen Zweifel an der Richtigkeit des vorliegenden Resultates zu, während alle früheren Rechnungen eine solche Controle nicht möglich machen.

Bezüglich der Curve, die sich aus der weitern Inductionsrolle der II. Reihe ergibt, ist nicht zu übersehen, dass sie und die zugehörige der engern Rolle sich auffallend einer Geraden anschliessen, und dass eine solche in der That zur Wiedergabe der Beobachtungen auch hinreicht.

V. Gleichungen zur Berechnung der Vertheilung des Magnetismus auf der Oberfläche cylindrischer Magnete.

Zum Zwecke genauerer Resultate ist es nach dem Mitgetheilten nothwendig, den Magnetismus auf der Oberfläche der Magnete anzunehmen.

P. 423 ist entwickelt worden, dass der Strom, welcher durch Verschiebung des magnetischen Linienelementes du in P parallel der Z-Axe um den Weg t gegen das Linienelement ds in diesem hervorgerufen wird, ist:

$$(\mathrm{I}^*) \qquad dX = dJ = \frac{\mu . du\, ds}{\varrho^3} \{R - \eta\} dt.$$

Hierin war ds das Linienelement eines Drahtkreises, der senkrecht zur Z-Axe lag.

Statt des Linienelementes in P führen wir ein Flächenelement ein. Bezeichnet wieder du die Ausdehnung parallel der Z-Axe, ds' diejenige in der Richtung senkrecht zur kürzesten Verbindungslinie von du und der Axe, μ die Dichte des Magnetismus auf diesem Flächenelemente, so ist der durch die vorausgesetzte Bewegung von $du . ds'$ inducirte Strom:

$$dJ = \frac{\mu . du . ds' . ds}{\varrho^3} \{R - \eta\} dt.$$

Es gehöre das Flächenelement $du\, ds'$ einem Ringe an, der senkrecht zur Z-Axe liegt, dessen Mittelpunkt mit derselben zusammenfällt, und dessen Radius r_1 sei. Ist dann:

$$\sphericalangle \psi = \sphericalangle (Y | R), \qquad \text{also} \qquad ds = R\, d\psi$$
$$\sphericalangle \varphi = \sphericalangle (Y | r_1), \qquad\qquad ds' = r_1\, d\varphi$$
$$\eta = r_1 \cos \varphi,$$
$$\varrho - \{(u - t)^2 + R^2 + r_1^2 - 2 R r_1 \cos \varphi\}^{\frac{1}{2}},$$

so folgt:

$$dJ = \frac{\mu\, du\, (R - r_1 \cos \varphi)}{\varrho^3} R\, d\psi . r_1\, d\varphi . dt$$

als Wirkung des magnetischen Ringelementes auf das Drahtelement.

Um die Wirkung des ganzen Ringes zu bekommen, müsste nach ψ integrirt werden. Hat man dies gethan, so kann man für das folgende Drahtelement ds dasselbe

Integral aufstellen u. s. f., indem man jedesmal die X-Axe durch ds gehen lässt. Dies Verfahren, die Wirkung des Ringes auf den Drahtkreis zu finden, ist aber gleichbedeutend mit einer Integration in Bezug auf φ. Diese Art der Betrachtung hat den Vortheil, dass der Nenner ϱ^3 unabhängig von ψ wird.

Statt eines Ringes von der Breite du haben wir nun einen Cylinder von der Länge $2l$ = der Länge des Magnets. Lassen wir die Mitte des Magnets mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfallen, so ist, wie früher, die Dichte μ eine Function von z, die bei vollständig regelmässiger Magnetisirung nur ungerade Potenzen von z enthalten würde. Setzen wir wie oben $u = z - Z$, also $du = dz$, so ist:

$$f(z - Z) = f(u) = \mu_0 u^0 + \mu_1 u' + \mu_2 u^2 + \cdots,$$

und auch hier ist es möglich, μ_k als Function von Z und den in $f(z)$ auftretenden Coëfficienten M_h zu bestimmen. Wir werden uns aber auf nur wenige Glieder der Reihe für $f(z)$ beschränken müssen, denn wir werden sehen, dass die numerischen Rechnungen bereits so sehr bedeutend werden, auch kann man leicht nach den folgenden Entwickelungen noch mehr Glieder berücksichtigen, falls dies nöthig werden sollte.

Wir setzen also $f(z) = \sum_{n=0}^{n=3} M_n z^n$, mithin auch:

$$f(u) = \sum_{m=0}^{m=3} \mu_m u^m.$$

Vernachlässigt man dann aus denselben Gründen wie auf p. 425 die Verschiebung der Rolle gegen die magnetischen Punkte, indem man dieselbe überall gleich gross macht, so erhält man als Inductionsstrom, der von dem Magnetismus des Cylindermantels hervorgebracht wird:

$$\int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u)\,(R - r_1 \cos\varphi)\, R\, d\psi \,.\, r_1\, d\varphi \,.\, du}{(u^2 + R^2 + r_1^{\,2} - 2Rr_1 \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

worin $u_1 = -(l + Z)$ $u_2 = l - Z.$

Um den gesammten Inductionsstrom zu erhalten, sind noch die Inductionsströme, die von den Endflächen herrühren, hinzuzufügen.

Es war die Inductionswirkung des Linienelementes du mit der Dichte μ gegeben durch die Gleichung:

$$dJ = \frac{\mu\, du\, ds\, (R - r\cos\varphi)}{\varrho^3}\, dt,$$

wenn $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle (r \mid Y)$ und r die Entfernung von μdu von der Axe angibt. Statt des Linienelements führen wir ein Flächenelement ein. Dies liegt in einer zu der Z-Axe senkrechten Ebene. Setzen wir Polarcoordinaten hier voraus, deren Anfangspunkt in den Schnittpunkt der Endfläche mit der Axe fällt, und rechnen den Winkel φ von der Y-Axe aus, so ist die Grösse eines Flächenelementes in der Entfernung r von der Axe $r\,dr\,d\varphi$ und, wenn μ die Dichte des Magnetismus ist, $\mu\, r\,dr\,d\varphi$ die magnetische Masse. Setzen wir diesen Ausdruck statt der Masse des Linienelementes $\mu\,du$ ein, so ist der Inductionsstrom gegeben durch:

$$di = \frac{\mu \,.\, r\,dr\,d\varphi\,(R - r\cos\varphi)}{\varrho^3}\, dt.$$

Auch hier vernachlässigen wir die Integration nach t. Zunächst ist nun allgemein die Dichte μ eine Function der Entfernung r vom Mittelpunkte der Fläche, um welchen Punkt herum vollständige symmetrische Vertheilung des Magnetismus stattfinden wird. Bei nicht zu grossen Endflächen kann man jedoch die Dichte des Magnetismus als constant annehmen. Man kann allgemein setzen:

$$\mu = F(r) = N_0 + N_2 r^2.$$

Allein da die Berücksichtigung des quadratischen Gliedes unverhältnissmässig grosse Rechnungen veranlasst, so wird man, wenn irgend möglich, $N_2 = 0$ setzen, was auch hier geschehen mag. Bezeichnen wir mit r_1 den Radius des Cylinders und mit v die Entfernung der Endfläche von der Inductionsrolle, so ist der von einer solchen magnetischen Fläche inducirte Strom:

$$i = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F(r)(R - r\cos\varphi) r\, dr\, R\, d\psi}{\{\psi^2 + R^2 + r^2 - 2R\cos\varphi\}^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi .$$

Da sich nun in unserem Falle eine der Endflächen in der Entfernung $v = u_1$, die andere in der Entfernung $v = u_2$ von der Inductionsrolle befindet, so erhalten wir, wenn die Functionen, welche die Vertheilung in den Endflächen angeben, mit den zugehörigen Indices versehen werden, als Gesammtinductionsstrom:

$$\text{(II)} \qquad J_z = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u)(R - r_1\cos\varphi) R\, d\psi\, r_1\, d\varphi . du}{\{u^2 + R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\varphi\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F_1(r)(R - r\cos\varphi) r\, dr\, d\varphi\, R\, d\psi}{\{u_1^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F_2(r)(R - r\cos\varphi) r\, dr\, d\varphi\, R\, d\psi}{\{u_2^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi\}^{\frac{3}{2}}} .$$

Darin gehört also $F_1(r)$ der Südfläche, $F_2(r)$ der Nordfläche an.

Setzen wir $R - r_1\cos\varphi = p$ und $R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\varphi = P$, so folgt:

$$\int_\psi \int_\varphi \int_u \frac{f(u) . p . R\, d\psi\, r_1\, d\varphi . du}{(u^2 + P)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2Rr_1\pi \Big|_{u_1}^{u_2} \Big\{ \mu_0 u \left[R\int \frac{d\varphi}{P(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} - r_1 \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{P(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$- \mu_1 \left[R\int \frac{d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} - r_1 \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$- \mu_2 \left[uR\int \frac{d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} - ur_1 \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} + R\int \log \text{nat}\, (u + \sqrt{u^2+P})\, d\varphi \right.$$

$$\left. - r_1 \int \cos\varphi \log \text{nat}\, (u + \sqrt{u^2+P})\, d\varphi \right]$$

$$+\mu_3\Big[u^2R\int\frac{d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}-u^2r\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}+2R(R^2+r_1{}^2)\int\frac{d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-2r_1(r_1{}^2-R^2)\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}+4Rr_1{}^2\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}\Big]\Big\}.$$

Da sämmtliche Integrale die Grenzen 0 und 2π haben, so sind diese fortgelassen.

Lösen wir die Bezeichnungen p und P auf und setzen jetzt zur Vereinfachung:

$$d=R^2+r_1{}^2, \qquad D=u^2+R^2+r_1{}^2,$$

so folgt nach einigen Rechnungen durch die Substitution:

$$(\alpha)\quad \varphi=\pi-\chi,\ \cos\chi=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\chi \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}\chi=\pi-\psi$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{P(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}=\frac{8}{(R+r_1)^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\ n,\ c_u\right),$$

wenn: $$n=\frac{-2Rr_1}{(R+r_1)^2},\qquad c_u=\frac{4Rr_1}{u^2+(R+R_1)^2}.$$

Ebenso nach (α):

$$\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{P(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-2}{(R+r_1)^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\Big\{\int\frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-c_u{}^2\sin^2\psi}}$$

$$-\int\frac{2\sin^2\psi\,d\psi}{(1+n\sin^2\psi\sqrt{1-c_u{}^2\sin^2\psi}};$$

da nun:

$$\int\frac{2\sin^2\psi\,d\psi}{(1+n\sin^2\psi\sqrt{1-c_u{}^2\sin^2\psi}}=\frac{2}{n}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-c_u{}^2\sin^2\psi}}$$

$$-\frac{2}{n}\int\frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-c_u{}^2\sin^2\psi}}\Big\},$$

so folgt:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{P(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-8}{(R+r_1)^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\Big\{\frac{n+2}{n}\,\Pi\Big(\frac{\pi}{2},n,c_u\Big)-\frac{2}{n}F\Big(\frac{\pi}{2},c_u\Big)\Big\}$$

Ferner:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}}=\frac{8}{\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}F\left(\frac{\pi}{2},\ c_u\right).$$

Ferner nach (α):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-8}{c_u^2 \sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \left\{(1-c_u^2)\, F\left(\frac{\pi}{2},\ c_u\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)\right\}.$$

Ferner nach (α):

$$\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(u^2+P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-c_u^2 \sin^2\psi}}$$

$$- \frac{8}{\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \int \frac{\sin^2\psi\, d\varphi}{\sqrt{1-c_u^2\sin^2\psi}} + \frac{8}{\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \int \frac{\sin^4\psi\, d\psi}{\sqrt{1-c_u^2\sin^2\psi}}.$$

Zur Reduction des letzten dieser Integrale benutzen wir die von Legendre[1]) entwickelte Gleichung:

$$\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\ \cos\varphi \sin^{2k-3}\varphi = (2k-3)\, Z^{2k-4}$$

$$-(1+c^2)\,(2k-2)\, Z^{2k-3} + c^2(2k-1)\, Z^{2k},$$

worin:

$$Z^{2k} = \int \frac{\sin^{2k}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

daher für $k=2$:

$$3c_u^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4\psi\, d\psi}{\sqrt{1-c_u^2\sin^2\psi}} = \sqrt{1-c_u^2\sin^2\psi} - Z^0 + (1+c_u^2)\, 2Z^2,$$

durch Einsetzung folgt dann:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{u^2+P}} = \frac{24c_u^4 - 64c_u^2 + 64}{3c_u^4\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\, F\left(\frac{\pi}{2},\ c_u\right)$$

$$+ \frac{64-32c_u^2}{3c_u^4\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\, E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right).$$

Die folgenden Integrale lassen sich nur näherungsweise berechnen, wir schreiben der Einfachheit wegen:

$$\int_0^{2\pi} \log\text{nat}\,(u+\sqrt{u^2+P})\, d\varphi = L_1(u,\ 2\pi),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, \log\text{nat}\,(u+\sqrt{u^2+P})\, d\varphi = L_2(u,\ 2\pi).$$

---

1) Legendre, Fonct. elliptiques, Chap. IV.

Das zweite und dritte Integral der Gleichung (II) hatte die Form:

$$\int\limits_{\varphi}\int\limits_{\psi}\int\limits_{r} \frac{F(r)\,(R - r\cos\varphi)\, r\, dr\, d\varphi\, R\, d\psi}{(v^2 + R^2 + r^2 - 2R\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

dies ist für $F(r) = \pm N_0$, indem wir die Dichte des Magnetismus auf der Nordfläche positiv, die auf der Südfläche negativ nehmen:

$$= \pm 2R\pi N_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \Big\{ \frac{-R}{\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}} + \frac{R^3\cos^2\varphi}{(R^2\cos^2\varphi - V)\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}}$$

$$- \frac{R^2 r_1\cos\varphi}{(R^2\cos^2\varphi - V)\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}} + \frac{R}{\sqrt{V}} - \frac{R^3\cos^2\varphi}{(R^2\cos^2\varphi - V)\sqrt{V}}$$

$$- \frac{-VR\cos^2\varphi + 2R^2 r_1\cos^3\varphi - Vr_1\cos\varphi}{(V - R^2\cos^2\varphi)\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}}$$

$$- \frac{R\sqrt{V}\cos^2\varphi}{(V - R^2\cos^2\varphi)} + \cos\varphi \text{ log nat } (\sqrt{V} - 2R\cos\varphi)$$

$$- \cos\varphi \text{ log nat } (r_1 - 2R\cos\varphi + \sqrt{D - 2Rr_1}\cos\varphi) \Big\},$$

wenn $V = v^2 + R^2$; $D = r_1^2 + V$.

Darin ist nun:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-R\, d\varphi}{\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}} = \frac{-8R}{\sqrt{v^2 + (R + r_1)^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right),$$

worin wie oben:

$$c_v^2 = \frac{4Rr_1}{v^2 + (R + r_1)^2}.$$

Ferner durch Zerlegung in Partialbrüche und nach der Substitution (α):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(V - R^2\cos^2\varphi)\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}} = \frac{-4}{R^2} F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right)$$

$$- \frac{2\sqrt{V}\, \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{R(\sqrt{V} + R)\sqrt{v^2 + (R + r_1)^2}} + \frac{2\sqrt{V}\, \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \nu, c_v\right)}{R(\sqrt{V} - R)\sqrt{v^2 + (R + r_1)^2}},$$

worin: $\nu = \frac{2R}{\sqrt{V} - R}$, $\lambda = \frac{-2R}{\sqrt{V} + R}$.

Ebenso:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(V - R^2\cos^2\varphi)\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}}$$

$$= \frac{-2\Pi\left(\frac{\pi}{2}, r, c_v\right)}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} + \frac{2\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{R(\sqrt{V}-R)\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}.$$

Und:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3\varphi\, d\varphi}{(V - R^2\cos^2\varphi)\sqrt{D - 2Rr_1\cos\varphi}}$$

$$= \frac{-8}{R^2 c_u^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\left\{(1-c_u^2)F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right)\right\}$$

$$+ \frac{2V}{R\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\left\{-\frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \nu, c_v\right)}{\sqrt{V}-R} + \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{\sqrt{V}+R}\right\}.$$

Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{V - R^2\cos^2\varphi} = -\frac{2\pi}{R}.$$

Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \log\mathrm{nat}\left(\sqrt{V} - 2R\cos\varphi\right) d\varphi = -\frac{2R\sqrt{V}}{4R^2}\, 2\pi.$$

Das folgende Integral muss näherungsweise berechnet werden, wir setzen zur Vereinfachung:

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \log\mathrm{nat}\left(r_1 - 2R\cos\varphi + \sqrt{D - 2R\cos\varphi}\right) = L_3(v_1 2\pi).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$A_0 = \left|\frac{8u}{n(R+r_1)^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\left\{[u(R+r_1)+2r]\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, c_u\right) - 2r_1 F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)\right\}\right|_{u_1}^{u_2}.$$

$$A_1 = -\left|\frac{8}{c_u^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\left\{[c_u^2 R + r_1(1-c_u^2)]\,F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + r_1 E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)\right\}\right|_{u_1}^{u_2}.$$

$$A_2 = -\left|\frac{8u}{c_u^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\Big\{[c_u^2 R + r_1(1-c_u^2)]\,F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)\right.$$

$$\left.+\,r_1\,E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)\Big\} + R\,L_1(u, 2\pi) - r_1\,L_2(u, 2\pi)\right|_{u_1}^{u_2}.$$

$$A_3 = +\left|\frac{8}{3c_u^4\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\Big\{[3c_u^4 R(D+R^2)\right.$$

$$+\,3c_u^2 r_1(u^2+2r_1^2-2R^2)(1-c_u^2) + R r_1^2(12c_u^4 - 32c_u^2 + 32)]$$

$$\left.\times\,F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + [3r_1 c_u^2(u^2+2r_1^2-2R^2) + 16R(2-c_u^2)]\,E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)\right|_{u_1}^{u_2}.$$

$$C = \left|4\left\{\frac{4r_1 - 2c_u^2(R-2r_1)}{c_u^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} - \frac{V-R^2}{R}\right\}F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)\right.$$

$$+\,\frac{16r_1}{c_u^2\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\,E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right)$$

$$+\,\frac{16R^2r_1 + 2R\sqrt{V}(V-R^2) - 2r_1(\sqrt{V}-R)^2}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \nu, c_u\right)$$

$$+\,\frac{-16R^2r_1 + 2R\sqrt{V}(V-R^2) + 2r_1(\sqrt{V}+R)^2}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_u\right)$$

$$\left.-\,L_3(u, 2\pi) + \frac{2R\pi}{V} + \frac{V-R^2}{VR}\,2\pi - \frac{\pi\sqrt{V}}{R}\right|_{u_1}^{u_2}$$

darin:

$$c_u = \frac{4Rr_1}{u^2+(R+r_1)^2}, \qquad V = u^2 + R^2, \qquad n = \frac{-2Rr_1}{(R+r_1)^2},$$

$$\nu = \frac{2R}{(R+r_1)^2}, \qquad \lambda = \frac{-2R}{\sqrt{V}+R}.$$

Dann ist der Gesammtinductionsstrom:

$$J_z = 2Rr_1\pi\left\{\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3\right\} + 2R\pi N_0 C$$

$$= 2Rr_1\pi\sum_{m=0}^{m=3}\mu_m A_m + 2R\pi N_0 C.$$

Nach p. 424 ist nun:

$$\mu_m = \sum_{n \geqq m}^{n} M_n\,{}^m\mathfrak{B}\,Z^{n-m}$$

also auch nach p. 426:

$$\sum_m \mu_m A_m = \sum_{n=0}^{n=3} M_n \{[A+Z]^n\}.$$

Mithin:

$$J_s = 2 R r_1 \pi \sum_{n=0}^{n=3} M_n \{[A+Z]^n\} + 2 R \pi N_0 C.$$

Um obige Entwickelungen für das numerische Rechnen brauchbar zu machen, reduciren wir die elliptischen Integrale III. Gattung auf solche I. und II. Gattung.

Zu diesem Zwecke sind die Parameter näher zu untersuchen.

Da $R > r_1$ ist, hat man:

$$0 > n > -1, \quad +\infty > \nu > 0, \quad 0 > \lambda > -1.$$

Bedeutet daher ϑ einen Winkel, so kann man stets setzen:
$$\nu = \operatorname{cotg}^2 \vartheta.$$

Ferner ist für:

$$0 \geqq u \geqq R + r_1, \qquad 1 \geqq -n \geqq c_u^2,$$

wenn also b_u der zu c_u complementäre Modul ist, und θ einen Winkel bezeichnet, so kann man setzen:

$$n = -1 + b_u^2 \sin^2 \theta.$$

Für $R + r_1 \geqq u$ ist $c_u^2 \geqq -u \geqq \pm 0$, wir können daher setzen:
$$n = -c_u^2 \sin^2 \theta.$$

Einen ähnlichen Einfluss hat der Werth von u auf die Darstellung von λ.

Die Bedingung, dass für einen Werth u_* das Quadrat des Moduls gleich dem absoluten Werth des Parameters gleich sei, ist:

$$u_* = \sqrt{3 r_1^2 - R^2 \pm r . \sqrt{10 r_1^2 - 4 R^2}}.$$

Ist also $\qquad R > \frac{1}{2} r_1 \sqrt{10},$

so ist stets $\qquad c_u^2 > \lambda \geqq -1.$

In diesem Falle kann man setzen:

$$\lambda = -c_u^2 \sin^2 \tau.$$

Wenn aber: $\qquad R \leqq \frac{1}{2} r_1 \sqrt{10},$

so ergibt sich ein reeller Werth für $u_*^{\cdot}$, und je nachdem nun:

1) $0 \leqq u \leqq u_*$ ist, hat man $-c_u^2 > \lambda > -1$, also $\lambda = -1 + b_u^2 \sin^2\tau$ oder für:

2) $u_* \leqq u$ hat man $0 > \lambda > -c_u^2$, also $\lambda = -c_u^2 \sin^2\tau$.

Legendre[1]) hat bereits die drei hier vorkommenden und zugleich allein möglichen Fälle, die aus dem Verhältniss der Werthe des Parameters und des Moduls entspringen, behandelt. Sie bedingen drei verschiedene Reductionen der elliptischen Integrale III. Gattung. Wir müssen uns darauf beschränken, die für den vorliegenden Fall gültigen Formeln anzuführen.

Bezeichnen wir mit σ den Parameter, mit c den Modul, mit b dessen Complement, mit χ einen Winkel und setzen nach Legendre zur Abkürzung:

$$\varDelta(b,\chi) = \sqrt{1 - b^2 \sin^2\chi},$$

so ist:

1) für $\sigma = \operatorname{cotg}^2\chi$

$$\frac{\varDelta(b,\chi)}{\sin\chi\cos\chi}\, \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sigma, c\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}\chi\, \varDelta(b,\chi)\, F\left(\frac{\pi}{2}, c\right)$$
$$+ F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b,\chi) - F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) E(b,\chi) - E\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b,\chi).$$

2) für $\sigma = -1 + b^2 \sin^2\chi$

$$\frac{b^2 \sin\chi\cos\chi}{\varDelta(b,\chi)}\, \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sigma, c\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{b^2 \sin\chi\cos\chi}{\varDelta(b,\chi)}\, F\left(\frac{\pi}{2}, c\right)$$
$$+ F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b,\chi) - E\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b,\chi) - F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) E(b,\chi).$$

3) für $\sigma = -c^2 \sin^2\chi$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sigma, c\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) + \frac{\operatorname{tg}\chi}{\varDelta(b,\chi)} \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) E(c,\chi) - E\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(c,\chi) \right\}.$$

Je nach dem Werthe von u, d. h. nach der Stellung der Inductionsspirale über dem Magnet, hat man in der Gleichung für J_z auf die Integrale III. Gattung eine dieser Formeln anzuwenden. Es kommen dann nur noch Inte-

1) Legendre, Fonct. ellipt. Chap. XV u. XXIII.

grale I. und II. Gattung vor. Für sie hat Legendre[1]) Tafeln berechnet. Man bemerke, dass man durch passende Wahl von u und R bewirken kann, dass die Argumente der die Parameter vertretenden trigonometrischen Functionen ganze Grade sind, wodurch lästige Interpolationen vermieden werden. Eben darum sind auch die Legendre'schen Grössen eingeführt, denn für jeden einzelnen Punkt des Magnets so viele elliptische Integrale erst zu berechnen, würde auch den Unermüdlichsten abschrecken. Die Ausrechnung der Grössen L bleibt immerhin sehr zeitraubend.

Eine Berechnung der oben mitgetheilten Versuche nach dieser Methode ist nicht gemacht, weil wegen oben angeführter Umstände die Beobachtungen die Grenze der Genauigkeit nicht erreichen. Auch erscheint es nothwendig, dass die Inductionsrollen so nahe als möglich den Magnet umgeben, eine Bedingung, die in obigen Versuchen nicht erfüllt ist.

Jedenfalls ist rathsam, zu einer derartigen Untersuchung 2 Inductionsrollen von verschiedenem Radius der Controle wegen anzuwenden.

Vorliegende Arbeit entstand auf gütige Anregung des Hrn. Prof. Schering. Die mitgetheilten Versuche wurden im physikalischen Laboratorium zu Göttingen ausgeführt, dessen Benutzung Hr. Prof. Riecke mir freundlichst gestattete. Beiden Herren bin ich daher zu grösstem Dank verpflichtet.

1) Legendre, Fonct. ellipt. T. 2.

V. *Allgemeine Theorie der Dämpfung, welche ein Multiplicator auf einen Magnet ausübt; von Karl Schering*[1],

Privatdocent an der Universität Göttingen.

---

§. 2. Integration der allgemeinen Differentialgleichung.

Nachdem in dem Vorhergehenden eine vollständige Bestimmung der Dämpfungsfunction eines Galvanometers durchgeführt ist, erscheint es als eine mit dem theoretischen Interesse das praktische Bedürfniss vereinende Aufgabe, die Bewegung eines Körpers unter der Wirkung einer variabeln Dämpfung allgemeiner zu untersuchen. Im Folgenden ist diese Aufgabe durch eine angenäherte Integration der Differentialgleichung der Bewegung gelöst

Ein Kòrper sei um eine feste Axe drehbar und bewege sich in einem Mittel, das seiner Bewegung einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand entgegensetzt, und es wirke auf ihn in einer zur Drehungsaxe senkrechten Richtung eine von der Zeit unabhängige Kraft. Ist dann φ der Winkel, welchen zur Zeit t eine von dem Angriffspunkte dieser constanten Kraft senkrecht auf die Drehungsaxe gefällte Gerade mit der Richtung der Kraft einschliesst, so ist die Differentialgleichung der Bewegung:

$$(1) \qquad K\frac{dd\varphi}{dt^2} + P(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + Q(\varphi) = 0,$$

wenn K das Trägheitsmoment des Körpers bedeutet.

Die Form dieser Gleichung hat auch die Bewegungsgleichung eines an einem verticalen Faden in der Luft oder in einem geschlossenen Multiplicator schwebenden Magnets. Im letztern Falle ist nach dem Obigen $P(\varphi)$ nicht constant, sondern eine gerade Function von φ; wir wollen setzen:

$$P(\varphi) = 2\,Km\,(1 - m_1\,\varphi^2),$$

indem wir φ^4 vernachlässigen. Dabei ist also vorausgesetzt,

---

1) Fortsetzung von p. 302.

dass für $\varphi = 0$, $P(\varphi)$ seinen Maximalwerth erhält, d. h. dass eine der parallelen Ebenen der Windungen des Multiplicators die magnetische Axe des Magnets in sich aufnimmt. Eine solche Einstellung kann nach dem Vorhergehenden mit Sicherheit erreicht werden. Ferner ist $Q(\varphi)$ gleich der Summe der von der Torsionskraft des Fadens und dem Erdmagnetismus ausgeübten Drehungsmomente, also eine ungerade Function von φ, und daher, abgesehen von fünften Potenzen von φ:

$$Q(\varphi) = Kn^2\varphi(1 - n_1\varphi^2),$$

vorausgesetzt, dass der magnetische Meridian mit der Richtung der Ruhelage der Torsion des Fadens oder Drahtes übereinstimmt; andernfalls würde noch eine Constante hinzutreten. Aus Gleichung (1) wird daher:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m(1 - m_1\varphi^2)\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi(1 - n_1\varphi^2) = 0. \qquad (2)$$

Die physikalische Bedeutung der vier Constanten:

$$m,\ m_1,\ n,\ n_1$$

kann in folgender Weise definirt werden. Es bezeichne wieder V die Potentialfunction der Wechselwirkung zwischen dem Magnet und einem im Multiplicator kreisenden galvanischen Strome von der Intensität Eins, so definiren wir, wie oben (p. 294), die Dämpfungsfunction durch die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2 = 2KWM(1 - M_1\varphi^2).$$

Ist dann:

M das magnetische Moment des Magnets,

T die Horizontalintensität,

f der Torsionscoëfficient des Drahtes,

$\varkappa$ der Dämpfungscoëfficient der Luft,

λ_0, τ_0 das log. Decrement resp. die Schwingungsdauer bei geöffneter Kette, so bestehen bekanntlich die Gleichungen:

$$m = \frac{\varkappa}{2K} + M = \frac{\lambda_0}{\tau_0} + M; \qquad n^2 = \frac{\mathrm{M}T + f}{K} = \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\tau_0^2},$$

ausserdem ist:

$$m_1\, m = M_1\, M, \qquad n_1 = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f}{\mathrm{M}\, T}},$$

m_1 und n_1 sind absolute Zahlen; $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, sind der gewählten Zeiteinheit proportional.

Die Gleichung (2) in die Form gesetzt:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi = 2mm_1\varphi^2\frac{d\varphi}{dt} + n^2 n_1 \varphi^3$$

enthält auf der rechten Seite nur Grössen von der Ordnung φ^3. Bei Voraussetzung nicht zu grosser Werthe von φ bietet nun die auf unsere obige Gleichung angewandte Methode der Variation der Constanten ein geeignetes Mittel zur Integration. Wir setzen:

$$\text{(3)} \qquad \varphi = Ae^{-mt}\sin(\beta t + B); \qquad \beta^2 = n^2 - m^2.$$

Diese Gleichung stellt bekanntlich, wenn A und B Constanten sind, das allgemeine Integral von:

$$\text{(4)} \qquad \frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi = 0$$

in reeller Form dar, unter der Voraussetzung, die wir auch hier und im Folgenden überall machen, dass $n^2 > m^2$ ist. Jetzt sollen A und B als Functionen von t so bestimmt werden, dass (3) das allgemeine Integral von (2) darstellt. Die Differentiation von (3) ergibt:

$$\text{(5)} \quad \frac{d\varphi}{dt} = Ae^{-mt}\{-m\sin(\beta t + B) + \beta\cos(\beta t + B)\},$$

wenn wir die noch willkürlichen Functionen A und B der Bedingungsgleichung:

$$\text{(6)} \qquad 0 = \sin(\beta t + B)\frac{dA}{dt} + A\cos(\beta t + B)\frac{dB}{dt}$$

unterwerfen. Durch nochmalige Differentiation von (5) und durch Addition der entstehenden Gleichung zu (5) und (3) erhalten wir mit Berücksichtigung von (6) die zweite Bedingungsgleichung für A und B:

$$\text{(7)} \quad \left\{ \begin{aligned} & 2mm_1\varphi^2\frac{d\varphi}{dt} + n^2 n_1\varphi^3 \\ & = \beta e^{-mt}\left\{\cos(\beta t + B)\frac{dA}{dt} - A\sin(\beta t + B)\frac{dB}{dt}\right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Integration von (2) ist demnach auf diejenige von (6) und (7) zurückgeführt. Für die Correctionsgrössen auf der linken Seite von (7) setzen wir jetzt ihre *angenäherten* Werthe ein, berechnet aus:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{\beta} e^{-mt} \sin \beta t,$$

d. i. aus dem Integrale von (4) unter den Voraussetzungen, die wir auch für das Integral von (2) später einführen wollen, dass für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ ist und $\frac{d\varphi}{dt} = v_0$.

Dann wird aus (7):

$$\text{(7a)} \begin{cases} \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-3mt} \{(n^2 n_1 - 2m^2 m_1) \sin \beta t^3 + 2 m m_1 \beta \,.\, \sin \beta t^2 \cos \beta t\} \\ \qquad = \beta e^{-mt} \left(\cos (\beta t + B) \frac{dA}{dt} - A \sin (\beta t + B) \frac{dB}{dt}\right). \end{cases}$$

Setzen wir:

$$\text{(8)} \qquad u = A \sin B, \qquad w = A \cos B,$$

woraus folgt:

$$\frac{du}{dt} = A \cos B \frac{dB}{dt} + \sin B \frac{dA}{dt},$$

$$\frac{dw}{dt} = - A \sin B \frac{dB}{dt} + \cos B \frac{dA}{dt},$$

so wird aus den Gleichungen (6) und (7a):

$$0 = \sin \beta t \frac{dw}{dt} + \cos \beta t \frac{du}{dt},$$

$$\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 \frac{e^{-2mt}}{\beta} \{(n^2 n_1 - 2m^2 m_1) \sin \beta t^3 + 2 m m_1 \beta \sin \beta t^2 \cos \beta t\}$$

$$= - \sin \beta t \frac{du}{dt} + \cos \beta t \frac{dw}{dt};$$

und durch Auflösung nach $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$:

$$\text{(9)} \quad \beta \frac{du}{dt} = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} \{p_1 \sin \beta t^4 + p_2 \sin \beta t^3 \cos \beta t + p_3 \sin \beta t^2 \cos \beta t^2\},$$

$$\text{(10)} \quad \beta \frac{dw}{dt} = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} \{q_1 \sin \beta t^4 + q_2 \sin \beta t^3 \cos \beta t + q_3 \sin \beta t^2 \cos \beta t^2\},$$

worin die Constanten p, q durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} p_1 = 2m^2 m_1 - n^2 n_1 & q_1 = 0 \\ p_2 = -2 m m_1 \beta & q_2 = - p_1 \\ p_3 = 0 & q_3 = - p_2 \end{array}$$

bestimmt sind.

Mit Hülfe der folgenden Reductionsformeln:

$$\int e^{-2mt} \sin\beta t^{\nu} . \cos\beta t . dt = \frac{1}{\beta(\nu+1)} e^{-2mt} \sin\beta t^{\nu+1} + \frac{2m}{\beta(\nu+1)} \int e^{-2mt} \sin\beta t^{\nu+1} dt$$

$$\int e^{-2mt} \sin\beta t^{\nu} dt = -\frac{1}{\beta^2\nu^2+4m^2} e^{-2mt} . \sin\beta t^{\nu-1} . (\beta\nu\cos\beta t + 2m\sin\beta t) + (\nu-1)\frac{\beta^2\nu}{\beta^2\nu^2+4m^2}\int e^{-2mt}\sin\beta t^{\nu-2} dt$$

ist die Integration der Gleichung (9) oder (10) leicht auszuführen. Man erhält:

$$(11)\quad \beta(u-u_0) = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} \left\{ \begin{aligned} & C_0 + 2C_1 \sin\beta t\,(\beta\cos\beta t + m\sin\beta t) \\ & + 2C_2 \sin\beta t^3\,(2\beta\cos\beta t + m\sin\beta t) \\ & + \; C_3 \sin\beta t^4 \end{aligned} \right\}.$$

Darin ist:

$$C_0 = -\left(\tfrac{3}{2}\beta\,\frac{2\beta(p_1-p_3)+mp_2}{4\beta^2+m^2} + p_3\right)\frac{\beta^2}{4m(\beta^2+m^2)}, \qquad C_1 = C_0\,\frac{m}{\beta^2},$$

$$C_2 = -\frac{1}{8\beta}\,\frac{2\beta(p_1-p_3)+mp_2}{4\beta^2+m^2}, \qquad C_3 = \frac{p_2}{4\beta}.$$

Eine analoge Form hat die Gleichung (12) für $\beta(w-w_0)$, deren entsprechende, von q_1, q_2, q_3 abhängende Constanten durch C'_0, C'_1, C'_2, C'_3 bezeichnet werden mögen. Diese Grössen C' sowie die C erhalten eine einfachere Form, wenn wir die Werthe von p_1, p_2, p_3 und q_1, q_2, q_3 einsetzen. Definiren wir ferner eine Grösse S durch die Gleichung:

$$S = \frac{m^2 m_1 - n^2 n_1}{4n^2 - 3m^2},$$

so wird nach leichten Umformungen:

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} C_0 &= -\tfrac{3}{4}\frac{\beta^4}{mn^2} S, & C'_0 &= -\frac{\beta^3}{8n^2}(m_1 - 3S), \\ C_1 &= \frac{m}{\beta^2} C_0, & C'_1 &= \frac{m}{\beta^2} C'_0, \\ C_2 &= -\tfrac{1}{4} S, & C'_2 &= \frac{m}{8\beta}(m_1 + S), \\ C_3 &= -\frac{mm_1}{2}, & C'_3 &= -\frac{1}{4\beta}(2m^2 m_1 - n^2 n_1). \end{aligned} \right.$$

Es mag noch bemerkt werden, dass das Nullwerden des Nenners von S ausgeschlossen ist durch die Voraussetzung $n^2 > m^2$.

Zur Festsetzung der Werthe der Integrationsconstanten u_0 und w_0 stellen wir die Anfangsbedingungen, dass für $t=0$, auch $\varphi=0$ und $\frac{d\varphi}{dt}=v_0$ sein soll, daraus folgt:

$$B=0, \qquad A=\frac{v_0}{\beta} \qquad \text{für: } t=0$$

und nach den Gleichungen (8):

$$u=0, \qquad w=\frac{v_0}{\beta} \qquad \text{für: } t=0$$

und hieraus:

$$-\beta u_0 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C_0, \qquad \beta\left(\frac{v_0}{\beta}-w_0\right) = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C'_0.$$

Durch die Gleichung (3) in Verbindung mit (8), (11), (12), (13) ist ein Integral bestimmt, welches der Differentialgleichung (2) annähernd genügt; wir wollen jetzt zeigen, bis zu welchem Grade diese Annäherung reicht. Als Maass derselben kann eine Potenz der Grösse $\frac{v_0}{\beta}$ dienen, deren physikalische Bedeutung zunächst zu untersuchen ist. Hierbei können wir ausgehen von:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{\beta} e^{-mt} \sin\beta t,$$

anstatt von der Gleichung für φ, da es sich jetzt nur um die Ordnung der Grösse $\frac{v_0}{\beta}$ handelt. Es folgt daraus:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{v_0}{\beta} e^{-mt}\{-m \sin\beta t + \varphi \cos\beta t\}.$$

Es erreiche zur Zeit t', φ seinen grössten Werth, den Ausschlagswinkel α_0, dann wird $\frac{d\varphi_0}{dt}=0$, also:

$$\operatorname{tg}\beta t' = \frac{\beta}{m}, \qquad \sin\beta t' = \frac{\beta}{n}$$

und hieraus:

$$\alpha_0 = \frac{v_0}{\beta}\frac{\beta}{n} \cdot e^{-\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}},$$

woraus ersichtlich ist, dass $\frac{v_0}{\beta}$, abgesehen von endlichen Grössen, von der Ordnung des Ausschlagswinkels ist.

Aus den obigen Rechnungen ist nun ersichtlich, dass die durch (11) und (12) definirten Functionen u und w vollständig streng den Differentialgleichungen (9) und (10), also A und B den Gleichungen (6) und (7_a) genügen, mithin:

$$\varphi = A e^{-mt} \sin(\beta t + B)$$

der Gleichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi = 2mm_1\varphi_0^2\frac{d\varphi_0}{dt} + n^2 n_1 \varphi_0^3,$$

worin:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{\beta} e^{-mt} \sin \beta t$$

ist. Dagegen sollte eine Function φ^* gefunden werden, sodass:

$$\frac{dd\varphi^*}{dt^2} + 2m\frac{d\varphi^*}{dt} + n^2\varphi^* = 2mm_1\varphi^{*2}\frac{d\varphi^*}{dt} + n^2 n_1 \varphi^{*3}$$

ist. Bilden wir die Differenz dieser Gleichung und der vorigen, so können wir auf der rechten Seite der entstehenden Formel, auf welcher nur Correctionsgrössen stehen, φ statt φ^* setzen, da es jetzt nur darauf ankommt, die Ordnung von $\varphi - \varphi^*$ zu bestimmen. Wir erhalten dann:

$$\frac{dd(\varphi-\varphi^*)}{dt^2} + 2m\frac{d(\varphi-\varphi^*)}{dt} + n^2(\varphi-\varphi^*)$$

$$= 2mm_1\left(\varphi_0^2\frac{d\varphi_0}{dt} - \varphi^2\frac{d\varphi}{dt}\right) + n^2 n_1(\varphi_0^3 - \varphi^3).$$

Setzen wir nun an Stelle der obigen Gleichungen (11) und (12) die folgenden der Kürze halber:

$$u = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 U, \qquad w = \frac{v_0}{\beta}\left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W\right),$$

so wird, wenn wir eine Grösse von der Ordnung $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^n$ mit $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^n$ bezeichnen:

$$(14)\begin{cases} \dfrac{u}{w} = \left(\dfrac{v_0}{\beta}\right)^2 U\left(1 - \left(\dfrac{v_0}{\beta}\right)^2 W + \left[\dfrac{v_0}{\beta}\right]^4\right), \\ B = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{u}{w} = \left(\dfrac{v_0}{\beta}\right)^2 U + \left[\dfrac{v_0}{\beta}\right]^4 = \dfrac{\beta}{v^0} u + \left[\dfrac{v_0}{\beta}\right]^4, \\ \sin B = \left(\dfrac{v_0}{\beta}\right)^2 U + \left[\dfrac{v_0}{\beta}\right]^4, \qquad \cos B = 1 + \left[\dfrac{v_0}{\beta}\right]^4. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\sin(\beta t + B)^3 = \sin\beta t^3 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2.$$

Ferner ist:

$$(15)\qquad \begin{cases} A^2 = u^2 + w^2 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2\left(1 + 2\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right), \\ A = \frac{v_0}{\beta}\left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W\right) = w + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5. \end{cases}$$

Darnach wird:

$$\varphi^3 = A^3 e^{-3mt}\sin(\beta t + B)^3 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-3mt}\sin\beta t^3 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 . e^{-3mt}$$

oder:

$$\varphi^3 - \varphi_0{}^3 = e^{-3mt}\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5.$$

Ganz analog leitet man ab, dass:

$$\varphi^2\frac{d\varphi}{dt} - \varphi_0{}^2\frac{d\varphi}{dt} = \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

ist. Darnach erhält also die obige Gleichung für $(\varphi - \varphi^*)$ die Form:

$$\frac{dd(\varphi-\varphi^*)}{dt^2} + 2m\frac{d(\varphi-\varphi^*)}{dt} + n^2(\varphi-\varphi^*) = \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 F(t).$$

Da nun φ und φ^* und auch ihre Derivirten für $t = 0$ übereinstimmen, so würden die Anfangsbedingungen dieser Differentialgleichung sein:

$$t = 0, \qquad \varphi - \varphi^* = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\varphi - \varphi^*) = 0.$$

Eine Integration dieser Gleichung würde, ganz wie diejenige der Gleichung (2), auf die Form führen:

$$\varphi - \varphi^* = A_1 e^{-mt}\sin(\beta t + B_1),$$

und zwar ist, infolge der eben ausgesprochenen Anfangsbedingungen:

$$A_1 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^5 W_1(\varphi, t), \qquad B_1 = U_1(\varphi, t),$$

worin W_1 und U_1 eine den obigen W und U analoge Form besitzen, d. h. also $\varphi - \varphi^*$ ist eine Grösse von der Ordnung $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^5$.

Es ergibt sich daher das Theorem:

Die Function:

$$\varphi = A e^{-mt} \sin(\beta t + B); \qquad \beta^2 = n^2 - m^2, \tag{3}$$

worin die von t abhängigen Grössen A und B durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$A^2 = u^2 + w^2, \qquad \operatorname{tg} B = \frac{u}{w},$$

$$\tag{11} \left\{ \begin{aligned} \beta u &= \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C_0 \left(e^{-2mt} - 1\right) + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} . \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} 2C_1 \sin\beta t \quad (\beta \cos\beta t + m \sin\beta t) \\ +2C_2 \sin\beta t^3 \, (2\beta \cos\beta t + m \sin\beta t) \\ + \; C_3 \sin\beta t^4 \end{array} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$\tag{12} \left\{ \begin{aligned} \beta w &= v_0 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C'_0 \left(e^{-2mt} - 1\right) + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} . \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} 2C'_1 \sin\beta t \quad (\beta \cos\beta t + m \sin\beta t) \\ +2C'_2 \sin\beta t^3 \, (2\beta \cos\beta t + m \sin\beta t) \\ + \; C'_3 \sin\beta t^4 \end{array} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$\tag{13} \left\{ \begin{array}{ll} C_0 = -\frac{3}{4} \frac{\beta^4}{mn^2} S, & C'_0 = -\frac{1}{8} \frac{\beta^3}{n^2} (m_1 - 3S), \\ C_1 = \frac{m}{\beta^2} C_0, & C_1' = \frac{m}{\beta^2} C'_0, \\ C_2 = -\frac{1}{4} S, & C'_2 = \frac{1}{8} \frac{m}{\beta} (m_1 + S), \\ C_3 = -\frac{mm_1}{2}, & C'_3 = -\frac{1}{4} \frac{2m^2 m_1 - n^2 n_1}{\beta}, \\ & S = \frac{m^2 m_1 - n^2 n_1}{4n^2 - 3m^2} \end{array} \right.$$

genügt, wenn die fünften Potenzen des grössten Werthes von φ vernachlässigt werden, der allgemeinen Differentialgleichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m\,(1 - m_1 \varphi^2) \frac{d\varphi}{dt} + n^2 (\varphi - n_1 \varphi^3) = 0,$$

unter der Voraussetzung, dass $n^2 > m^2$ ist, und mit den Anfangsbedingungen, dass für $t = 0$, auch $\varphi = 0$ und $\frac{d\varphi}{dt} = v_0$ sein soll.

Anmerkung. Bei Gelegenheit der obigen Untersuchung hat sich noch folgender Satz ergeben:

§ 3.

Aus dem gewonnenen Integral sind die Gleichungen für die der Beobachtung zugänglichen Grössen, die Schwingungsdauer, das logarithmische Decrement, und für den Ausschlagswinkel bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit abzuleiten.

Aus (3) folgt für die Schwingungsdauer τ, d. i. für die kleinste Differenz zweier Werthe von t, für welche $\varphi = 0$ wird, die Bedingungsgleichung:

$$\beta\tau + B(\tau) = \pi,$$

worin τ als Argument von B hinzugefügt ist. Nach (14) ist:

Die Differentialgleichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + P(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + Q(\varphi) = 0$$

besitzt einen nur von t abhängigen integrirenden Factor nur dann, wenn:

$$P(\varphi) = \frac{1}{C}\frac{dQ(\varphi)}{d\varphi} + C$$

ist, und zwar ist dieser Factor e^{Ct}. Dadurch wird die ursprüngliche Gleichung auf folgende:

$$e^{Ct}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{Q(\varphi)}{C}\right) = \text{Constans}$$

zurückgeführt. In unserem Falle ist:

$$P(\varphi) = 2m(1 - m_1\varphi^2), \qquad Q(\varphi) = n^2(\varphi - n_1\varphi^3),$$

$$\frac{dQ(\varphi)}{d\varphi} = n^2(1 - 3n_1\varphi^2).$$

Es müsste also, damit die obige Bedingung erfüllt ist:

$$2m(1 - m_1\varphi^2) = \frac{n^2}{C}(1 - 3n_1\varphi^2) + C,$$

oder:

$$C = m \pm \sqrt{m^2 - n^2}, \qquad m_1 = \tfrac{3}{2}n_1\frac{n^2}{mC}$$

sein. C also auch m_1 würde daher nur im Falle einer aperiodischen Schwingung reell sein. Eine specielle Anwendung des obigen Satzes (für $P =$ Const., $Q(\varphi) = n^2\varphi$) liegt dem Verfahren zu Grunde, welches Du Bois-Reymond (Berlin. Monatsber. p. 539, 1870) bei der Integration der Differentialgleichung der Bewegung aperiodisch schwingender Magnete befolgt hat.

$$B = \text{arc tg}\,\frac{u}{w} = \frac{\beta}{v_0}\,u + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4.$$

Das Glied $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$ vernachlässigen wir, da zu diesem noch Theile hinzukommen würden, wenn in der Differentialgleichung (2) die Glieder von der Ordnung φ^5 berücksichtigt würden. Wir werden also für die Schwingungsdauer eine nur von dem Quadrate des Ausschlagswinkels abhängende Correction erhalten, d. h. eine für die Praxis wohl immer ausreichend genaue Bestimmung. Es wird daher nach (14) die Gleichung für τ:

$$\beta\tau + \frac{\beta}{v_0}\,u(\tau) = \pi, \tag{16}$$

Wir berechnen zunächst bis auf vierte Potenzen von $\frac{v_0}{\beta}$ einen Werth τ_1 aus der Gleichung:

$$\beta\tau_1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta}\left(e^{-2m\tau_1} - 1\right) = \pi, \tag{16a}$$

in der das zweite Glied der linken Seite gleich dem, trigonometrische Functionen nicht enthaltenden, Theile der Gleichung (11) ist. Mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von m ergibt sich ein erster Näherungswerth τ_2 aus:

$$\beta\tau_2 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta}(-2m\tau_2) = \pi,$$

nämlich:

$$\tau_2 = \frac{\pi}{\beta - \frac{2m}{\beta}\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0} = \frac{\pi}{\beta}\left(1 + \frac{2m}{\beta^2}\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right).$$

Sei nun: $\qquad \tau_1 = \tau_2 + \frac{\delta_1}{\beta},$

so wird:

$$e^{-2m\tau_1} = e^{-2m\frac{\delta_1}{\beta}}\, e^{-2m\frac{\pi}{\beta}}\left(1 - \frac{4m^2\pi}{\beta^3}\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right)$$

und es geht (16a) über in:

$$\delta_1 + \frac{2m\pi}{\beta^2}\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$$
$$+ \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta}\left(e^{-\frac{2m}{\beta}(\delta_1+\pi)}\left\{1 - \frac{4m^2\pi}{\beta^3}\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right\} - 1\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass δ_1 von der Ordnung $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ ist, also δ_1^2 und $\delta_1\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ vernachlässigt werden können, sodass wir erhalten:

$$\delta_1 + \frac{2m\pi}{\beta^2}\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta}\left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 = 0.$$

Die Einsetzung von τ_2 und δ_1 in die Gleichung:

$$\tau_1 = \tau_2 + \frac{\delta_1}{\beta}$$

ergibt: $$\tau_1 = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta^2}\left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4.$$

Sei endlich die gesuchte Grösse τ, welche der Gleichung:

$$\beta\tau + \frac{\beta}{v_0} u(\tau) = \pi$$

genügen soll, gleich $\tau_1 + \frac{\delta}{\beta}$, so ist diese Gleichung jetzt zurückgeführt auf die folgende:

$$\delta + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{e^{-2m\left(\tau_1 + \frac{\delta}{\beta}\right)}}{\beta} \cdot \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 2C_1 \sin(\beta\tau_1 + \delta)\ \{\ \beta\cos(\beta\tau_1+\delta) + m\sin(\beta\tau_1+\delta)\} \\ + 2C_2 \sin(\beta\tau_1+\delta)^3 \{2\beta\cos(\beta\tau_1+\delta) + m\sin(\beta\tau_1+\delta)\} \\ + \ C_3 \sin(\beta\tau_1+\delta)^4 \end{array} \right\} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 = 0.$$

Diese zeigt wieder, dass die Grössen δ^2 und $\delta\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ zum mindesten von der Ordnung $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$ sind.

In den Argumenten der trigonometrischen Functionen brauchen daher nur die Glieder ohne $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ und ohne δ berücksichtigt zu werden; nun ist:

$$\begin{aligned} \sin(\beta\tau_1 + \delta) &= \sin\beta\tau_1 + \delta . \cos\beta\tau_1 \\ &= \sin\left(\pi - \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2\right) + \delta . \cos\left(\pi - \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2\right) \\ &= \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2. \end{aligned}$$

d. h. δ besitzt nur einen Werth von der Ordnung $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$.
Die Gleichung:

$$(17) \qquad \tau = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta^2}\left(e^{-\frac{2mn}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$$

stellt daher die Schwingungsdauer dar. Die Grösse $\frac{v_0}{\beta}$ wird passender noch durch den Ausschlagswinkel α ausgedrückt. Die Differentiation des Integrals:

$$\varphi = A e^{-mt} \sin(\beta t + B)$$

gibt mit Rücksicht auf (6):

$$\frac{d\varphi}{dt} = A e^{-mt}\{-m \sin(\beta t + B) + \beta \cos(\beta t + B)\}.$$

Daraus folgt, dass zur Zeit t', wenn $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=t'} = 0$:

$$\operatorname{tg}\left(\beta t' + B(t')\right) = \frac{\beta}{m}, \qquad \sin\left(\beta t' + B(t')\right) = \frac{\beta}{n}$$

wird, also der Ausschlagswinkel:

$$\alpha = A(t')\frac{\beta}{n} \cdot e^{-mt'}.$$

Nach (15) ist nun:

$$A = \frac{v_0}{\beta}\left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

und daher:

$$\alpha = \frac{v_0}{\beta}\left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right) e^{-mt'} \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

$$\frac{v_0}{\beta} = \alpha \frac{n}{\beta} e^{mt'} \left\{1 - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t') + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right\}$$

$$\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = \alpha^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{2mt'} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4.$$

Ferner ist: $\qquad \beta t' + B(t') = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m},$

und mit Rücksicht auf (14):

$$t' = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2,$$

daher wird:

$$(18) \qquad \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = \alpha^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{\frac{2m}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m}} + [\alpha]^4.$$

Gleichung (17) erhält darnach die Form:

$$\tau = \frac{\pi}{\beta} - \alpha^2 \frac{n^2 C_0}{\beta^4} e^{\frac{2m}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m}} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + [\alpha]^4,$$

oder nach dem Einsetzen des Werthes von C_0:

$$\tau = \frac{\pi}{\beta}(1 - S_1 \alpha^2) + [\alpha]^4, \tag{19}$$

worin:

$$S_1 = \tfrac{3}{4} \frac{S}{m} \frac{\beta}{\pi} \cdot e^{\frac{2m}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m}} \left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right)$$

ist, und wie oben:

$$S = \frac{m^2 m_1 - n^2 n_1}{4n^2 - 3m^2}.$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass das Vorzeichen von S_1 durch S bestimmt wird, also wesentlich von dem Verhältniss der Werthe m_1 und n_1 abhängig ist. Bei rascher Abnahme der Dämpfung mit wachsendem Winkel tritt der Fall ein, dass die Schwingungsdauer mit wachsendem Bogen abnimmt, also eine Correction anzubringen ist, die sogar das entgegengesetzte Zeichen hat wie die gewöhnlich angewandte. So hat z. B. bei beiden oben untersuchten Multiplicatoren S einen positiven Werth, wie die unten angegebenen Zahlen lehren werden.

Ist im speciellen Falle $m^2 m_1 - n^2 n_1 = 0$, so sind die Schwingungsbogen nahezu ohne Einfluss auf die Schwingungsdauer. Für $m_1 = 0$ dagegen hat immer die Correctionsgrösse $(-S_1)$ das positive Vorzeichen. Für $m = 0$, $m_1 = 0$, $n_1 = \frac{1}{1.2.3}$ endlich, in welchem Falle die Differentialgleichung (2) in die folgende, abgesehen von fünften Potenzen von φ:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + n^2 \sin\varphi = 0$$

übergeht, erhält man aus der Gleichung (19) mit Berücksichtigung des Grenzwerthes:

$$\lim \frac{1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}}{m} = \frac{2\pi}{\beta}, \text{ für } \lim m = 0$$

und der Gleichung:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m} + \operatorname{arc\,tg}\frac{m}{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

die bekannte Formel:

$$\tau = \frac{\pi}{\beta}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2 + [\alpha]^4\right).$$

§ 4.

Zweitens soll das logarithmische Decrement als Function des Ausschlagswinkels bestimmt werden.

Es war oben (p. 464) schon die Gleichung für den ersten Ausschlagswinkel α_1 abgeleitet:

$$\alpha_1 = A(t')\frac{\beta}{n}e^{-mt'};$$

für den darauf folgenden α_2 folgt analog:

$$\alpha_2 = A(t'')\frac{\beta}{n}e^{-mt''}.$$

Die gegenseitige Abhängigkeit der Zeiten t' und t'' voneinander ist, wie aus der Formel für $\frac{d\varphi}{dt}$ folgt, durch die Gleichung:

$$\beta t'' + B(t'') = \beta t' + B(t') + \pi,$$

oder, wenn: $t'' - t' = \tau'$

gesetzt wird, durch die folgende:

$$(20) \qquad \beta\tau' + B(\tau' + t') - B(t') = \pi$$

bestimmt.

Nach einem Verfahren, das dem bei der Bestimmung von τ angewandten ganz analog ist, werde zunächst die Gleichung:

$$\beta\tau_1' + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta} e^{-2mt'}\left(e^{-2m\tau_1'} - 1\right) = \pi$$

nach τ'_1 aufgelöst; man erhält:

$$\tau_1' = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta^2} e^{-2mt'}\left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$$

In die allgemeine Gleichung (20), die, abgesehen von vierten Potenzen, auch so lauten kann:

$$\beta\tau' + \frac{\beta}{v_0}u(\tau' + t') - \frac{\beta}{v_0}u(t') = \pi,$$

werde dann eingesetzt:

$$\tau' = \tau'_1 + \frac{\delta}{\beta}.$$

Berücksichtigt man, dass im Argumente der trigonometrischen Functionen in dem Ausdrucke für u, da diese Glieder schon den Factor $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ besitzen, nur die Grössen ohne den Factor $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ und ohne δ beachtet zu werden brauchen, und wendet die Gleichungen an:

$$(21)\quad \begin{cases} \sin(\beta\tau' + \beta t') = -\sin\beta t' + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2 \\ \cos(\beta\tau' + \beta t') = -\cos\beta t' + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2, \end{cases}$$

so wird man erhalten:

$$\tau' = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1}{\beta^2} e^{-2mt'} \left\{ \begin{array}{l} C_0 + 2C_1 \sin\beta t'(\beta\cos\beta t' + m\sin\beta t') \\ \quad + 2C_2 \sin\beta t'^3(2\beta\cos\beta t' + m\sin\beta t') \\ \quad + 2C_3 \sin\beta t'^4 \end{array} \right\}$$

woraus sich mit Hülfe der Gleichungen:

$$\sin\beta t' = \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2, \qquad \cos\beta t' = \frac{m}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2,$$

und nach Einsetzen der Werthe der Constanten C_0 C_1 C_2 C_3 (13) ergibt:

$$(22)\quad \tau' = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{\beta^2}{2n^2 m}\left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right)\left(\frac{3S}{2} + \frac{m^2}{n^2}(m_1 + 9S)\right) e^{-2mt'},$$

und hieraus infolge von:

$$\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = \alpha_1^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{2mt'} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$$

$$\tau' = \frac{\pi}{\beta} - \alpha_1^2 \frac{1}{2m}\left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right)\left(\frac{3S}{2} + \frac{m^2}{n^2}(m_1 + 9S)\right).$$

Diesen Werth werden wir später in die Gleichung für das Decrement einsetzen. Aus den beiden Formeln für α_1 und α_2 ergibt sich zunächst:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{A(t')}{A(t' + \tau')} e^{m\tau'}.$$

Nun war nach (15):

$$A(t') = w(t') + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 = \frac{v_0}{\beta}\left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

oder, wenn wir: $\quad A(t') = e^{A_1(t')}$

setzen, so wird:

$$A_1(t') = \log\frac{v_0}{\beta} + \log\left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right)$$

$$= \log\frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t') + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$$

und daher:

$$\frac{A(t')}{A(t'+\tau')} = e^{A_1(t') - A_1(t'+\tau')} = e^{\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 (W(t') - W(t'+\tau'))}.$$

Das logarithmische Decrement λ ist also:

$$(23) \qquad \lambda = \log \operatorname{nat} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = m\tau' + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \left\{W(t') - W(t'+\tau')\right\},$$

worin:

$$W(t') = \frac{C_0'}{\beta}\left(e^{-2mt'} - 1\right) + \frac{e^{-2mt'}}{\beta} \cdot \times$$

$$\times \left\{\begin{array}{l} \quad 2\,C_1' \sin\beta t' \;\; (\;\beta \cos\beta t' + m \sin\beta t') \\ + 2\,C_2' \sin\beta t'^3\, (2\beta \cos\beta t' + m \sin\beta t') \\ + \quad C_3' \sin\beta t'^4 \end{array}\right\}$$

ist. Bei der Bildung der Differenz $W(t') - W(t'+\tau')$ sind die Gleichungen (21) zu berücksichtigen, und man erhält so:

$$W(t') - W(t'+\tau') = e^{-2mt'}(1 - e^{-2m\tau'}) \cdot \times$$

$$\times \left\{\begin{array}{l} \frac{C'_0}{\beta} + \frac{2C'_1}{\beta} \sin\beta t' \;\; (\;\beta \cos\beta t' + m \sin\beta t') \\ \quad + \frac{2C'_2}{\beta} \sin\beta t'^3\, (2\beta \cos\beta t' + m \sin\beta t') \\ \quad + \frac{C'_3}{\beta} \sin\beta t'^4 \end{array}\right\}.$$

Die weitere Ausrechnung, die ganz analog der bei der Ableitung von τ' durchgeführten ist, ergibt dann:

$$\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \left\{W(t') - W(t'+\tau')\right\}$$

$$= -\frac{\alpha_1^2}{4}\left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right)\left(\frac{m_1 - 3S}{2} + \frac{m^2}{n^2}(m_1 - 9S) - n_1\right)$$

Dieser Werth, sowie der von τ', sind in die Gleichung (23) einzusetzen, und man erhält dann:

$$\lambda = \frac{m\pi}{\beta} - \frac{\alpha_1^2}{8}\left\{(m_1 + 3S)\left(1 + 6\frac{m^2}{n^2}\right) - 2n_1\right\}\left\{1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right\},$$

oder mit Hülfe von:

$$m_1 + 3S = n^2 \frac{4m_1 - 3n_1}{4n^2 - 3m^2}$$

den zur Rechnung bequemern Ausdruck:

$$(24)\quad \lambda = \frac{m\pi}{\beta} - \frac{\alpha_1^2}{8}\left\{m_1 \frac{1 + 6\frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4}\frac{m^2}{n^2}} - \frac{11}{4} n_1 \frac{1 + \frac{12}{11}\frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4}\frac{m^2}{n^2}}\right\}\left\{1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right\}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Dämpfung mit wachsendem Ausschlagswinkel abnimmt, wenn:

$$m_1\left(1 + 6\frac{m^2}{n^2}\right) > \frac{11}{4} n_1 \left(1 + \frac{12}{11}\frac{m^2}{n^2}\right)$$

ist, wie es bei den meisten Galvanometern der Fall sein wird. Ist dagegen die Dämpfungsfunction constant, also $m_1 = 0$, so nimmt das Decrement um eine n_1 proportionale Grösse mit wachsendem Ausschlagswinkel zu.

§ 5.

Zur Ableitung der Formel für die Anfangsgeschwindigkeit gehen wir von der Gleichung:

$$\alpha_1 = A(t')\frac{\beta}{n}e^{-mt'} = \frac{v_0}{\beta}\left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right)\cdot\frac{\beta}{n}\cdot e^{-mt'}$$

aus, welche:

$$v_0 = n\alpha_1 e^{mt'}\left(1 - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right)$$

ergibt. Der Werth von t', der zunächst bestimmt werden muss, war durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\left(\beta t' + B(t')\right) = \frac{\beta}{m}$$

definirt, die mit Hülfe von (14) die Form:

$$\beta t' + \frac{\beta}{v_0}u(t') = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}$$

erhält. Um hieraus t' zu bestimmen, sind in den Ausdruck (11) für $u(t')$ die Gleichungen:

$$\text{(25)} \qquad \sin\beta t' = \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2, \qquad \cos\beta t' = \frac{m}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2$$

einzusetzen und in die Glieder, welche schon den Factor $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$ haben, der Werth für t':

$$t' = \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2,$$

endlich die Gleichung:

$$\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = \alpha_1{}^2\frac{n^2}{\beta^2}e^{2mt'}$$

und die Werthe der Constanten C. Man erhält dann nach leichten Ausrechnungen:

$$t' = \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m} + \frac{\alpha_1{}^2}{2m}\left\{\frac{3S}{2}\left(1 - e^{-\frac{2m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}}\right) + \frac{m^2}{n^2}(m_1 + 9S)\right\}.$$

Es ist daher:

$$\text{(26)} \quad e^{mt'} = e^{\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}}\left\{1 + \frac{\alpha_1{}^2}{2}\left(\frac{3S}{2}\left\{1 - e^{\frac{2m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}}\right\} + \frac{m^2}{n^2}(m_1 + 9S)\right) + [\alpha]^4\right\}$$

Die zur Bestimmung von v_0 noch nöthige Berechnung von $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')$ ist schon auf p. 468 durchgeführt. Setzt man die Werthe von $\sin\beta t'$, $\cos\beta t'$ nach (25) und die Ausdrücke für die Constanten C_0', C_1', C_2' C_3' in die dortige Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\text{(27)} \quad \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t') = \alpha_1{}^2\left(-\tfrac{1}{8}(m_1 - 3S)\left(1 - e^{\frac{2m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{2m}}\right) - \frac{m^2}{4n^2}(m_1 - 9S) + \frac{n_1}{4}\right)$$

Infolge der Gleichungen (26) und (27) geht schliesslich:

$$v_0 = n\alpha_1 e^{mt'}\left(1 - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right) \qquad \text{in:}$$

$$v_0 = n\alpha_1 e^{\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}}\left\{1 - \frac{\alpha_1{}^2}{8}\left((m_1 + 3S)\left(e^{\frac{2m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}} - 1 - 6\frac{m^2}{n^2}\right) + 2n_1\right)\right\}$$

über, oder in:

$$(28)\quad \begin{cases} v_0 = n\alpha_1 e^{\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}} \cdot \times \\ \times\left\{1 - \frac{\alpha_1{}^2}{8}\left(\frac{m_1 - \frac{3}{4}n_1}{1 - \frac{3}{4}\frac{m^2}{n^2}} e^{\frac{2m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}} - m_1 \frac{1 + 6\frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4}\frac{m^2}{n^2}} + \frac{11}{4}n_1 \frac{1 + \frac{12}{11}\frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4}\frac{m^2}{n^2}}\right)\right\}. \end{cases}$$

Nach (24) ist nun für $\alpha_1 = 0$, d. h. für unendlich kleine Schwingungsbogen das log. Decrement Λ durch die Gleichung:

$$\frac{m}{\beta} = \frac{\Lambda}{\pi}$$

bestimmt, demnach ist: $\frac{m^2}{n^2} = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \pi^2}$.

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die mit $\alpha_1{}^2$ multiplicirten Glieder der Formel (24) und (28) erhalten diese die einfachere im Folgenden angegebene Gestalt.

Die letzten Resultate lassen sich zu dem Satze zusammenfassen:

Aus dem Integrale der allgemeinen Differentialgleichung:

$$(3)\qquad \frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m(1 - m_1\varphi^2)\frac{d\varphi}{dt} + n^2(\varphi - n_1\varphi^3) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen: Für $t=0$ *ist* $\varphi=0$ *und* $\frac{d\varphi}{dt} = v_0$, *ergeben sich für die Schwingungsdauer* τ, *für das logarithmische Decrement* $\lambda = \log\operatorname{nat}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ *und für die Anfangsgeschwindigkeit* v_0, *als Functionen des Ausschlagswinkels* α_1 (α_2 *ist der nächstfolgende Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite) mit Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung* $\alpha_1{}^4$, *folgende Gleichungen:*

$$(19)\qquad \tau = \frac{\pi}{\beta}(1 - S_1\alpha_1{}^2), \qquad \beta^2 = n^2 - m^2,$$

$$(24)\qquad \lambda = \frac{\pi}{\beta}m(1 - S_2\alpha_1{}^2),$$

$$(28)\qquad v_0 = n\alpha_1 e^{\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}}(1 - S_3\alpha_1{}^2).$$

Bezeichnet man mit Λ *das logarithmische Decrement für „unendlich“ kleine Schwingungsbogen, so ist:*

$$S_1 = \tfrac{3}{4}\, S \frac{1 - e^{-2\Lambda}}{\Lambda}\, e^{\frac{2\Lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\Lambda}};$$

$$S = \tfrac{1}{4}\, \frac{G\, m_1 - n_1}{1 - \tfrac{3}{4} G}; \qquad G = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \pi^2};$$

$$S_2 = \tfrac{1}{8} \frac{1 - e^{-2\Lambda}}{\Lambda}\, S_2^*;$$

$$S_2^* = m_1 \frac{1+6G}{1-\tfrac{3}{4}G} - \tfrac{11}{4} n_1 \frac{1+\tfrac{12}{11}G}{1-\tfrac{3}{4}G} = \frac{4 m_1\, (7\Lambda^2 + \pi^2) - n_1\, (23\Lambda^2 + 11\pi^2)}{\Lambda^2 + 4\pi^2};$$

$$S_3 = \tfrac{1}{8}\, (S_3^* - S_2^*); \qquad S_3^* = \frac{m_1 - \tfrac{3}{4} n_1}{1 - \tfrac{3}{4} G}\, e^{\frac{2\Lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\Lambda}}.$$

Um also den numerischen Werth der Correctionsgrössen S_1, S_2, S_3 bestimmen zu können, ist nur die Kenntniss von Λ, n_1 und m_1 nothwendig.

Der Uebersichtlichkeit halber seien noch die Gleichungen hinzugefügt, welche die Constanten n, m, n_1, m_1 auf, der Beobachtung zugängliche, Grössen zurückführen:

$$\text{(24a)} \left\{ \begin{aligned} & n = \frac{1}{\tau_0} \sqrt{\lambda_0^2 + \pi^2}, \qquad n_1 = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f}{MT}}; \\ & m = \frac{\lambda}{\tau_0}\, \frac{\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}}{\sqrt{\lambda_0^2 + \pi^2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2 + \pi^2} S_2\, \alpha_1^2\right) \text{ aus (24):} \end{aligned} \right.$$

und $\dfrac{m}{\beta} = \dfrac{\lambda}{\pi} \left(1 + S_2(\lambda) \,.\, \alpha_1^2\right)$, $\quad \dfrac{m\pi}{\beta} = \Lambda = \lambda \left(1 + S_2(\lambda) \,.\, \alpha_1^2\right)$,

worin $S_2(\lambda)$ die oben definirte Grösse S_2 bedeutet, wenn überall λ statt Λ eingesetzt ist. *Allgemein kann in den obigen S_1, S_2, S_3 die Substitution λ statt Λ gemacht werden, die nur einen Einfluss auf Glieder mit α_1^4 ausübt.*

Ferner ist:

$$m = \frac{\lambda_0}{\tau_0} + M \qquad M(1 - M_1\, \varphi^2) = \frac{1}{2KW} \cdot \left(\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2.$$

$$m_1 = \frac{M}{m} M_1$$

Die Bedeutung der hierin vorkommenden Grössen ist dieselbe wie auf p. 453 und 294:

§ 6.

Für die beiden Multiplicatoren, an denen die angegebenen Beobachtungen ausgeführt sind, ergeben sich mit Benutzung der oben (p. 292, 296) angegebenen Werthe:

Mult. I	Mult. II
$M = 0{,}03428$	$M = 0{,}03712$
$M_1 = 3{,}553$	$M_1 = 20{,}084$
$\lambda_0 \log e = 0{,}004$	$\lambda_0 \log e = 0{,}007$
$\tau_0 = 30{,}30$	$\tau_0 = 20{,}44$
$\frac{f}{\mathrm{M}T} = 1{,}222$	$\frac{f}{\mathrm{M}T} = 0{,}0093$

die Grössen:

$m = 0{,}03459$	$n = 0{,}10369$	$m = 0{,}03791$	$n = 0{,}15370$
$m_1 = 3{,}521$	$n_1 = 0{,}07500$	$m_1 = 19{,}666$	$n_1 = 0{,}16513$

und hieraus für den:

Mult. I | Mult. II

$$\tau = \frac{\pi}{\beta}\,(1 - 0{,}12425\,\alpha_1^2) \qquad \tau = \frac{\pi}{\beta}\,(1 - 0{,}70430\,\alpha_1^2)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{\beta}\,m\,(1 - 0{,}61713\,\alpha_1^2) \qquad \lambda = \frac{\pi}{\beta}\,m\,(1 - 3{,}4453\,\alpha_1^2)$$

$$= n\,\alpha_1\,e^{\frac{m}{\beta}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\beta}{m}}(1 - 0{,}35975\,\alpha_1^2); \qquad v_0 = n\,\alpha_1\,e^{\frac{m}{\beta}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\beta}{m}}(1 - 1{,}5629\,\alpha_1^2).$$

Für $\alpha_1 = (3^0) = 0{,}05236\ldots$,

erhalten die Correctionsgrössen, (bezeichnet wie auf p. 472) die Werthe:

$S_1\,\alpha_1^2 = 0{,}0003$	$S_1\,\alpha_1^2 = 0{,}0019$
$S_2\,\alpha_1^2 = 0{,}0017$	$S_2\,\alpha_1^2 = 0{,}0095$
$S_3\,\alpha_1^2 = 0{,}0006$	$S_3\,\alpha_1^2 = 0{,}0043$

und für $\alpha_1 = (6^0) = 0{,}10472\ldots$

$S_1\,\alpha_1^2 = 0{,}0012$	$S_1\,\alpha_1^2 = 0{,}0077$
$S_2\,\alpha_1^2 = 0{,}0068$	$S_2\,\alpha_1^2 = 0{,}0378$
$S_3\,\alpha_1^2 = 0{,}0025$	$S_3\,\alpha_1^2 = 0{,}0171$

Vergleicht man hiermit die Grösse der Correction, welche bisher bei den Beobachtungen am Galvanometer, abgesehen von Scalenreductionen, allein angewandt ist, nämlich die Correction der Schwingungsdauer auf „unendlich" kleine Bogen, d. i. $\frac{1}{16}\alpha_1^2$, deren Werthe sind für:

$$\alpha_1 = (3^0) \qquad \tfrac{1}{16}\alpha_1{}^2 = 0{,}0002$$
$$\alpha_1 = (6^0) \qquad \tfrac{1}{16}\alpha_1{}^2 = 0{,}0007\,,$$

also kleiner als die oben berechneten Correctionen, so wird man die Nothwendigkeit, auch die Grössen S_1 S_2 S_3 in manchen Fällen berücksichtigen zu müssen, nicht zurückweisen können.

Unter den angegebenen Formeln ist diejenige für die Dämpfung (24) einer Controle durch die Beobachtung unmittelbar zugänglich.

An dem Multiplicator II wurde, um diese Controle auszuführen, das logarithmische Decrement bei verschieden grossen Ausschlägen bestimmt, mit Benutzung von Inductionsströmen, die durch einen Magnetinductor in verschiedener Intensität erzeugt werden konnten. Die mit Anwendung der Zurückwerfungsmethode so erhaltenen Werthe sind in der folgenden Tab. 5 angegeben in den Rubriken „Beob."; s_1 bedeutet den zugehörigen ersten Ausschlag in Scalentheilen. Der für $s_1 = 71{,}7$ beobachtete Werth ist dann jedesmal als das für unendlich kleine Schwingungen geltende Decrement angenommen, und darnach sind die unter „Ber." angegebenen Zahlen aus der über der Tabelle angegebenen Formel erhalten.

Tabelle V. Galvanometer II.

$$\lambda = \frac{m\pi}{\beta}\left(1 - 3{,}4453\left(\frac{s_1}{2r}\right)^2\right). \qquad r = 4120\,\text{mm}$$

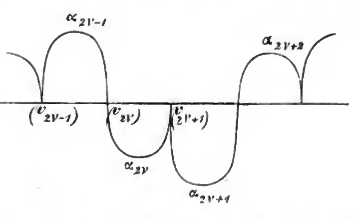
s_1	$\lambda \log e$					
	Juni 12	$t = 18{,}05^0$	Juni 12	$t = 19{,}75^0$	Juni 13	$t = 18{,}05^0$
	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.
71,7	0,34429	—	0,34227	—	0,34479	—
342,4	0,34229	0,34225	0,34099	0,34024	0,34305	0,34274
538,5	0,33890	0,33924	0,33713	0,33724	0,33947	0,33972

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung kann man wohl als eine genügende ansehen.

Die abgeleiteten Formeln mögen schliesslich noch Anwendung finden auf die Bestimmung der Correction, welche an dem berechneten Werthe der *magnetischen Inclination*

anzubringen ist, der mit dem Multiplicator II in Verbindung mit dem zu diesem Zwecke im hiesigen magnetischen Observatorium aufgestellten Weber'schen Erdinductor erhalten wird. Wendet man die Zurückwerfungsmethode an, so bedarf auch die bekannte Formel, welche aus den beiden Grenzwerthen der Schwingungsbogen a und b den ersten Ausschlag berechnen lehrt, noch einer von a und b abhängigen Correction.

Wenn nach ν Inductionsstössen der Magnet bei seinem zweiten (von dem letzten Stosse an gezählten) Durchgange durch die Ruhelage die Geschwindigkeit $v_{2\nu+1}$ besitzt, und in diesem Augenblicke durch einen neuen, seiner Bewegung entgegenwirkenden Inductionsstoss die Geschwindigkeit v_0 erhält, so wird der folgende Ausschlagswinkel $\alpha_{2\nu+1}$ gemäss der Gleichung (28) bestimmt durch:



$$(29) \qquad v_0 - v_{2\nu+1} = n \,.\, \alpha_{2\nu+1}\, e^{\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}} \left(1 - S_3\, \alpha_{2\nu+1}^{\;2}\right).$$

Die dann ungestört durch die Ruhelage sich zurückbewegende Nadel möge bis zum Winkel $\alpha_{2\nu+2}$ ausschlagen, so ist:

$$\alpha_{2\nu+2} = \alpha_{2\nu+1}\, \theta(\alpha_{2\nu+1}),$$

wenn $\theta(\alpha_{2\nu+1})$ das Dämpfungsverhältniss für den Winkel $\alpha_{2\nu+1}$ bedeutet. Durch eine der obigen analoge Gleichung sind v_0 und $v_{2\nu+1}$ bestimmt:

$$v_0 = n\,\alpha_1\, e^{\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}}(1 - S_3\,\alpha_1^{\,2}),$$

$$v_{2\nu+1} = n\,\alpha_{2\nu}\,\theta(\alpha_{2\nu})\, e^{\frac{m}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}}\left(1 - S_3\,\alpha_{2\nu}^{\;2}\,\theta(\alpha_{2\nu})^2\right).$$

Hier ist α_1 der erste, $\alpha_{2\nu}$ der vor $\alpha_{2\nu+1}$ vorhergehende Ausschlagswinkel, also $\alpha_{2\nu}\;\theta(\alpha_{2\nu})$ der auf $\alpha_{2\nu}$ folgende, wenn die Nadel ungestört geblieben wäre.

Die Einsetzung der beiden vorhergehenden Gleichungen und der folgenden:

$$\alpha_{2\nu} = \alpha_{2\nu-1}\,\theta(\alpha_{2\nu-1})$$

in (29) ergibt:

$$\alpha_1(1-S_3\alpha_1^2) - \alpha_{2\nu-1}\theta(\alpha_{2\nu})\theta(\alpha_{2\nu-1})\{1-S_3\alpha_{2\nu-1}^2\theta(\alpha_{2\nu})^2\theta(\alpha_{2\nu-1})^2\}$$
$$= \alpha_{2\nu+1}(1-S_3\,\alpha_{2\nu+1}^2).$$

Sind nun nach einer genügenden Anzahl von Inductionsstössen die Ausschläge constant geworden, also:

$$\alpha_{2\nu+1} = \alpha_{2\nu-1} = \frac{a}{2}, \qquad \alpha_{2\nu+2} = \alpha_{2\nu} = \frac{b}{2},$$

so wird:

$$\theta(\alpha_{2\nu+1}) = \theta(\alpha_{2\nu-1}) = \frac{b}{a} = \theta\left(\frac{a}{2}\right)$$

und aus der vorhergehenden Gleichung:

$$2\alpha_1(1-S_3\alpha_1^2) = a\left\{1-S_3\frac{a^2}{4}+\theta\left(\frac{b}{2}\right)\theta\left(\frac{a}{2}\right)\left(1-S_3\frac{a^2}{4}\theta\left(\frac{b}{2}\right)^2\theta\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\right\}.$$

Nun ist nach Gleichung (24):

$$\lambda = \log\text{nat}\,\frac{a}{b} = \frac{m\pi}{\beta}\left(1-S_2\frac{a^2}{4}\right)$$

und daher mit Vernachlässigung der höheren Potenzen:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\theta\left(\frac{a}{2}\right)} = e^{\frac{m\pi}{\beta}}\left(1-\frac{m\pi}{\beta}S_2\frac{a^2}{4}\right)$$

und analog:

$$\frac{1}{\theta\left(\frac{b}{2}\right)} = e^{\frac{m\pi}{\beta}}\left(1-\frac{m\pi}{\beta}S_2\frac{b^2}{4}\right)$$

oder nach Einsetzung des Werthes von: $e^{\frac{m\pi}{\beta}}$ aus der vorigen Gleichung:

$$\frac{1}{\theta\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{a}{b}\left(1+\frac{m\pi}{\beta}S_2\frac{a^2-b^2}{4}\right).$$

Hiernach erhält die Formel für α_1 die Gestalt:

$$2\alpha_1(1-S_3\alpha_1^2) = a\left(1-S_3\frac{a^2}{4}\right)$$
$$+\,a\frac{b^2}{a^2}\left(1-\frac{m\pi}{\beta}S_2\frac{a^2-b^2}{4}\right)\left(1-S_3\frac{a^2}{4}\frac{b^4}{a^4}\left\{1-\frac{m\pi}{\beta}S_2\frac{a^2-b^2}{4}\right\}^2\right)$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung a^4 oder $a^2 b^2$:

$$(30)\quad 2\alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left\{ 1 + \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \Lambda \frac{a^2 - b^2}{4} S_2 - \frac{b^2}{4} S_3 \right) - \frac{a^2}{4} S_3 \right\},$$

nachdem:
$$\frac{m\pi}{\beta} = \Lambda$$
gleich dem Decremente für unendlich kleine Bogen eingesetzt ist.

Die Formel (30) *tritt also an die Stelle der sonst bei der Zurückwerfungsmethode angewandten:*

$$2\alpha_1 = a \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \cdot$$

Die analoge, bei der Multiplicationsmethode anzuwendende genaue Formel lautet, wenn a den Grenzwerth des Schwingungsbogen bezeichnet:

$$2\alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left\{ 1 - e^{-\Lambda} - \frac{a^2}{4} \left(\Lambda e^{-\Lambda} S_2 - \left(e^{-3\Lambda} - 1 \right) S_3 \right) \right\} \cdot$$

In diese beiden Formeln kann für α_1 in $S_3 \alpha_1^2$ der genäherte Werth, für welchen S_1, S_2, S_3 Null sind, eingesetzt werden.

Sind nun v_1 resp. v_2 die bei der Induction um die horizontale resp. verticale Componente des Erdmagnetismus, dem Magneten ertheilten Anfangsgeschwindigkeiten und a_1 resp. a_2 die ersten Ausschlagswinkel, so ist:

$$v_1 = n a_1 e^{\frac{m}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 a_1^2), \qquad v_2 = n a_2 e^{\frac{m}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 a_2^2),$$

andererseits ist bekanntlich:

$$v_1 = \frac{2F}{KW} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = 0} \cdot T; \qquad v_2 = \frac{2F}{KW} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi = 0} \cdot V,$$

wenn T die horizontale, V die verticale Componente der erdmagnetischen Kraft bedeutet, F die Fläche des Erdinductors. Daraus folgt:

$$(31)\qquad \frac{V}{T} = \operatorname{tg} i = \frac{a_2}{a_1} \frac{1 - S_3 a_2^2}{1 - S_3 a_1^2},$$

worin i die magnetische Inclination bezeichnet. Da nun $S_3 a_2^2 \gtreqless S_3 a_1^2$ ist, je nachdem $V \gtreqless T$, so ersieht man, dass die Inclination ohne diese Correctionsgrössen zu gross resp. zu klein gefunden wird, wenn i grösser resp. kleiner als 45^0 ist.

Es mag noch besonders bemerkt werden, dass in den beiden ersten Gleichungen für v_1 und v_2 im Exponenten von *e die absolute Constante* $\frac{m}{\beta}$, *nicht ursprünglich das vom Winkel abhängige log. Decrement* steht, wie man die Formel sonst angegeben findet. Aus dem Werthe für tg$i$ fällt daher die Exponentialfunction ganz heraus. Berücksichtigt man sie, so beruht dies auf der Annahme einer infolge von Temperaturänderung eingetretenen Aenderung des Widerstandes Dann aber muss auch consequenter Weise W in den beiden Gleichungen für v_1 und v_2 verschieden angenommen, also in der Formel für tg$i$ müssen noch andere von den Decrementen abhängige Correctionsfactoren berücksichtigt werden.

Seien nun

a, b die beiden Grenzwerthe des Schwingungsbogen a_1 und des darauf folgenden; analog

A, B die Grenzwerthe von a_2 und des folgenden, so erhält mit Hülfe von (30) die Gleichung (31) die Form:

$$\operatorname{tg} i = \frac{A}{a} \cdot \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}\left(1 - \Lambda \frac{A^2 - B^2}{4} S_2 - \frac{B^2}{4} S_3\right) - \frac{A^2}{4} S_3}{1 + \frac{b^2}{a^2}\left(1 - \Lambda \frac{a^2 - b^2}{4} S_2 - \frac{b^2}{4} S_3\right) - \frac{a^2}{4} S_3}$$

$$(32)\quad \left\{ \operatorname{tg} i = \frac{A}{a} \cdot \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\Lambda}{4} S_2 \left(B^2 \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} - b^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) \\ - \frac{S_3}{4}\left(\frac{B^4}{A^2 + B^2} - \frac{b^4}{a^2 + b^2}\right) - \frac{S_3}{4}(A^2 - a^2) \end{array} \right\} \right. .$$

Bei einer am 2. Sept. 1877 angestellten Inclinationsbestimmung mit dem Multiplicator II und dem Erdinductor ergaben sich folgende auf Bogen reducirte Grenzwerthe der Schwingungsbogen in Scalentheilen:

$$a \,.\, 2r = 264{,}98\,, \qquad A \,.\, 2r = 613{,}07\,,$$
$$b \,.\, 2r = 148{,}34\,, \qquad B \,.\, 2r = 344{,}41\,,$$
$$r = 4120\,.$$

Aus den beiden Werthen des Decrements:

$$\log \frac{a}{b} = 0{,}25196 = \lambda(a) \,.\, \log e\,; \qquad \log \frac{A}{B} = 0{,}25044 = \lambda(A) \log e,$$

wo a, A als Argumente zu λ hinzugefügt sind, ergibt sich mit Hülfe der Gleichungen:

$$\lambda(a) = \varDelta(1 - S_2 a^2); \qquad \lambda(A) = \varDelta(1 - S_2 A^2),$$

das Decrement $\varDelta$ für unendlich kleine Bogen:

$$\varDelta \log e = 0{,}25231\,.$$

Die Correctionsgrösse S_2 aus diesen Beobachtungen zu berechnen, erscheint nicht zweckmässig, da hier der Einfluss der Beobachtungsfehler zu gross ist. Da aber M_1 für den Multiplicator II uns jetzt bekannt ist, so ergeben uns die Gleichungen auf p. 472 nach Einsetzen von $\varDelta$ die Werthe:

$$S_2 = 3{,}5848\,, \qquad S_3 = 1{,}1543\,,$$

und es wird aus der Formel (32):

$$\operatorname{tg} i = \frac{A}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} (1 - 0{,}000\,3841 - 0{,}000\,0984 - 0{,}001\,2958)\,,$$

$$i = 66^0\ 37'\ 23''.$$

Wendet man dagegen die gebräuchliche Formel an:

$$\operatorname{tg} i' = \frac{A}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}\,, \quad \text{so folgt:} \quad i' = 66^0\ 39'\ 36''.$$

Die Correction beträgt also hier:

$$i - i' = -\,2'\ 13''.$$

Die Grösse:

$$1 - \frac{S_3}{4}(A^2 - a^2) = 1 - 0{,}001\,2958$$

ist die Correctionsgrösse der Formel (31), wenn die Differenzen $(a_2 - A)$, $(a_1 - a)$ vernachlässigt werden (sie betragen infolge der starken Dämpfung nur ungefähr 50 Scalentheile). Jene Correctionsgrösse hat einen Werth von 1′ 37″.

Aus Gleichung (32) ist ferner noch ersichtlich, dass in derselben zu dem Quotienten $\frac{A}{a}$ eine positive und eine negative Grösse hinzugefügt wird; es kann also der Fall eintreten, dass dieselben Null sind und:

$$\operatorname{tg} i'' = \frac{A}{a}$$

den richtigen Werth darstellt; in der That ergibt sich in unserem Falle: $i'' = 66^0\ 37'\ 31''$.

Man kann daher die Regel aussprechen:

So lange nicht für den Multiplicator die Correctionsconstanten S_2 und S_3 bekannt sind, erhält man einen dem wahren Werthe der Inclination am nächsten kommenden, wenn man die Tangente der Inclination gleich dem Quotienten aus den beiden bei der Rückwerfungsmethode erhaltenen grösseren Schwingungsbogen setzt.

Es könnte hier der Einwand erhoben werden, dass die streng durchgeführte Voraussetzung eines vom Winkel unabhängigen Decrements, von welcher man ursprünglich bei der Integration der Differentialgleichung ausgegangen ist, und nach welcher $\frac{a}{b}$ und $\frac{A}{B}$ gleich sein sollte, gerade die Formel:

$$\operatorname{tg} i'' = \frac{A}{a}$$

fordern würde. Dagegen lässt sich erwidern, dass der Beobachter, der z. B. solche Differenzen zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{A}{B}$ constant findet, wie auf p. 478 angegeben sind. es naturgemäss für eine grössere Annäherung halten wird, diese Differenzen, schon aus dem Grunde, um etwaige Widerstandsänderungen zu berücksichtigen, auch in der Berechnung zur Geltung kommen zu lassen, also die Formel:

$$\operatorname{tg} i'' = \frac{A}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

anzuwenden.[1]) Erst jetzt nach Ableitung der allgemeineren Theorie erweist sich diese Ansicht mit Bestimmtheit als unzutreffend.

Zur Controle für den Werth der oben berechneten Correction von $2'\ 13''$ können die Beobachtungen dienen, welche im Jahre 1877 gleichzeitig angestellt wurden, einerseits mit dem oben erwähnten Erdinductor (mittlerer

1) H. Wild, a. a. O. Mém. de l'acad. roy. de St. Pétersbourg 1878.

Radius der Windungen = 445 mm) und dem Multiplicator II, andererseits mit einem kleinen Erdinductor von Dr. Meyerstein (mittlerer Radius = 73 mm) und einem Galvanometer, dessen Multiplicator (im Folgenden mit III bezeichnet) mit eng elliptischen Windungen den Magnet umschliessend, jedenfalls den Multiplicator I noch in Rücksicht auf die Constanz der Dämpfung übertrifft, sodass für ihn die Correction derselben auf unendlich kleine Schwingungen vernachlässigt werden kann. Die Instrumente waren im magnetischen Observatorium aufgestellt. Die Werthe der Inclination, berechnet aus den Beobachtungen am Multiplicator II waren immer die grösseren, und zwar betrug die Differenz im Mittel aus neun Beobachtungen

am: Aug. 28., Septbr. 2., 3. 1877

+ 4′ 25″.

Dann wurde am 6. Septbr. der Multiplicator III mit dem kleinen Erdinductor auf einer in der Nähe der Stadt gelegenen Anhöhe unter einem Zelte aufgestellt, um etwaige Localeinflüsse zu vermeiden, während der Multiplicator II an seinem Platze im magnetischen Observatorium blieb. Aus gleichzeitigen Beobachtungen ergab sich wieder für den Multiplicator II immer eine positive Differenz, und zwar im Mittel aus sieben Bestimmungen von:

+ 3′ 6″.

Mit Berücksichtigung der jetzt nach den obigen Ableitungen bekannten Correctionen, infolge der Abhängigkeit des Decrements vom Ausschlagswinkel, im Betrage von

− 2′ 13″

bleibt zwischen den Beobachtungen mit den beiden Instrumenten noch ein Unterschied im Mittel von + 1′ 32″, und die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Differenzen dividirt durch die Anzahl (16) aller Bestimmungen reducirt sich von + 4′ 1″ auf 2′ 5″.

Es ist also durch diese Correction die mittlere Abweichung der mit zwei verschiedenen Instrumenten erhaltenen Werthe, von einer Grösse, die mit ziemlicher Sicherheit vorhersagen liess, dass sie eine in den Instrumenten

oder in der Theorie liegende Ursache besitze, auf einen Werth zurückgeführt, der innerhalb der Grenzen desjenigen Beobachtungsfehlers liegt, welchen W. Weber[1]) für eine Inclinationsbestimmung nach dieser Methode auf 2′ 20″ angibt, wenn nicht die gleichzeitigen Variationsbeobachtungen in Rechnung gezogen werden. Es spricht die Wahrscheinlichkeit also nicht dafür, dass die noch bleibende Differenz einen sachlichen Grund habe. Ausserdem mag noch hinzugefügt werden, dass die Grösse M_1, mit der die Correction von 2′ 13″ berechnet ist, wahrscheinlich bei den Beobachtungen 1877 grösser gewesen ist, infolge einer damals nicht so genau ausführbaren Centrirung des Multiplicators, wie es jetzt möglich ist. Der Werth von M_1 und die daraus berechnete Correction von − 2′ 13″ kann daher, wenn der Multiplicator nicht centrirt war, nur als die möglichst kleinste angesehen werden.

Göttingen, Juni 1879.

Nachtrag. Nach einer längern Abwesenheit zurückgekehrt, erhielt ich vor 14 Tagen Kenntniss von einer inzwischen übersandten Abhandlung von Hrn. O. Chwolson: Ueber die Dämpfung von Schwingungen bei grösseren Amplituden. Mém. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. **26.** Nr. 14. Ausgegeben August 1879. Diese Abhandlung hat die theoretischen Untersuchungen, welche in der zweiten Hälfte meiner obigen Arbeit (die im Juni, also zu einer Zeit, als ich von der Arbeit von Chwolson noch keine Kenntniss erhalten haben konnte, vollendet war) ebenfalls zum Gegenstande. Jedoch gibt Hr. Chwolson dem Integrale der untersuchten Differentialgleichung eine wesentlich andere Gestalt, und die nach allgemeineren Sätzen über eine Gleichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi = V(\varphi, t)$$

1) Weber, Abh. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. **5.** p. 18. 1853.

schliesslich von ihm mitgetheilten Formeln (p. 31, 32, l. c.) für die Schwingungsdauer, Dämpfung etc. setzen die specielle Gleichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m(1 - \varphi^2)\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi(1 - \tfrac{1}{6}\varphi^2) = 0$$

voraus, welche also in der oben von mir untersuchten:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m(1 - m_1\varphi^2)\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi(1 - n_1\varphi^2) = 0$$

enthalten ist. Die erwähnten Formeln (p. 31, 32, l. c.) ergeben sich daher, wenn man in die oben mitgetheilten (19), (24), (28) $m_1 = 1$ $n_1 = \frac{1}{6}$ setzt. Die aus Beobachtungen oben p. 473 vollständig berechneten Werthe von m_1 für zwei Galvanometer lehren aber, dass m_1 meistens von dem Werthe 1 weit entfernt sein wird.

Göttingen, 8. October 1879.

VI. *Ueber ultraviolette Strahlen; von J. L. Schönn.*

Im Folgenden erlaube ich mir, eine Methode anzugeben, ultraviolettes, prismatisch zerlegtes Licht in der Weise sichtbar zu machen, dass genaue Messungen vorgenommen werden können. Der in Anwendung gekommene Spectralapparat wurde von Adam Hilger in London nach meinen Angaben construirt. Er besteht aus einem sich nach beiden Seiten öffnenden Iridiumspalt, dessen Oeffnungsweite an einer Theilung abgelesen werden kann. Vor dem Spalte befindet sich ein Schlitten, in den eine das Licht auf den Spalt condensirende Cylinderlinse oder sphärische Linse aus Bergkrystall von drei und zwei Zoll (englisch) Brennweite, die ich bei dieser Arbeit jedoch nicht angewandt habe, geschoben werden kann. Ausserdem lässt sich ein Vergleichungsprisma aus Bergkrystall ebenfalls in einem Schlitten vorschieben. Die Collimatorlinse, ebenfalls aus Bergkrystall, wie alle Linsen und Prismen, wenn nichts

anderes bemerkt wird, hat 1 Fuss $9^5/_8$ Zoll (englisch) Brennweite und $1^5/_8$ Zoll Durchmesser. In einen Schlitten vor der Collimatorlinse kann ein rechtwinkliges Bergkrystallprisma geschoben werden, dessen Winkel 60° und 30° betragen. Die längere Kathete läuft der Collimatorlinse parallel. Es ist so geschliffen, dass die optische Axe parallel der kürzern Kathete verläuft. Die Lichtstrahlen fallen also sämmtlich senkrecht auf die eine Kathetenfläche und parallel der optischen Axe ein, werden also erstens einfach gebrochen und im Minimum der Ablenkung heraustreten. Bei den meisten der bisher von mir gemachten Beobachtungen wandte ich nur dies eine rechtwinklige Prisma an, um die ultravioletten Strahlen möglichst lichtstark zu erhalten, da die Dispersion dann gering ist. — Vor der Objectivlinse des Fernrohrs, die 1 Fuss $6^3/_8$ Zoll (englisch) Brennweite und $1^5/_8$ Zoll Durchmesser hat, befindet sich gleichfalls ein Schlitten, in dem ein dem ersten Prisma congruentes symmetrisch zum ersten angebracht werden kann. Die Hypotenuse der Prismen misst zwei englische Zoll. Durch eine sich beim Drehen des Fernrohrs zusammenschiebende Kapsel sind Collimatorlinse, Fernrohrobjectiv und beide Prismen vor allem fremden Lichte geschützt. Wenn man nun beide Prismen anwendet, und wenn sich eine Linie mit dem Faden oder der leuchtenden Linie des Oculars deckt, so sind die Strahlen, welche diese Linie bilden, durch das zweite Prisma parallel der kürzern Kathete, also parallel der optischen Axe gegangen, werden also gleichfalls im zweiten Prisma einfach gebrochen und befinden sich im Minimum der Ablenkung. Man hat demzufolge zum Zwecke der Messungen nur aufs Fadenkreuz einzustellen, während die beiden Prismen unverändert am Spaltrohr und am Fernrohre bleiben. Die Dispersion ist bei zwei Prismen natürlich doppelt so gross wie bei einem und gleich der Dispersion eines gleichseitigen Prismas. — Das Spaltrohr ist fest mit der Theilscheibe verbunden, das Fernrohr dagegen vermittelst Mikrometerschraube verstellbar; an der Theilscheibe sind zwei No-

nien mit Lupen. Die Theilscheibe selbst steht vertical, drehbar um eine horizontale und um eine verticale Axe. Die Spectrallinien liegen demnach horizontal. Diese Einrichtung habe ich aus zwei Gründen getroffen. Einmal ist es bei der Beobachtung des Sonnenspectrums bei dieser Art der Bewegung leicht, der Sonne in ihrem Laufe zu folgen, ohne Anwendung eines Heliostaten, und zweitens unterscheide ich horizontale Linien viel besser als senkrechte. Ausserdem kann aber auch nach der Einrichtung des Statifs die Theilscheibe in horizontale Lage gebracht werden, während sie dann nur Drehung um eine verticale Axe gestattet.

Das fluorescirende Ocular, eine Copie des Soret'schen, bei dem also auf der zwischen zwei Bergkrystallplatten eingeschalteten fluorescirenden Flüssigkeit oder auf einer Uranglasplatte das Spectrum aufgefangen und durch das geneigte Ramsden'sche Ocular betrachtet wird, genügte mir nicht. Die fluorescirende Flüssigkeit oder die Uranglasplatte wurden in ganz diffuser Weise erleuchtet; auch eine Flussspathplatte leistete nichts. Vorzüglich bewährte sich dagegen folgende Einrichtung, ohne die ich überhaupt nicht in der Lage gewesen wäre, ultraviolette Linien zu sehen und zu messen. In eine kleine Zelle brachte ich eine runde Scheibe aus sehr feinem, mit schwefelsaurem Chinin getränkten Pauspapier. Diese Zelle bringt man dicht vor dem Ramsden'schen Ocular in der Weise an, dass das Ocular zugleich auf die Scheibe und auf eine leuchtende Linie eingestellt werden kann. Die leuchtende Linie, die auch gleichfalls als dunkle Linie für die Messungen benutzt werden kann, hat folgende Einrichtung. Eine Iridiumschneide, deren Rücken dem Beobachter zugekehrt ist, und deren Ende genau bis in die Mitte des Gesichtsfeldes reicht, ist am Ende so abgeschliffen, dass ein auf der Axe des Fernrohrs f a s t senkrecht stehendes, gleichschenkliges, sehr schmales Dreieck entsteht, das durch eine kleine Oeffnung in der Seitenwand des Oculars Licht von einem kleinen ausserhalb am Ocular angebrachten, mit Universal-

bewegung versehenen Spiegel erhält. Die Axe des Oculars wird nicht wie bei Soret geneigt, sondern fällt wie gewöhnlich mit der Axe des Fernrohrs zusammen. Der für gewöhnlich sichtbare Theil des Spectrums, den man ja ohne Chininpapierscheibe untersuchen wird, ist natürlich viel weniger deutlich; dagegen das ultraviolette Spectrum sehr schön; denn es handelt sich hier ja nicht um ein Durchlassen von Licht, sondern alle von der wirksamen ultravioletten Linie getroffenen Theilchen des Papiers leuchten ja selbständig in der ganzen Dicke des Papiers; dabei verbreitet sich dies Licht in dem Papier durchaus nicht in der diffusen Weise wie in einer fluorescirenden Flüssigkeit oder in der Uranglasplatte. Nur eine zart mattgeschliffene Uranglasplatte leistete einigermassen annähernd dasselbe. — Wie man aus dem folgenden sehen kann, fluorescirt Chininpapier noch in Lichtstrahlen, die etwa um die sechsfache Länge des gewöhnlichen Spectrums von H abstehen.

Zunächst beobachtete ich die ultravioletten Spectren von Cadmium, Zink, Thallium, die wie die folgenden erhalten wurden, indem die betreffenden Metalle, nach Einschaltung einer Leydener Flasche, als Pole eines Ruhmkorff'schen Inductionsapparats dienten, und fand gute Uebereinstimmung mit den Miller'schen Photographien, wie sie Lockyer in seinen Studien zur Spectralanalyse reproducirt hat. Die äussersten Zinklinien, die bei 170 und 180 der Miller'schen Scala nur äusserst schwach angedeutet sind, erweisen sich nach meiner Beobachtung als ebenso intensiv wie etwa die Zinklinien bei 140. Dass diese äussersten Linien so schwach in der Photographie erscheinen, rührt jedenfalls daher, dass der Apparat auf die ersten Linien und nicht auf diese genau eingestellt war. Da die Bergkrystalllinsen nur aus einem Stoffe bestehen, so können sie nicht achromatisch sein, und ist deshalb eine genaue Einstellung auf jede Linie erforderlich, was selbstverständlich bei meiner Methode leicht, dagegen beim Photographiren schwierig ist. Um diese Einstellungen

zu erleichtern sind die Auszüge des Spaltrohrs und des Fernrohrs mit Theilungen versehen. — Wollte man auch achromatische Linsen etwa aus Bergkrystall und Kalkspath construiren, so würde die Achromasie doch nur für einen kleinen Bereich herzustellen sein, wenn man an die grosse Ausdehnung des ultravioletten Spectrums denkt. Dagegen liessen sich sehr wohl geradsichtige Spectroskope für ultraviolettes Licht aus zwei Bergkrystall- und einem Kalkspathprisma construiren, und habe ich Hrn. Adam Hilger bereits die Winkel und die Richtung der optischen Axen für eine zweckmässige Combination angegeben. — Wenngleich die rechtwinkligen Prismen sehr bequem sind, so habe ich ferner eine Einrichtung zur Einschaltung eines gleichseitigen Kalkspathprismas anfertigen lassen. Dasselbe lässt sich vermittelst des Schlittens am Spaltrohre befestigen und ist drehbar. Natürlich muss man dies Prisma stets fürs Minimum der Ablenkung einstellen, was allerdings die Untersuchung erschwert. Nur beim ultravioletten Calciumspectrum habe ich es wegen der grössern Dispersion angewendet und will die ultravioletten Calciumlinien zunächst genauer discutiren, weil die erste ultraviolette Doppellinie noch in den Bereich des ultravioletten Sonnenspectrums fällt. Die Lage der Linien bestimme ich nach Graden, Minuten und Secunden desjenigen Winkels, den der aus dem Prisma austretende Lichtstrahl mit dem Einfallslothe bildet; weil einmal dadurch die angewandte Dispersion ersichtlich ist, dann aber auch der betreffende zugehörige Brechungsexponent für Bergkrystall, in diesem Falle auch für Kalkspath leicht erhalten werden kann.

Das ultraviolette Calciumspectrum ist sehr einfach. Es besteht aus zwei Doppellinien. Die erste ultraviolette Doppellinie lässt einen grössern Zwischenraum zwischen sich als die zweite. Die zweite Doppellinie gleicht in dieser Beziehung fast den Linien bei *H*. Die beiden Doppellinien sind sehr intensiv und im mässig dunkeln Zimmer bei Tage zu beobachten. Die Winkel mit dem Einfallslothe und die Brechungsexponenten sind folgende:

Rothe Li-Linie	$= 55^0 46' 45''$	Brechungsexpon. für Kalkspath	= 1,65375
Na-Linie	$= 56^0\ 1' 25''$	„ „	= 1,65854
		[Nach Mascart D	= 1,65846]
I. Ca-Doppellinie α	$= 58^0 56' 30''$	Brechungsexpon. für Kalkspath	= 1,71328
Ca-Doppellinie β	$= 59^0\ 1'$ —	„ „	= 1,71463
II. Ca-Doppellinie α	$= 60^0 17' 45''$	„ „	= 1,73719
Ca-Doppellinie β	$= 60^0 21'$ —	„ „	= 1,73813

Hiernach würde die erste ultraviolette Doppellinie des Calcium zwischen den Sonnenlinien *R* und *S* liegen, wenn man Mascart's Messungen der ultravioletten Fraunhofer'schen Linien zu Grunde legt.[1]) Bei der Wichtigkeit des Elements habe ich die Linien auch mit einem Bergkrystallprisma beobachtet und gemessen. Die erste Doppellinie erscheint auch dann doppelt, die zweite jedoch wegen der geringern Dispersion als einfache breite Linie. Die Winkel und Brechungsexponenten für Bergkrystall sind folgende:

Na-Linie $= 50^0\ 33'$ —
Brechungsexponent für Bergkrystall = 1,5444
[Nach Esselbach D = 1,5446]
Mitte der ersten Doppellinie $= 51^0\ 50'$ —
Brechungsexponent für Bergkrystall = 1,5724
Mitte der zweiten Doppellinie $= 52^0\ 24'\ 30''$
Brechungsexponent für Bergkrystall = 1,5847

Vergleicht man dies mit Esselbach's Messungen der ultravioletten Fraunhofer'schen Linien, so würde die erste ultraviolette Calciumdoppellinie zwischen *Q* und *R* liegen.

Als zweites Metall wählte ich Indium, für welches die Winkel folgende sind:

Rothe Li-Linie $= 50'\ 26'$ —
Na-Linie $= 50'\ 33'$ —
Ultrav. Indiumspectrum 1) $= 51^0\ 47'\ 30''$ starke Linie
2) $= 52^0\ 3'$ —

1) Angeführt in Mousson's Physik, Optik p. 494.

Ultrav. Indiumspectrum 3) = 52° 5′ 30″
4) = 52° 8′ 30″
5) = 52° 12′ 30″ starke Linie.
6) = 53° 52′ 30″ starke Linie.
7) = 55° 8′ 30″ Mitte einer breiten, starken Linie.
8) = 55° 57′ 30″ Mitte einer breiten Linie.

Einen vollständig andern Charakter als das Indiumspectrum hat das Manganspectrum. Während das erstere aus weiter voneinander abstehenden Linien besteht, ist das letztere weit complicirter. Zunächst fallen zwei einander nahestehende starke Linien auf; dann folgen drei feinere Linien, von denen die dritte stärker ist als die beiden ersteren; dann kommen wieder zwei starke Linien, die einen grössern Abstand voneinander haben als das erste Paar starker Linien. Darauf folgen drei Gruppen von Linien. Die erste und zweite dieser Gruppen bestehen je aus etwa vier Linien; die dritte, sehr charakteristische Gruppe besteht aus mindestens acht Linien, von denen die ersten am hellsten sind, und deren Intensität sich allmählich abstuft.. Dann kommen zwei feine Linien, und dann wieder drei oder vier Gruppen sehr feiner Linien. Die dritte und vierte dieser Gruppen gehen ineinander über. Die beifolgende Zeichnung (Taf. II Fig. 6) mag diesen Ueberblick erläutern.

Ob einige der Linien von Verunreinigungen durch Eisen, Kohle herrühren, wird sich später nach sorgfältiger Vergleichung der verschiedenen Spectren ergeben. Die gemessenen Winkel sind folgende:

Rothe Li-Linie = 50° 26′,
Na-Linie = 50° 33′,
1) = 51° 24′, matte Linie,
2) = 51° 31′ starke Linie } auffallendes
3) = 51° 34′ starke Linie } Linienpaar,
4) = 51° 37′ sehr feine Linie,

Na-Linie 5) = 51° 46′ sehr feine Linie,
6) = 51° 59′ mässig starke Linie,
7) = 52° 9′ sehr starke Linie, } auffallendes Linienpaar,
8) = 52° 14′ fast ebenso starke Linie }
9) = 52° 24′ erste Gruppe von etwa vier Linien,
10) = 52° 39′ zweite „ „ „ „ „
11) von 52° 46′ bis 53° 1′ } dritte „ „ „ acht „
12) = 53° 17′ } zwei feine Linien,
13) = 53° 22′ }
14) = 53° 29′ Mitte der 1. Endgruppe } aus vielen feinen Linien bestehend,
15) = 53° 45′ „ „ 2. „ }
16) = 54° 9′ „ „ 3, „ }
17) = 55° 25′ Ende des Manganspectrums.

Das Eisenspectrum hat Aehnlichkeit mit dem Manganspectrum, jedoch sind die Liniengruppen im Manganspectrum nicht so zusammengedrängt, wie es an einer Stelle des Eisenspectrums der Fall ist. In dem ultravioletten Theile des letztern sind nämlich auf einem Felde etwa von der Ausdehnung des für gewöhnlich sichtbaren Spectrums von *C* bis *H* zehn Gruppen so zusammengedrängt, dass dieselben bei der angewandten geringen Dispersion fast wie ein zusammenhängendes leuchtendes Feld erscheinen. Die beiden ersten lichtstarken Gruppen dieses Feldes bestehen je aus fünf Linien. Darauf folgen drei schmälere Gruppen, und dann fünf noch schmälere. Das von mir gesehene Spectrum ist etwa $2^1/_2$ mal so lang als das photographirte Miller'sche nach der Zeichnung in den Lockyer'schen Studien zur Spectralanalyse. Die ersten vier bis fünf bekannteren ultravioletten Gruppen habe ich nicht gemessen und beschränke mich auf folgende Angaben:

1) = 52° 30′ starke Linie,
2) von 52° 43′ bis 53° 41′ } das oben beschriebene, aus etwa zehn Gruppen bestehende Feld,
3) = 54° 3′ } starke Linie,
4) = 54° 10′ }

5) von $54^0\ 48'$ bis $55^0\ 3'$ Gruppe feiner Linien,
6) = $55^0\ 36'$ Mitte einer schmalen Gruppe,
7) = $56^0\ 23'$ Ende des Eisenspectrums.

Das Aluminiumspectrum hat im allgemeinen den Charakter des Mangan- und Eisenspectrums, jedoch sind die Liniengruppen nicht in gleichem Maasse zusammengedrängt wie in einem Theile des Eisenspectrums. Im Anfange des ultravioletten Spectrums wechseln wenige feinere Linien mit sehr starken Linienpaaren ab. Darauf folgen Liniengruppen, die sich beinahe so weit wie beim Eisen erstrecken. Die vier letzten, fast äquidistanten Gruppen, deren erste am lichtstärksten ist, sind besonders charakteristisch und bestehen aus deutlichen Linien. Die Ablesungen sind folgende:

1) = $51^0\ 26'$ helle, feine Linie,
2) = $51^0\ 38'$ starke Linie, 3) = $51^0\ 44'$ starke Linie — auffallendes Linienpaar,
4) = $51^0\ 49'$ feine Linie,
5) = $51^0\ 56'$ starke Linie, 6) = $52^0\ 0'$ starke Linie — auffallendes Linienpaar,
7) = $52^0\ 20'$ Liniengruppe,
8) = $52^0\ 47'$ Mitte einer etwas breiten Gruppe,
9) = $53^0\ 10'$ Gruppe mit deutlichen Linien,
10) = $53^0\ 24'$ Linie,
11) = $53^0\ 33'$ drei Linien dicht nebeneinander,
12) = $53^0\ 46'$ eine feine Linie,
13) = $53^0\ 57'$ bis $54^0\ 17'$ eine stärkere Linie mit sich anschliessender Gruppe,
14) = $54^0\ 33'$ schmale Gruppe,
15) von $54^0\ 42'$ bis $55^0\ 2'$ breite Gruppe,
16) = $55^0\ 42'$ Anfang der ersten hellen Endgruppe,
17) = $56^0\ 17'$ Anfang der zweiten Endgruppe,
18) = $56^0\ 41'$ Anfang der dritten Endgruppe,
19) = $57^0\ 11'$ Anfang der vierten Endgruppe des Aluminiumspectrums.

Absorptionserscheinungen im ultravioletten Theile des Spectrums lassen sich nach dieser Methode direct leicht beobachten. Eine Wasserschicht von 10 cm, zwischen zwei Bergkrystallplatten in eine Glasröhre eingeschlossen und zwischen Lichtquelle und Spalt eingeschaltet, absorbirte einen grossen Theil des ultravioletten Spectrums und liess das letztere nur etwa bis zur Grenze des ultravioletten Sonnenspectrums durch. Dagegen liess ein sehr klarer Eisblock von 21 cm, der durch Schleifen an zwei Enden mit parallelen Ebenen versehen war, alle Cadmiumlinien, die sich doch weit ins Ultraviolette erstrecken, ohne bemerkbare Schwächung durch. Jedoch sind diese Versuche nur vorläufige. Das Verhalten des reinen Wassers ist bemerkenswerth für meteorologische Fragen und ausserdem bei Untersuchungen über Absorptionserscheinungen wässeriger Lösungen in Anschlag zu bringen.

VII. *Ueber ein Spectroteleskop; von P. Glan.*

Ich gebe hiermit einige Versuche, ein Fernrohr herzustellen, das gestattet, die betrachteten Gegenstände in jeder homogenen Farbe zu sehen, die sie aussenden. Der Nutzen eines solchen Apparates ist mannichfaltig für Physik und Astrophysik. Wir besitzen in der Optik mehrfach Methoden, die für weisses oder monochromatisches Licht farbiger Flammen gut ausgearbeitet sind, die aber zur Beobachtung im beliebigen homogenen Lichte die Herstellung desselben in besonderen Apparaten bedürfen, Zusammenstellungen, die die Einfachheit der Versuchsanordnung beeinträchtigen. Da ist es denn von Vortheil, einen Apparat zu besitzen, der sich an Stelle des Fernrohrs anbringen lässt und ohne weiteres ermöglicht, die untersuchte Erscheinung im beliebigen homogenen Lichte zu sehen. Und die Astrophysik strebt fortdauernd dar-

nach, grössere Theile der Sonne im homogenen Lichte auf einmal im Gesichtsfelde übersehen zu können. Schnelle Veränderungen lassen sich dann besser verfolgen, und ein erleichtertes Studium der Gestirne in ihrer unveränderten Gestalt im homogenen Lichte verspricht weitere Kenntniss ihrer chemischen und physikalischen Beschaffenheit. Auch sei hervorgehoben, dass in der Herstellung eines Fernrohrs, das von dem vielfarbigen, zu ihm kommenden Lichte nur eine Farbe zum Auge gelangen lässt, die Möglichkeit gegeben ist, Bilder zu erhalten, die von den Fehlern der chromatischen Aberration frei sind. Endlich ist für mikroskopische Untersuchungen, bei denen sich die Construction gleichfalls verwerthen lässt, eine leichte Betrachtung der Gegenstände in verschiedenen Farben von Nutzen, und so ist der Versuch zur Herstellung eines solchen Apparates hinreichend gerechtfertigt.

Ein erster Schritt, Bilder der Gegenstände in homogenem Lichte zu erhalten, war es, Bilder von ihnen auf dem Spalte eines Spectralapparates zu entwerfen; so studirte man die Umgebung der Sonne, Abschnitt für Abschnitt, denn nur kleine Theile liessen sich auf einmal übersehen. Um grössere Theile der Sonne auf einmal im homogenen Lichte übersehen zu können, hat Zöllner den Spalt erweitert oder ihn in schnelle, hin und her schwingende Bewegung versetzt. So gewinnt man einiges. Die Erweiterung des Spaltes hat indess ihre Grenzen; mit zunehmender Breite wächst die Helligkeit des Spectrums der erleuchteten Luft, während die der einfarbigen Protuberanzen ungeändert bleibt, und bald heben sie sich nicht mehr sichtbar von dem hellen Spectrum der erleuchteten Luft ab. Ein weiterer Uebelstand dieser Methode ist ferner, dass sie nur von einfarbiges Licht aussendenden Gegenständen unverzerrte Bilder gibt. Gemischtes Licht aussendende Objecte erscheinen durch die Dispersion der Prismen in der Richtung der Länge des Spectrums verbreitert und verzerrt. Einen andern Weg haben Christiansen und Zenker eingeschlagen. Beide ent-

werfen ein Bild der zu betrachtenden Gegenstände nicht auf den Spalt eines Spectralapparates, sondern vor oder hinter denselben. Dort, wo vom ersten Spalte im Beobachtungsfernrohre ein Spectrum entworfen wird, ist eine Blendung mit spaltförmigem Ausschnitte angebracht, die nur einen kleinen, nahezu aus homogenem Lichte bestehenden Theil desselben hindurchgehen lässt. In der Farbe dieses Lichtes sieht man den betrachteten Gegenstand, von dem ein Bild vor oder hinter diesem zweiten Spalte im Beobachtungsfernrohre entsteht. Ein Punkt des Objects erscheint hierbei als eine kleine Linie parallel der Längsrichtung des Spectrums entsprechend der Breite des zweiten Spaltes. Das Gesichtsfeld wird vergrössert, aber die Helligkeit der Bilder nimmt auch beträchtlich ab, da von dem Lichte, das ein Punkt des Objects aussendet, ein grosser Theil durch den ersten Spalt aufgefangen wird. Zenker empfiehlt deshalb auch da, wo grössere Helligkeit wünschenswerth ist, die Methode von Zöllner. Da ferner von dem linearen Spectrum, das das Prisma des Apparates von einem Punkte des Objects entwirft, der zweite Spalt nicht einen Punkt, sondern eine kleine Linie übrig lässt, so sind die erhaltenen Bilder nicht scharf begrenzt, sondern vor allem die Begrenzungen parallel dem Spalte undeutlich und verwaschen und die feineren Einzelheiten der Bilder nicht zu erkennen. Endlich ist noch ein Vorschlag von Secchi zu erwähnen, der von Lockyer und Respighi ausgeführt worden ist. Er empfiehlt ein stark dispergirendes Amici'sches Prismensystem mit gerader Durchsicht vors Ocular eines Fernrohrs zu halten, das auf den zu betrachtenden Gegenstand eingestellt ist. Gegenstände, die nur einige homogene Farben aussenden, wie die Protuberanzen, erscheinen dann bei hinreichend starker Dispersion des Prismensystems in einzelnen getrennten, einfarbigen Bildern. Doch bleibt diese Art der Beobachtung der Protuberanzen nur bei Finsternissen anwendbar, da sie sonst das Spectrum der erleuchteten Luft überdeckt. Eine rein theoretische Arbeit über denselben

Gegenstand, die sich auf wesentlich andere Principien stützt, veröffentlicht Hr. Prof. Lorenzoni[1]) in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Venedig. Er empfiehlt die Herstellung eines Sonnenbildes durch Linsen mit sehr starker chromatischer Aberration. Solche Linsen, die er hyperchromatische nennt, wären nach seiner Rechnung aus zwei biconvexen Crownglaslinsen und dazwischen befindlicher biconcaver Flintglaslinse zu erhalten. Auch andere Combinationen von je drei Linsen aus Flintglas und Crownglas sind zur Erlangung starker chromatischer Aberration zu benutzen. Er berechnet ihre Krümmungen so, dass parallele Strahlen einer gewissen Brechbarkeit, für die er die der Linie C wählt, unabgelenkt hindurchgehen, während die von anderer Wellenlänge mehr oder weniger stark convergent oder divergent austreten. Bringt man eine solche Linse vor das Objectiv eines Fernrohrs, so entsteht in der Brennweite des Objectivs ein Sonnenbild aus Strahlen von der Brechbarkeit der Linie C. Die Bilder aus Licht anderer Brechbarkeit fallen auf andere, erheblich abweichende Stellen und erzeugen an der Stelle des Bildes von der Brechbarkeit C grosse Zerstreuungskreise, die sich über jenes Bild ausbreiten. Sie sind in ihren einzelnen Punkten von um so geringerer Helligkeit, je grösser sie sind, d. h. je weiter ihr Vereinigungspunkt von dem der Strahlen von der Brechbarkeit C entfernt ist. Durch Anwendung mehrerer solcher hyperchromatischer Linsen kann man den Unterschied der Vereinigungsweiten für verschiedene Farben steigern. Eine experimentelle Ausführung hat dieser theoretische Vorschlag, so viel ich weiss, nicht erfahren, und, so weit ich sehe, würde man auf diesem Wege auch nur mehr oder weniger gefärbte Bilder erhalten, deren scharfe Begrenzung durch die, wenn auch schnelle, doch stetige Aenderung der Vereinigungsweiten mit der Farbe Beeinträchtigungen erfahren muss.

1) Lorenzoni, Atti del R. Instituto veneto di scienze. 3. Ser. IV. p. 1. 1874.

Fassen wir das zunächst Wünschenswerthe in der Verbesserung der angewandten Methoden zusammen, so wäre es eine Vergrösserung des auf einmal übersehenen Gesichtsfeldes im einfarbigen Lichte ohne erhebliche Einbusse an Helligkeit. Die ersten Versuche, die ich in dieser Richtung anstellte, waren darauf gerichtet, einen grössern Theil der Sonne auf einmal im einfarbigen Lichte übersehen zu können. Hr. Prof. Förster hatte die Güte, mir die Benutzung der Apparate der königlichen Sternwarte zu gestatten, mit deren grossem Refractor und einem eigens für die Sternwarte construirten Spectralapparate von Schmidt und Haensch von sehr starker Dispersion ich die ersten Beobachtungen anstellte. Der Spectralapparat konnte nach Entfernung des Oculars an die Ocularröhre des grossen Refractors angeschraubt und mit ihr in dem Objectivrohre des Fernrohrs um etwa einen halben Meter verschoben werden. Eine Klemmschraube mit Mikrometerbewegung ermöglichte die Feststellung und feinere Einstellung; durch passend angebrachte Gegengewichte konnte das Fernrohr auch mit dieser neuen erheblichen Mehrbelastung äquilibrirt werden. Ich wählte für die ersten Versuche den grossen Refractor, weil ich mit ihm der Bewegung der Sonne am leichtesten folgen konnte, und das gewährte mir für die ersten Einstellungen eine wesentliche Erleichterung. Ich verfuhr folgendermassen. Ich brachte vor den Spalt des Spectralapparates, in einer Messinghülse verschiebbar, eine Linse von etwa 3 cm Brennweite an und zog das Ocularrohr des Fernrohrs, an das der Spectralapparat angeschraubt war, so weit aus, dass der Spalt etwa 13 cm von dem Sonnenbild der Objectivlinse entfernt war. Die Linse von kleiner Brennweite, die am besten achromatisch zu wählen ist, wurde in eine solche Entfernung vom Spalte gebracht, dass sie mehrere Millimeter hinter demselben ein verkleinertes Bild des von der Objectivlinse des Fernrohrs entworfenen Sonnenbildes von etwa 4 cm Durchmesser entwarf. Die Einschaltung dieser kleinen Linse vergrössert das durch den

Spectralapparat hindurch übersehbare Gesichtsfeld. Von jedem Punkte des Objects entwerfen nun die Prismen desselben ein lineares Spectrum, das von der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohrs im Innern desselben in verkleinertem Maasse wiedergegeben wird. Dort, wo diese Objectivlinse ein Spectrum des ersten Spaltes entwirft, ist nun im Beobachtungsfernrohr eine spaltförmige Blendung angebracht, die je nach ihrer Breite nur einen kleinen Theil desselben hindurch lässt. Von dem linearen Spectrum, das einem Objectivpunkte entspricht, und das hinter diese spaltförmige Blendung nach dem Ocular zu fällt, bleibt daher nur eine kleine Linie fast homogenen Lichtes übrig. Da indess jedem Objectpunkte eine kleine Linie entspricht, parallel der Länge des Spectrums, so sind die Begrenzungen der Objectbilder nicht vollkommen scharf, sondern vor allem die Begrenzungslinien parallel zum ersten Spalte durch diese kleinen Zerstreuungslinien verwaschen. Um diesen Mangel zu verringern, befestige ich unmittelbar hinter der Blendung eine einfache planconvexe Linse von 4—5 cm Brennweite. Durch sie werden die Bildpunkte brechbareren Lichtes in grösserer Nähe zu ihr erzeugt, sodass die einem Objectpunkte entsprechende kleine Linie bei der Beobachtung mit einem Ocular senkrecht zur Fernrohraxe verkürzt erscheint. Die Linse wirkt wie das Collectivglas eines Huyghens'schen Oculars. Sie ist mit dem eigentlichen Ocular, letzteres gegen sie verschiebbar, in einer Messingröhre vereinigt, die unmittelbar an die spaltförmige Blendung angeschraubt werden kann. Das von der Hülfslinse entworfene Bild wird mit dem eigentlichen Ocular nach Art des Ramsden'schen betrachtet.

Die Einstellung des Apparates geschieht in folgender Weise. Zunächst wird das Ocular des grossen Refractors entfernt, der Spectralapparat in gewöhnlicher Form angeschraubt, und der Spalt so eingestellt, dass das Sonnenbild des Objectivs scharf begrenzt auf ihm entworfen wird. Dann wird das Ocular des Beobachtungsfernrohrs auf die spaltförmige Blendung in ihm deutlich eingestellt und

beide zusammen so weit ausgezogen, dass man bei engem Spalte die Fraunhofer'schen Linien deutlich sah, zugleich mit den parallelen Rändern der Blendung und parallel zu ihnen. Dann wird der Spectralapparat abgenommen, die vorher beschriebene kleine Linse, um einige Millimeter weniger als ihre Brennweite vom Spalte entfernt, vor ihm eingeschaltet und das gewöhnliche Ocular durch das vorher beschriebene ersetzt. Es ist hierbei darauf zu achten, dass die Einstellungen des Spaltes und der spaltförmigen Blendung ungeändert bleiben, um die Reinheit der nicht abgeblendeten Farbe bei den späteren Beobachtungen zu bewahren. Nach diesen Vorbereitungen setzt man den Spectralapparat wieder ans Fernrohr, und zwar so, dass das Sonnenbild des Objectivs etwa 13 bis 14 cm vom Spalte entfernt ist. Das Ocular im Rohre vor der Blendung oder der gesammte Spectralapparat mit der Ocularröhre des grossen Refractors wird dann so weit ausgezogen, dass man den Sonnenrand scharf begrenzt sieht und zwar in der Farbe, die die Blendung des Beobachtungsfernrohrs hindurchlässt. Die Lage derselben im Spectrum kann an einem getheilten Kreise abgelesen werden, der die Drehungen des Beobachtungsfernrohrs angibt.

Nach einigen Vorversuchen an irdischen Objecten, die ich an einem Fernrohre mit kleinerer Brennweite und demselben Spectralapparate anstellte, gelangen mir folgende Sonnenbeobachtungen. Am 22. September 1878 sah ich bei der Beobachtung mit dem Spectralapparate und dem grossen Refractor bei Einstellung des Sonnenbildes auf den Spalt und Beobachtung mit dem Ocular in bekannter Weise über dem Spectrum des Sonnenrandes die hellen Wasserstofflinien und D_3 sehr deutlich. Bei Beobachtung nach der vorher beschriebenen Methode sah ich einen Theil des Sonnenrandes in schneller, züngelnder Bewegung und zwar in allen Farben. Während der Beobachtung überzog sich der Himmel mit Wolken, sodass ich die Beobachtungen abbrechen musste. Am 27. September sah ich, als ich in der üblichen Weise beobachtete, die

hellen Linien der Photo- und Chromosphäre kaum. Mit meiner Einrichtung sah ich einen Theil des Sonnenrandes und zwar sowohl senkrecht als parallel zum Spalte mitunter ganz scharf begrenzt, sonst in welliger, zitternder Bewegung. Der Himmel war bei dieser Beobachtung unbewölkt. Am 8. October sah ich nach gewöhnlicher Methode die hellen Linien C und F der Chromosphäre bei radialer und tangentialer Stellung des Spaltes sehr gut, D_3 war in beiden Stellungen nicht zu sehen. Mit meiner Einrichtung sah ich Theile des Sonnenrandes senkrecht und parallel zum Spalte scharf begrenzt.

Aus der Grösse der Krümmung schätzte ich den auf einmal übersehenen Theil des Sonnenrandes auf etwa ein Zehntel des ganzen Umfangs, bei Fernröhren von geringerer Brennweite als der sehr beträchtlichen (160 par. Zoll) des grossen Refractors der berliner Sternwarte würde man einen erheblich grössern Theil der Sonne auf einmal übersehen. Ich habe bei diesen Beobachtungen den Sonnenrand nicht systematisch abgesucht, um Protuberanzen zu entdecken, da es mir zunächst nur darauf ankam, die die Brauchbarkeit der Methode zur Herstellung homogener Sonnenbilder zu prüfen.

Die Herstellung eines homogenen Sonnenbildes ist nun nicht nur zur Erkenntniss der physikalischen und chemischen Vorgänge auf der Sonne von Wichtigkeit, nicht nur ein Bedürfniss für die Astrophysik, auch die reine Astronomie hat ein Interesse an der Herstellung desselben. Ein homogenes Sonnenbild kann frei erhalten werden von den Bildern der gasigen, farbiges Licht aussendenden Umhüllungen, und das ist für die Bestimmung der Contacte eines an der Sonne vorüberziehenden Planeten mit dem Sonnenrande von Wichtigkeit. Doch dazu ist es vortheilhaft, die Beobachtungsmethode so einzurichten, dass man leicht auch ein homogenes Sonnenbild mit Fadenmikrometer und Anwendung des Fernrohrs in gewohnter Weise beobachten kann. Das erlaubt die vorher beschriebene Methode nicht so leicht, und zu diesem Zwecke habe ich

daher eine andere Methode gefunden, die wesentlich einfacher als die vorher angegebene ist. Sie besteht in Folgendem. Vor das Ocular eines Fernrohrs befestige ich einen Spectralapparat mit Amici'schen Prismen, dessen Collimatorlinse eine sehr kurze Brennweite, etwa 3 cm, hat, dessen Ocular entfernt ist, und der statt dessen eine spaltförmige Blendung besitzt. Er wird mit seinem Spalte unmittelbar in die Blendung am Ocular des Fernrohrs eingeschraubt, und ist so eingestellt, dass auf der spaltförmigen Blendung in seinem Beobachtungsrohre ein Spectrum des ersten Spaltes entworfen wird. Bei dieser Anordnung entwirft die Collimatorlinse vom letzten Bilde des Fernrohrs ein Bild dicht vor der ersten Fläche der Prismen, dies wird durch die Prismen spectral zerlegt und durch die Objectivlinse des Beobachtungsrohres als Lupe betrachtet und zwar in der Farbe, die die spaltförmige Blendung vom Spectrum des ersten Spaltes frei lässt. Das Auge des Beobachters wird hierbei unmittelbar hinter diese Blendung gehalten. Da die Einstellung des Spectralapparates ungeändert bleiben muss, um die Reinheit des Spectrums zu erhalten, so kann man eine genaue Einstellung entweder durch passende Verschiebung des Oculars des Fernrohrs bewirken, oder, wenn man die Einstellung des letztern ungeändert lassen will, durch passend gewählte Linsen, die man unmittelbar vor die Blendung am Auge hält. Ich habe zu meinen Versuchen ein terrestrisches Fernrohr von etwa 50 mm Oeffnung benutzt; in Verbindung mit der vorher beschriebenen Einrichtung konnte ich entfernte irdische Objecte, wie die Ziegel eines Daches, in allen Einzelheiten mit dem Spectroteleskop in homogenem Lichte ebenso deutlich sehen, wie bei der Beobachtung mit dem Fernrohr allein, und der Apparat war lichtstark genug, um sie auch bei sehr trübem Wetter in den mittleren Farben des Spectrums gut sichtbar erscheinen zu lassen. Die bisherige Zusammenstellung dieses Spectroteleskops war nur eine provisorische; ich hoffe, Gelegenheit zu erhalten, es in

vollkommenerem Massstabe ausführen und dann weitere Mittheilungen und Beobachtungen mit demselben geben zu können.

Das Bild, welches das Fernrohr bei dieser Anordnung entwirft, und welches durch den angesetzten Apparat in ein einfarbiges verwandelt wird, kann auch ein Object selbst sein, und so kann ich diesen kleinen angesetzten Apparat auch allein benutzen, Bilder der Gegenstände in homogenem Lichte zu erhalten, er ist selbst ein Spectroteleskop. Zu beachten ist hierbei nur, dass man die genaue Einstellung durch besondere Linsen bewirken muss, die man unmittelbar vors Auge hält, da man die Theile des Spectroteleskops gegeneinander nicht verschieben darf, um nicht die Reinheit des Spectrums zu zerstören. In dieser Weise konnte ich das zarte Muster in weissen Fenstervorhängen in allen Einzelheiten in beliebigem homogenem Lichte deutlich erkennen. Mir scheint dieser kleine Apparat, der in seiner äussern Form vollkommen dem Fernrohre gleicht, von Wichtigkeit für die Physik. Er gestattet leicht, an Stelle des Fernrohrs gesetzt, die Beobachtungen in jeder Farbe des Spectrums anzustellen. Im Kohlrausch'schen Totalreflectometer statt des Fernrohrs angewandt, würde er bei Beleuchtung des den Schwefelkohlenstoff enthaltenden Gefässes mit weissem Lichte die Brechungsexponenten für jede Farbe des Spectrums zu bestimmen gestatten; in einem Goniometer mit Collimatorrohr, auf dessen Tischchen eine Krystallplatte zur Bestimmung der Axenwinkel aufgesetzt ist, würde er mit einem Nicol vorm Auge und vorm Spalte des Collimatorrohres die Axenwinkel für alle homogenen Farben ergeben, zwei für die Krystallographie sehr wichtige Anwendungen. In der physikalischen Optik würde er eine leichte Bestimmung der Reflexionsconstanten mit Benutzung der von mir[1]) angegebenen Methode gestatten; man befestige zu diesem Zwecke in der Focalebene der Collimatorlinse

1) Glan, Wied. Ann. 7. p. 328. 1879.

des Spectroteleskops ein Fadenkreuz und den Babinet'schen Compensator und einen Nicol mit Theilkreis vor der Blendung am Auge und setze diesen Apparat bei einem Goniometer an Stelle des Fernrohrs.

Endlich sei noch eine Anwendung erwähnt, die für die Saccharimetrie von Interesse ist. Bringt man in der Focalweite der Collimatorlinse des Spectroteleskops eine kreisförmige Blendung an, die zur Hälfte mit einer Quarzplatte bedeckt ist, wie beim Laurent'schen Saccharimeter und einen Nicol am Auge, ferner in einiger Entfernung ein Collimatorrohr mit einem Nicol vor seiner Oeffnung, so erhält man ein Saccharimeter für alle Farben. Stellt man das Spectroskop auf Blau ein, so würde man die Drehungen der zu untersuchenden Körper im blauen Lichte untersuchen können, während man sie sonst meist im weissen oder Natronlichte untersucht. Bei dem erheblich grösseren Drehungsvermögen der meisten Körper für blaues Licht würde somit dies Saccharimeter viel empfindlicher sein als die gebräuchlichen.

Ich behalte mir vor, seiner Zeit über die Ausführung der hier vorgeschlagenen Untersuchungsmethoden zu berichten.

Berlin, den 4. Januar 1880.

VIII. *Ueber eine neue einfache Art der Schlierenbeobachtung; von V. Dvořák.*

Die Toepler'sche Methode der Schlierenbeobachtung[1]) gibt wohl ausgezeichnete Resultate, aber sie ist von Umständen begleitet, welche ihre Verwendung erschweren. Abgesehen davon, dass der Schlierenapparat kostbar und complicirt ist, ist das Gesichtsfeld desselben ziemlich klein (beim Apparate Toepler's war der Durchmesser des Gesichtsfeldes = 11,5 cm); auch können nicht mehrere gleichzeitig die betreffenden Erscheinungen beobachten. In solchen

1) Toepler, Pogg. Ann. **131.** p. 33 u. 180. 1867.

Fällen nun, wo die Toepler'sche Methode wegen der eben angeführten Umstände nicht gut anwendbar ist, kann man sich der hier beschriebenen Methode bedienen.

Der optische Apparat ist höchst einfach. Von dem Spiegel eines gewöhnlichen Heliostaten werden die Sonnenstrahlen auf eine Sammellinse *ab* (Taf. II Fig. 8) geleitet (Brennweite = 22,6 cm, Durchmesser = 7,1 cm) und treffen dann weiter auf eine zweite Sammellinse *cd* (Brennweite = 19,3 cm, Durchmesser = 2,8 cm). Die Entfernung der Linsen ist etwas kleiner als die Brennweite der Linse *ab*; ich stellte die Linsen gewöhnlich in eine Entfernung von 21 cm. Ich habe dieses Linsensystem bei dem Heliostaten schon vorgefunden; es diente zur Projection der Polarisationserscheinungen.

Ein sehr wichtiger Theil ist ein Metalldiaphragma bei *f* (dem Brennpunkte des Linsensystemes) mit kreisförmiger Oeffnung von 1 mm Durchmesser. Die Ränder der Oeffnung sind zugeschärft, und das Diaphragma ist innen gut geschwärzt; es ist weiter in einem kurzen Röhrenstück befestigt, welches auf die Fassung der Linse *cd* aufgesteckt wird. Der Kegel der Sonnenstrahlen, welche aus *f* herauskommen, wird in einem dunklen Zimmer auf einem weissen Schirm *mn* aufgefangen. Die Entfernung *fo* beträgt 4,6 m. Die Objecte, welche man untersuchen will, stellt man in den Sonnenstrahlenkegel bei *l* in 2 bis 2,1 mm Entfernung von *f*. Der kreisförmige Durchschnitt des Kegels bei *l* hat einen Durchmesser *ik* von 70 cm; das ist also, wie man leicht sieht, der Durchmesser des Gesichtsfeldes.

In den meisten Fällen ist ein so grosses Gesichtsfeld unnöthig, während die breite beleuchtete Fläche *mn* am weissen Schirme im Versuchszimmer eine etwas störende Helligkeit verbreitet. Man verkleinert den Lichtkreis *mn* durch ein vor die Linse *ab* gesetztes Diaphragma *gh* von 43 mm Durchmesser. Dann ist der Durchmesser des Gesichtsfeldes *ik* = 41 cm. Ich habe bei allen Versuchen, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil angeführt ist, das Diaphragma *gh* verwendet.

Die Objecte, welche sich bei *ilk* befinden, werfen einen Schatten auf den Schirm *mn*, und wir untersuchen eigentlich blos den Schatten der Objecte. Der Rand des Schattens ist nicht scharf begrenzt, sondern zeigt Beugungserscheinungen.

Die Linse *cd* kann man auch fortlassen. Ich benutzte sie aber regelmässig, weil man so eine gleichmässigere Beleuchtung des weissen Schirmes erhält. Jede Ungleichmässigkeit am Heliostatenspiegel und an der Linse *ab* zeigt sich deutlich am Schirme *mn*, so lange man blos die Linse *ab* allein anwendet, verschwindet jedoch fast ganz, sobald die Linse *cd* hinzukommt. Man überzeugt sich leicht davon, wenn man den Spiegel oder die Linse an einer Stelle etwas befeuchtet. Was das Diaphragma bei *f* betrifft, so erhöht dasselbe beträchtlich die Empfindlichkeit des Apparates.

Natürlich braucht man sich an die hier angeführten Dimensionen des Apparates nicht genau anzuhalten, sondern man kann durch Probiren leicht herausfinden, welche Entfernungen der beiden Linsen und des Schirmes das beste Resultat geben.

Im Folgenden werde ich zuerst einige Versuche beschreiben, welche sich mit unserem Apparate ausführen lassen, und zum Schlusse werde ich einiges über dessen Theorie hinzufügen.

Prüfung der Empfindlichkeit. Die Empfindlichkeit des Apparates ist überraschend und kommt vielleicht der merkwürdigen Empfindlichkeit des Toepler'schen Apparates gleich.

Man bringe die warme Hand in den Kegeldurchschnitt bei *k*, und man sieht dann deutlich auf dem Schirme *mn* die von der Hand erwärmte Luft in Strömen aufsteigen. Auch die Probe der Empfindlichkeit, welche Toepler für seinen Apparat benutzte, besteht unser Apparat ganz gut. Man nehme zwei gleiche Cuvetten von vorzüglichem Spiegelglase, wie man sie für die Lichtabsorption benutzt. Die beiden Glaswände einer jeden müssen möglichst parallel sein. Die Cuvetten werden mit reinem Wasser gefüllt und

durch eine heberförmige Glasröhre von 1,8 mm innerem Durchmesser miteinander verbunden. Diese Glasröhre wird schon vorher ebenfalls mit Wasser gefüllt. Hebt man die eine Cuvette *A* (Taf. II Fig. 9), so fliesst durch die Heberwirkung der Glasröhre das Wasser in die zweite Cuvette *B*. Der Wasserstrahl, welcher aus der Röhre ausströmt, ist in der Cuvette *B* sehr gut sichtbar. Der Unterschied der Brechungsexponenten für den Wasserstrahl selbst und für das umgebende Wasser ist sicher unmessbar klein, und ist daher die Empfindlichkeit des Apparates eine fast unbegrenzte.

Weitere Versuche. Ich führe hier zuerst blos einige Vorlesungsversuche an, welche sich leicht mit unserem Apparate ausführen lassen.

Ein Stück gewöhnliches Fensterglas zeigt sich natürlich sehr ungleichmässig. Aber auch gutes Spiegelglas zeigt gewöhnlich Flecken und Streifen, besonders wenn man die Glasfläche gegen die Sonnenstrahlen schief hält.

Für Flüssigkeiten nehme man eine Cuvette grösserer Sorte von etwa 3 cm Breite. Füllt man dieselbe mit Wasser und bläst auf die Oberfläche (nach Toepler) mit einem kleinen Blasebalge, so kühlt sich durch Verdunstung das Wasser oben ab und sinkt dann herunter. Dieses heruntersinkende Wasser sieht man am Schirme mn ganz gut.

Man erwärme weiter stark einen Löthkolben und halte dessen Spitze einige Secunden mit einem Punkte des Bodens der Cuvette in Berührung. Der Boden muss natürlich von Metall und nicht allzu dick sein. Sofort erhebt sich von der erwärmten Stelle eine ziemlich scharf begrenzte dunkle Säule mit pilzartigem Kopfe, welche sich auf der Oberfläche ausbreitet.

Hält man mit einer Pincette ein Salzkörnchen nur eine Secunde lang in die Wasseroberfläche, so sinken dunkle Streifen von Salzlösung herab.

Auch mit Gasen und Dämpfen lassen sich leicht Versuche anstellen. Man öffne eine Flasche mit Aether (oder Schwefelkohlenstoff) und neige dieselbe so weit, bis die

Flüssigkeit beinahe ausfliesst. Man sieht dann deutlich und auf einer grossen Strecke die Aetherdämpfe heruntersinken. Gut ist es, wenn dabei die Luft recht ruhig ist. Auch die bekannten Versuche des Uebergiessens von Kohlensäure aus einem Gefäss in ein zweites, das Ueberfliessen der Kohlensäure über den Rand des Gefässes etc., kann man leicht an dem Schirme *mn* zur Anschauung bringen. Ein leicht ausführbarer Versuch ist auch folgender. Man gebe in ein hohes, oben verengtes Gefäss (Mischcylinder) etwas Wasser und Natriumbicarbonat, dann schütte man etwas Schwefelsäure nach. Es entsteht eine augenblickliche Kohlensäureeruption, welche am Schirme *mn* einen überraschenden Anblick gewährt.

Ein hübsches Bild gibt ein Bunsen'scher Brenner, dessen Flamme man recht klein macht. Man sieht Unmassen von erwärmter Luft vom Brenner aufsteigen, meistens in scharfer Begrenzung mit eigenthümlichen Formen. Es ist gut, zu diesem Zwecke das Diaphragma *gh* zu entfernen, weil man ein grosses Gesichtsfeld braucht.

Sehr gut lässt sich unsere Methode auf die Untersuchung empfindlicher Gasstrahlen anwenden. Tyndall[1]) machte die Gasstrahlen durch beigemischtem Salmiakrauch sichtbar. Er glaubt jedoch, dass die Empfindlichkeit der Gasstrahlen grösser wäre, falls man selbe ohne beigemischten Salmiakrauch sehen könnte. An einer andern Stelle erwähnt er, dass „die kleinste Menge mechanisch vertheilter Unreinigkeit auf die Flamme den grössten Einfluss habe“. Der Salmiakrauch ist selbst eine solche Unreinigkeit, und ausserdem verstopft er bald die Oeffnung der Ausflussröhre. Da wir nun auch einen reinen Gasstrahl leicht sichtbar machen können, so entfällt die unbequeme Anwendung des Salmiakrauches. Ich führte meine Versuche auf folgende Art aus. Ich nahm einen Blasebalg (von Koenig), welcher sehr gleichmässig wirkte, und zwar im Durchschnitte mit einem Drucke von 65 mm

1) Tyndall, Der Schall, II. Aufl. p. 289.

Wasser. Die Luft ging aus dem Blasebalge in eine möglichst grosse Flasche *A* (Taf. II Fig. 10), weiter von dort in eine kleinere *B*, und zwar durch eine Röhre, welche fast zum Boden der Flasche *B* reichte. Die Luft strömte durch die Röhre *C* aus. Die Ausströmungsöffnung hatte 0,8 bis 2 mm im Durchmesser. Die Ausströmungsgeschwindigkeit wird durch den Hahn *D* regulirt. Ist der Hahn zu viel oder zu wenig geöffnet, so ist der Gasstrahl kurz und unempfindlich. In die Flasche *B* bringt man einige Stücke mit Aether getränkter Baumwolle. Der Blasebalg wird zuerst vollständig gefüllt und dann sich selbst überlassen, bis er sich ganz entleert; er darf dabei weder zischen noch knarren. Natürlich könnte man den Blasebalg mit Vortheil durch einen Gasometer mit constantem Drucke ersetzen. Hat man den Ausfluss durch den Hahn *D* richtig regulirt, so wird am Schirme *mn* ein schöner Gasstrahl sichtbar, der zuweilen das ganze Gesichtsfeld einnimmt und sehr empfindlich ist. Für hohe Töne, sowie für Zischen ist derselbe nicht empfindlich, wie es schon Tyndall bei seinen Rauchstrahlen beobachtete, aber für tiefe Töne ist seine Empfindlichkeit ausserordentlich. Spricht man, oder singt man mit sehr gedämpfter Stimme, so kommt der Strahl in die grösste Unruhe. Sehr grossen Einfluss hat das Gehen, sowie das Scharren des Fusses am Boden. Tupft man unhörbar mit dem Finger auf den Tisch, auf welchem sich die Flaschen *A* und *B* befinden, so verkürzt sich der Strahl augenblicklich auf ein Drittel seiner Länge; zuweilen theilt er sich dabei gabelförmig.

Falls wir uns nicht vor dem Gasgeruche scheuen, können wir auch Leuchtgas verwenden. Dann brauchen wir weder Blasebalg noch Flaschen, Die Hauptsache ist wiederum die Regulirung des Ausflusses durch einen Hahn. Jedoch ist Aetherdampf etwas deutlicher sichtbar, als Leuchtgas.

Ich führte ausserdem noch einige Versuche mit erwärmter und abgekühlter Luft aus. Wir brauchen dazu den Blasebalg und die grosse Flasche *A*. Hinter dem

Hahn *D* setzt man ein Kautschukrohr an und an dasselbe eine schraubenförmig gewundene Kupferröhre *abcd* (Taf. II Fig. 11). Der schraubenförmige Theil wird am Bunsenbrenner bis zum Rothglühen erhitzt; natürlich muss der gerade Theil *cd* genug lang sein, damit nicht die bei *d* aufgesteckte Kautschukröhre durch die Hitze verdirbt. Nach Erhitzung der Kupferröhre entfernt man den Bunsenbrenner, füllt den Blasebalg und lässt die Luft bei *a* aus einer Oeffnung von 1 bis 1,5 mm ausströmen. Die Empfindlichkeit des Gasstrahles wird wiederum durch den Hahn *D* regulirt. Man sieht den Strahl noch dann ganz deutlich, wenn man das Kupferrohr *bc* bequem mit der Hand anfassen kann, wobei die Temperatur desselben also nicht mehr als beiläufig 35° C. beträgt. Die von der Oberfläche des Kupferrohres aufsteigende erhitzte Luft wirkt störend und verdeckt theilweise den Luftstrahl. Man kann dieselbe auf zweierlei Art unschädlich machen. Man stellt entweder die ganze Röhre *abcd* schief, sodass die von der Röhre aufsteigende Luft den Gasstrahl nicht trifft, oder man lässt die Röhre vertical und setzt ein Thongefäss *fg*, dessen Boden bei *h* durchbohrt ist, möglichst luftdicht auf den konisch verjüngten Theil *ab* der Röhre.

Falls man mit abgekühlten Luftstrahlen Versuche anstellen will, so stellt man den schraubenförmigen Theil *bc* der Röhre in eine Kältemischung. Auch solche Strahlen sind gut sichtbar und empfindlich.

Versuche mit dem electrischen Funken. Mehrere Versuche hat schon Toepler mit seinem Schlierenapparate ausgeführt. Ich will hier nur einiges über den Inductionsfunken hinzufügen. Man urtheilt aus verschiedenen electrischen Erscheinungen, dass die Luft, welche vom + Pole fortfliegt, eine grössere Geschwindigkeit besitzt, als die Luft, welche in entgegengesetzter Richtung vom − Pole fortgetrieben wird.[1]) Mit Hülfe der Schlieren-

1) Siehe darüber ausführlich Wiedemann, Galvanismus, **2.** (2) p. 299 ff. Um den + Pol vom − Pol zu unterscheiden, bedient man sich der ungleichen Erwärmung der beiden Electroden. Man lasse den

methode sieht man Erscheinungen, welche das zu bestätigen scheinen.

Ich benutzte bei meinen Versuchen einen Inductionsapparat von Ruhmkorff mit Foucault'schem Unterbrecher, dessen Spule 36,5 cm lang war, und der durch 6 Smee'sche Elemente erregt wurde. Als Electroden dienten zwei zugespitzte Platindrähte von 0,6 mm Dicke. Ihre Entfernung war 3—4 mm. Die Erscheinung, welche man bei raschem Gange des Unterbrechers am Schirme *mn* sah, zeigt in einfachen Umrissen die Taf. II Fig. 12. Man erhöht beträchtlich die Schärfe des Bildes am Schirme *mn*, wenn man die Oeffnung des Diaphragmas bei *f* recht klein macht, etwa 0,5 mm im Durchmesser. Man kann weiter die in Taf. II Fig. 12 dargestellte Erscheinung stroboskopisch mittelst einer rotirenden Scheibe mit 4—6 engen radialen Schlitzen näher untersuchen. Man sieht dann nicht nur, wie die Erscheinung allmählich entsteht, sondern die Bilder sind auch bedeutend schärfer. Die Scheibe, welche sich um eine horizontale Axe dreht, kommt recht nahe zum Diaphragma bei *f* (Taf. II Fig. 8) und lässt das Licht immer nur auf sehr kurze Zeit durch. Weiter stelle man den Inductionsapparat so auf, dass der Schatten des Unterbrechers nahe zu dem Schatten der in Taf. II Fig. 12 abgebildeten Electroden fällt. Dreht man die Scheibe sehr gleichmässig (man setzt, um diese Gleichmässigkeit zu begünstigen, auf die Axe eine schwere Metallscheibe), so bringt man es bald dahin, dass der Schatten des Unterbrechers stille steht oder sich nur langsam bewegt. In letzterem Falle sieht man, wie ein kleines Wölkchen erwärmter Luft am + Pole auftaucht und sich gegen den — Pol allmählich vergrössert. Dieses würde also für den Funken einen momentanen, vom + Pole ausgehenden Luftstrom anzeigen. Da man am — Pole nichts Aehnliches sieht, so scheint der vom — Pole ausgehende Luftstrom so

---

Funken zwischen zwei dünnen Platindrähten überspringen, dann wird der — Pol rothglühend (bei stärkeren Apparaten kann er sogar schmelzen), während der + Pol nur wenig erwärmt wird.

schwach zu sein, dass er der Beobachtung entgeht. Die in der Taf. II Fig. 12 sichtbaren zurückgeschlagenen Wülste *a* und *b* zeigen sich auch oft bei kleinen Rauchsäulen, sowie besonders gut bei herabfallendem Aetherdampf auf dem vordern Ende der Säule und scheinen eine Wirkung des Luftwiderstandes zu sein. Die Fahne *c* am — Pole rührt von der erwärmten Luft her, welche langsam aufsteigt; sie scheint wie durch einen vom + Pole ausgehenden Luftstrom zur Seite getrieben. Wechselt man die Pole durch den Commutator, so kehrt sich die Erscheinung sofort um. Nimmt man die Funkenlänge grösser als 3 — 4 mm, so schwindet der Unterschied zwischen dem + und dem — Pole immer mehr, und bei einer Funkenlänge von einigen Centimetern ist es schon schwer, diesen Unterschied zu finden. Die Funkenbahn wird dann auch schon unregelmässig. Nimmt man statt des Drahtes der — Electrode eine Kugel, so zeigt sich die in Taf. II Fig. 13 dargestellte Erscheinung, welche wiederum einen von der + Electrode ausgehenden Luftstrom anzuzeigen scheint. Eine ähnliche Erscheinung erhält man, wenn beide Electroden kugelförmig sind.

Zum Schlusse mache ich auf die hübschen Erscheinungen aufmerksam, welche das Bild des Inductionsfunkens zeigt, wenn derselbe eine beträchtliche Länge besitzt, nämlich etwa 20—30 cm.

Theorie des Apparates. Man gebe einen runden Glasstab *qp* in den Strahlenkegel bei *l* (Taf. II Fig. 8). Trotz seiner Durchsichtigkeit wirft er einen dunklen Schatten *rs*, gerade so, wie ein vollkommen undurchsichtiger Körper. Die Ursache ist, dass die Sonnenstrahlen, welche durch *qp* hindurchgehen, nach allen möglichen Richtungen zerstreut werden, bevor sie den Schirm *mn* erreichen. In den geometrischen Schatten *rs* kommen deshalb nur äusserst wenig Strahlen, und derselbe erscheint also dunkel. Etwas Aehnliches tritt ein, wie es scheint, wenn wir z. B. eine Gassäule in den Strahlenkegel versetzen. Aber wegen des geringen Unterschiedes der Brechungsexponenten von Luft

und Gas werden die Strahlen, welche die Gassäule passiren, nur wenig abgelenkt. Ausserdem werden die Strahlen, welche durch die Gassäule hindurchgehen, mit denjenigen, welche neben derselben vorbeigehen, interferiren. Man sieht daraus, dass die vollständige Theorie der Schatten durchsichtiger Körper sehr complicirt ist, und wir werden uns daher auf dieselbe nicht weiter einlassen. Ich will aber dennoch einige auffallende Interferenzerscheinungen anführen, welche ich bei meinen Versuchen beobachtet habe. Nehmen wir wiederum die Flasche B (Taf. II Fig. 10) mit in Aether getränkter Baumwolle. Die Ausflussröhre C soll aber ziemlich breit sein (etwa 1 cm.). Ihr ebener Rand wird oben mit einer dünnen Metallplatte geschlossen, welche eine quadratische Oeffnung von 5 mm Seite besitzt. Auf die Metallplatte klebt man ein Stückchen starken Stanniol auf, in welchem sich eine kleine, runde Oeffnung befindet. Blasen wir durch die Flasche B, so steigt aus dieser Oeffnung ein Strahl von Aetherdämpfen empor. Die Interferenzerscheinungen am Schatten des Strahles sind von dem Durchmesser der Ausflussöffnung abhängig. Ist derselbe $= 0{,}56$ mm, $lf = 2{,}15$ m, $fo = 4{,}6$ m, die Oeffnung des Diaphragmas bei $f = 0{,}5$ mm, so zeigt sich in der Mitte des Schattens ein lichter Streifen, und zu beiden Seiten farbige, helle und dunkle Streifen. Ist der Durchmesser der Oeffnung $= 3{,}4$ mm, so zeigen sich in der Mitte des Schattens zwei schmale, dunkle Streifen. Eine hübsche Erscheinung gibt eine in Stanniol ausgeschnittene rechteckige Ausflussöffnung von 4 mm Länge und 0,25 mm Breite. Der Strahl verengt sich stark oberhalb der Oeffnung (contractio venae) und zeigt lebhaft gefärbte Interferenzstreifen. Zierliche Interferenzerscheinungen erhält man auch, wenn das Stanniolblättchen, welches die Ausflussöffnung trägt, nicht luftdicht auf die Metallplatte aufgeklebt ist, sodass zwischen beiden an verschiedenen Stellen schmale Gasstrahlen entweichen. Diese zeigen regelmässig lebhafte Farbenstreifen.

Agram, den 25. October 1879.

IX. *Beitrag zur Geschichte der mechanischen Theorie der Wärme; von Emil Oehler.*

In Jacob Hermann's „Phoronomia sive de Viribus et Motibus Corporum solidorum et fluidorum, libri duo, 1716" findet sich p. 376 Folgendes:

Caput XXIV. De motu intestino fluidorum.

658. Hoc nomine non intelligitur hoc loco internus molecularum motus fluidi cujuscunque in suo statu naturali consistentis, sed is particularum motus, qui in fluidis a causis externis et accidentalibus excitari solet, quo calor praesertim est referendus, qui dubio procul ex concitatiore particularum motu in corpore calido a causis externis producitur. Utut vero ejusmodi motus intestinus admodum perturbatus sit, nihilo tamen minus regula physice satis accurata pro ejus mensura media tradi potest.

Propositio LXXXV. Theorema.

659. Calor, caeteris paribus, est in composita ratione ex densitate corporis calidi, et duplicata ratione agitationis particularum ejusdem.

Agitatio particularum est celeritas media inter celeritates particulares, quibus calidi corporis particulae agitantur. Vocetur haec celeritas media V, et corporis densitas D. Jam, quia calor consistit in concitatiore particularum motu, calor erit, ut impressiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, sed hae impressiones sunt in composita ratione ex duplicata celeritatum et simpla densitatum seu, ut $D. V^2$. Ergo etiam calor est ut $D. V^2$. Quod erat demonstrandum.

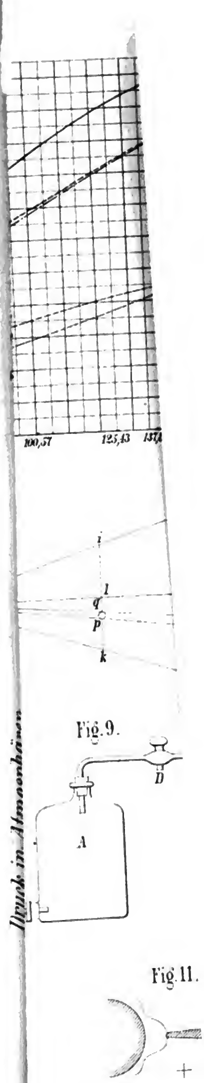
Dictum in propositione „caeteris paribus", id est, in corporibus similis texturae.

Scholion.

660. Ex hac propositione jam elicere licebit modum metiendi agitationem particularum aëris. ect. ect.

Strassburg, den 20. Januar 1880.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



. Schönn Fig. 6. D

1880. ANNALEN № 4.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND IX.

I. *Ueber die Fortführung der Electricität durch strömendes Wasser in Röhren und verwandte Erscheinungen; von E. Dorn in Breslau.*

Inhalt: 1. Apparate. — 2. Röhren. — 3.—10. Electrometerversuche: 3. Anordnung der Versuche. — 4. Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Druck. — 5. Behandlung der Röhren. — 6. Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Querschnitt für Capillaren. — 7. Discussion der Formel für das „electrische Moment". — 8. Methode zur Bestimmung des specifischen Widerstandes des Wassers. — 9. Bestimmung des electrischen Momentes für Wasser und Glas. — 10. Verhalten nicht capillarer Röhren. — 11.—20. Galvanometerversuche: 11. Das electrische Moment für Wasser und Glas aus Galvanometerversuchen hergeleitet. — 12. Methode zur Untersuchung der Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Querschnitt für weitere Röhren. — 13. Reduction auf gleiche mittlere Geschwindigkeit des Wassers. — 14. Die electromotorische Kraft nahe dem Radius umgekehrt proportional. — 15. Vergleichung mit dem Resultate von Hrn. Edlund. — 16. Fehlerquellen bei Benutzung des Depolarisators. — 17. Schliessungsextraströme. — 18. Experimentelle Prüfung der Theorie. — 19. Ladungserscheinungen. — 20. Discussion des Einflusses der Fehlerquellen. — 21. Erwiderung auf Bemerkungen von Hrn. Edlund. — 22. Spuren einer Gleitung von Wasser an Glaswänden. — 23. Electrisches Moment für Thon und Zinksulfatlösungen. — 24. Electrische Ströme durch Bewegung kleiner Theilchen durch Wasser. — 25. Starke Electricitätserregung, wenn Wasser mit Luft gemischt durch eine Glasröhre geht. — 26. Uebersicht der Resultate. — 27. Theoretische Erörterungen.

Vor schon mehr als 2 Jahren begann ich eine Reihe von Beobachtungen über die Fortführung von Electricität durch strömendes Wasser und verwandte Erscheinungen, und ich habe einen Theil der Resultate bereits mitgetheilt.[1]

1) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 20 ff. 1878.



1880. ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE
NEUE FOLGE. BAND X

I. Ueber die Fortführung der ... strömendes Wasser ... Röhren ... Erscheinungen. ... E. Dorn ...

Inhalt: 1. Apparate. — 2. Röhren. — ... Versuche: 3. Anordnung der Versuche. — ... motorischen Kraft vom Druck. — 5. ... hängigkeit der electromotorischen Kraft ... — 7. Discussion der Formel für die ... zur Bestimmung des specifischen ... Bestimmung des electrischen ... Verhalten nicht capillarer Röhren. — ... Versuche: 11. Das electrische ... hergeleitet. — ... Abhängigkeit ... weitere Röhren. — ...

...nd blieb bei allen Ver- ...t, nur wurde seit dem ...ne des Wassers ein gros- ...tzt. Auch sind seitdem ...wegen der Niveaudifferenz ...n und dem untern Ende ...ebrigens hat die Vernach- ...den älteren Beobachtungen ...a höchstens 3, meistens um ...Werthes beeinflusst.

...rischen Theiles der Beobach- ...rs bei den weiteren Röhren) ... Windungen mit astatischem ...g vollkommen aperiodisch war, ...n engeren Röhren) ein Qua- ...es dem Kirchhoff'schen Vor- ...ner ältern Form ähnlich war. ...lben trug einen kleinen Magnet ...lesung geschah mit einem Fern- ...rnung.

...de Quadranten blieben stets mit ...n, die Ladung war meistens so, ...nkung von 100—150 Scalentheilen ...nahme der Empfindlichkeit betrug ...1 Procent in der Stunde und war ...ren Einfluss zu eliminiren, wurde ...igentlichen Beobachtungen die Ab- ...iell bestimmt und dazwischen inter- ...nicht mit der Erde verbundene Qua- ...tgegengesetzte Electricität, wie die ...es Electrometers, so war die Ablenkung ...hen Kraft bis auf Bruchtheile eines ...onal, hingegen wuchs die Ablenkung electromotorische Kraft, wenn Leydener

... Ann. 5. p. 22. 1878.
... Ann. 5. p. 23. 1878.

Der Abschluss meiner Arbeit wurde besonders dadurch verzögert, dass mir ein Theil der Apparate[1]) nicht immer zur Verfügung stand. Die inzwischen erschienenen Abhandlungen von Hrn. Helmholtz[2]) und Edlund[3]) liessen eine Vervollständigung meiner Untersuchungen wünschenswerth erscheinen, die ich während der letzten Monate ausgeführt habe.

Das Folgende enthält zunächst eine Untersuchung über die electromotorische Kraft, welche beim Strömen von Wasser durch capillare und weitere Röhren auftritt, und zwar insbesondere über ihre Abhängigkeit vom Querschnitt. Indem ferner der galvanische Widerstand des benutzten Wassers bestimmt wurde, liess sich „das electrische Moment für Glas und Wasser, soweit dasselbe in die Flüssigkeit fällt[4])“ berechnen. Dann will ich einige Einwendungen besprechen, die von Hrn. Edlund gegen meine frühere Mittheilung erhoben sind.

Es folgt eine Berechnung des „electrischen Momentes für Thon und Zinkvitriollösungen nach Beobachtungen von Hrn. C. Freund[5]), und einige Versuche, welche zeigen, dass man einen electrischen Strom durch Bewegung suspendirter Theilchen in einer Flüssigkeit erhält.

Wenn ich an einigen Stellen zu sehr in Einzelheiten einzugehen scheine, so glaube ich dies doch nicht vermeiden zu können, da bei so delicaten Versuchen, wie die vorliegenden, ihre Zuverlässigkeit anders sich nicht darthun lässt. Eine gewisse Ausführlichkeit schien mir um so mehr geboten, als mehrere Punkte des hier behandelten Gebietes noch Gegenstand einer Controverse sind.

1. Die Vorrichtung, um das Wasser unter einem gemessenen Drucke durch die zu untersuchenden Röhren zu

1) Kupferballons einer Mineralwasserfabrik.
2) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 337. 1879.
3) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 119. 1879.
4) Von Hrn. Helmholtz mit $\varphi_i - \varphi_a$ bezeichnet.
5) Freund, Wied. Ann. 7. p. 59. 1879.

treiben, ist bereits beschrieben[1]) und blieb bei allen Versuchen im wesentlichen ungeändert, nur wurde seit dem September 1878 auch zur Aufnahme des Wassers ein grosser Ballon von 45 l Inhalt benutzt. Auch sind seitdem die Drucke mit einer Correction wegen der Niveaudifferenz zwischen dem Wasser im Ballon und dem untern Ende der Röhre versehen worden. Uebrigens hat die Vernachlässigung dieser Correction bei den älteren Beobachtungen den Druck nie um mehr als um höchstens 3, meistens um noch nicht 1 Procent seines Werthes beeinflusst.

Zur Ausführung des electrischen Theiles der Beobachtungen diente theils (besonders bei den weiteren Röhren) ein Galvanometer von 10 000 Windungen mit astatischem Nadelpaar[2]), dessen Bewegung vollkommen aperiodisch war, theils (hauptsächlich bei den engeren Röhren) ein Quadrantenelectrometer, welches dem Kirchhoff'schen Vorlesungselectrometer in seiner ältern Form ähnlich war. Der bewegliche Theil desselben trug einen kleinen Magnet und einen Spiegel; die Ablesung geschah mit einem Fernrohr aus etwa 2 m Entfernung.

Zwei gegenüberliegende Quadranten blieben stets mit der Gasleitung verbunden, die Ladung war meistens so, dass ein Daniell eine Ablenkung von 100—150 Scalentheilen hervorbrachte. Die Abnahme der Empfindlichkeit betrug im Sommer höchstens 1 Procent in der Stunde und war sonst geringer; um ihren Einfluss zu eliminiren, wurde vor und nach den eigentlichen Beobachtungen die Ablenkung durch 1 Daniell bestimmt und dazwischen interpolirt. Erhielt das nicht mit der Erde verbundene Quadrantenpaar die entgegengesetzte Electricität, wie die Leydener Flasche des Electrometers, so war die Ablenkung der electromotorischen Kraft bis auf Bruchtheile eines Procentes proportional, hingegen wuchs die Ablenkung langsamer als die electromotorische Kraft, wenn Leydener

1) Dorn, Wied. Ann. **5.** p. 22. 1878.
2) Dorn, Wied. Ann. **5.** p. 23. 1878.

Flasche und Quadranten gleichnamige Electricität besassen. In fast allen Versuchen fand der erste Fall statt, ausserdem wurde die Vorsicht gebraucht, die Empfindlichkeit mit soviel Daniell'schen Elementen zu bestimmen, dass die Ablenkung der bei den Beobachtungen möglichst nahe kam. Die zu den Quadranten führenden Drähte waren zuerst durch gefirnisste Glasstäbe, später durch Siegellackstangen gestützt; als bei letzterer Anordnung dem nicht abgeleiteten Quadrantenpaar (ohne Benutzung eines Condensators) Electricität mitgetheilt und die Electricitätsquelle entfernt wurde, betrug der Verlust in der Minute etwa 1 Procent der Ladung.

Ferner zeigte sich in der ersten Zeit ein Anwachsen der Ablenkung des Electrometers, wenn dasselbe mit einer constanten Electricitätsquelle verbunden blieb. Dieser Uebelstand verschwand aber vollkommen, als der Glasdeckel des Instrumentes durch einen metallenen ersetzt und die Schwefelsäure im Electrometer jedesmal vor dem Laden desselben stark umgerührt wurde. Durch letztere Operation wurden die ungleich dichten Schichten, welche sich bei längerem Stehen durch Wasseraufnahme bilden, wieder durcheinander gemischt.

Die für die Electrometerversuche benutzte Form des Daniell'schen Elementes stellt Taf. III Fig. 1 in etwa halber Grösse dar.[1]) Das Gefäss ist bis *c* mit concentrirter Zinkvitriollösung gefüllt, in dieselbe taucht die in der unten offenen Glasröhre *a* steckende amalgamirte Zinkstange *Z*. Mit roher Seide an *a* festgebunden ist die unten geschlossene Röhre *b*, in welche der bis auf ein kleines aufgerolltes Stück isolirte Kupferdraht *C* hineinragt. In *b* werden einige Stückchen Kupfervitriol hineingeworfen. Wenn das Element nicht gerade in Gebrauch ist, wird *a* soweit emporgezogen, dass das obere Ende von *b* sich über dem Niveau der Flüssigkeit befindet, und hierdurch wird die Möglichkeit gewährt, dasselbe Element Monate lang zu

1) Phil. Mag., (5.), Vol. 5. 1878.

verwenden. Die Constanz ist zufriedenstellend; denn ein 3 Monate altes Element zeigte eine nur um 0,6 Proc. geringere electromotorische Kraft als ein anderes, bei dem so eben das Zink frisch amalgamirt und neue Zinkvitriollösung eingegossen war.

Ein solches einen Tag vorher gefülltes Element wurde electrometrisch verglichen mit einem Normaldaniell[1]): Amalg. Zn in verdünnter H_2SO_4 vom spec. Gew. 1,06; concentrirte Lösung von $CuSO_4$ mit Cu (frisch galvanisch niedergeschlagen), und erhalten:

$$d = 0{,}9282\,D$$

wo D das Normaldaniell ist.

Bei den galvanometrischen Versuchen wurde meistens ein Daniell der von Hrn. Beetz angegebenen Form benutzt; seine electromotorische Kraft war fast identisch mit d.

2. Bei den älteren Versuchen sind Röhren von Thüringer Glas verwendet, wie ich sie gerade zu kaufen bekam; die Dimensionen derselben sind schon angegeben.[2]) Im Sommer 1878 erhielt ich ein Sortiment Röhren aus demselben Hafen gezogen von Hrn. Schilling in Gehlberg und lasse ihre Dimensionen folgen. Die Querschnitte sind auch hier nach der Coulomb'schen Methode bestimmt.

Röhre	Länge	Querschn.	Durchm.	Röhre	Länge	Querschn.	Durchm.
	mm	qmm	mm		mm	qmm	mm
21	100,97	0,68203	0,93186	St 4	199,4	0,1947	0,4979
22	150,92	3,9022	2,2290	St 5	196,3	0,1939	0,4968
22'	150,9	3,9372	2,2390	35	498,9	0,8524	1,0419
23	304,31	7,6605	3,1230	36	300,0	0,3462	0,6639
24	502,29	13,2866	4,1130	37	201,3	0,2221	0,5317
25	500,82	0,76835	0,98908	38	100,7	0,1499	0,4369
26	300,64	0,37867	0,69436	39	503,2	0,04990	0,2521
27	201,92	0,24206	0,55516	40	499,7	0,2301	0,5413
28	100,79	0,14029	0,42264	41	500,6	0,1653	0,4588
St 1 *)	201,5	0,1797	0,4784	42	300,2	0,05378	0,2617
St 2	201,1	0.1763	0,4737	43	138,15	0,05312	0,2601
St 3	200,7	0,1841	0,4842				

*) St 1, 2 ... 5 waren Stücke einer Röhre.

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. **141.** p. 450. 1870.

2) Dorn, Wied. Ann. **5.** p. 28. 1878.

Da es von Wichtigkeit ist, ob die Röhren bereits dem Poiseuille'schen Gesetze folgen oder nicht, so habe ich die nach demselben[1]) berechneten und die beobachteten Ausflussvolumina für 1 Secunde zusammengestellt.

Röhre	Temp.	Druck	Vol. beob.	ber.
		mm Quecks.	cmm	cmm
21	21,11	996	4947	24710
25	11,6	381,2	1665	1900
		966,5	3101	4818
26	11,95	578,2	1042	1178
		1256	2045	2557
27	12,85	369,5	437,5	469,0
		932,3	997,9	1184
28	11,9	534,7	393,2	445,1
		860,5	599,8	716,5
35	16,0	896	2823	6200
36	16,0	901	1334	1709
37	16,0	905	875,1	1053
38	16,0	909	723,2	963,6
St 5	16,7	850	673,6	786,7
39	21,1	995	26,53	26,53
40	16,0	848	407,8	426,9
41	20,86	999	286,0	292,1
42	21,1	849	45,64	44,07
43	21,1	1028	109,8	113,2

Da sich die Temperaturangabe auf die Luft des Beobachtungszimmers bezieht, welche wahrscheinlich immer ein wenig höher war als die des Ballons, so darf man nach diesen Versuchen die Röhren 39, 41, 42, 43 den eigentlichen Capillaren zurechnen, während 40 sich denselben sehr nähert.

Bei meinen Versuchen bin ich oft nach langer Zeit wieder zu demselben Gegenstande zurückgekehrt; ich ordne dieselben daher nicht chronologisch.

Electrometerversuche. — 3. Für diese Versuche, die sich meistens auf engere Röhren bezogen, wurde das destillirte Wasser stets direct in den vorher sorgfältig gereinigten Ballon hineinfiltrirt. Das Rohr, durch welches das Wasser aufstieg, wurde so umgebogen, dass sein

1) Benutzt wurde der Werth des Reibungscoefficienten von Hrn. O. E. Meyer, Wied. Ann. 2. p. 394. 1877.

unteres Ende mehrere Centimeter vom Boden des Ballons entfernt blieb. Eine Störung der Versuche durch eine Verstopfung der Röhre war also nicht zu erwarten, um aber hierüber volle Sicherheit zu erlangen, wurde bei jedem einzelnen Versuche das in einer gewissen Zeit ausfliessende Wasser aufgefangen und seine Menge mit einer Interpolationsformel, resp. graphischen Darstellung verglichen, welche aus vorgängigen[1]) bei verschiedenen Drucken angestellten Beobachtungen hergeleitet war.

Die zu untersuchende Röhre wurde mit Kork und Siegellack in zwei weitere Stücke eingekittet, welche in seitlichen Ansätzen die 12,5 qcm grossen Platinelectroden trugen, und durch einen weiten Gummischlauch mit Hanfeinlage am Ausflussrohre befestigt. Die Röhre hing dann frei herab; da das Wasser bei den Versuchen in Tropfen[2]) austrat, so war die untere Electrode vollkommen isolirt (natürlich abgesehen von dem Wasser in der Röhre).

Um die an den Electroden befestigten Platindräthe wurden die dünnen zum Electrometer führenden Kupferdräthe (ohne Vermittelung eines Commutators) herumgewickelt, so dass auch hier jede Ableitung vermieden war.

Die obere Electrode, die ja durch eine Wassersäule von grossem Querschnitt mit dem Ballon communicirte, wurde stets mit dem zur Erde abgeleiteten Quadrantenpaar verbunden, die untere Electrode mit dem isolirten.

Bei der umgekehrten Anordnung durfte man nämlich nicht die volle Ausbildung der Potentialdifferenz erwarten, und in der That wurde bei einigen Vorversuchen die Ablenkung des Electrometers beobachtet:

1) In einzelnen Fällen wurden diese Beobachtungen später gemacht.

2) Infolge hiervon könnte der Apparat zugleich als „Water dropping collector" wirken, besonders wenn ein Becherglas untergesetzt wird, das durch das Austrocknen electrisch geworden ist. Ich habe mich aber von der gänzlichen Unerheblichkeit dieser möglichen Fehlerquelle überzeugt.

	erste	zweite Anordnung
Röhre 25	75,7	36,3
Röhre 26	62,2	27,3

Der Gang einer Beobachtung war folgender: Die Röhre wurde nach ihrer Befestigung zunächst durch Oeffnen des Hahns zum Ballon und Emporheben des untern Endes mit Wasser gefüllt, abgetrocknet und mit dem Electrometer verbunden, dessen Stand bei ruhendem Wasser in der Röhre abgelesen wurde. Der Hahn wurde geöffnet, mit dem Secundenschlage einer Pendeluhr das Auffangegefäss untergeschoben und die Ablenkung des Electrometers durch Beobachtung seiner Schwingungen oder seiner Ruhelage bestimmt. Mit einem Secundenschlage wurde das Gefäss vorgezogen, der Hahn geschlossen und das Electrometer bei ruhender Flüssigkeit beobachtet.

Man erhält so die durch den Wasserstrom erzeugte electromotorische Kraft unbeeinflusst von einer etwaigen electrischen Differenz der Electroden.

Bei den engsten Röhren (39—43) machte die Beobachtung für ruhendes Wasser Schwierigkeiten, indem der Gummischlauch bei der Füllung etwas aufgeblasen wurde und auch nach Schliessung des Hahnes noch längere Zeit Wasser durch die Röhre trieb.

Daher ist bei den meisten Versuchen mit diesen Röhren die Differenz der Electroden nicht berücksichtigt. Dieselbe betrug übrigens nur einen Bruchtheil eines Procentes und hatte weniger Einfluss als die Aenderung der Röhre während eines Versuches.

4. Um verschiedene Versuche mit demselben Apparat unter einander vergleichbar zu machen, muss die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Drucke bekannt sein.

Zwar ist von Hrn. Haga[1]) für Röhren, die dem Poiseuille'schen Gesetze genügen, und von mir selbst[2]) für

1) Haga, Wied. Ann. 2. p. 331. 1877.
2) Dorn. Wied. Ann. 5. p. 34. 1878.

weite Röhren die Proportionalität der electromotorischen Kraft und des Druckes nachgewiesen, doch schien es mir von Interesse, durch besonders sorgfältige Versuche zu entscheiden, bis zu welcher Grenze der Genauigkeit dies Gesetz verbürgt werden kann.

Um die Resultate möglichst unbeeinflusst von der Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit zu erhalten, wurden die Versuche so angeordnet, dass zwischen je zwei successiven Beobachtungen nur etwa 2 Minuten verflossen, und dass keine Unterbrechung im Strömen des Wassers eintrat. Das Electrometer war schwach geladen, zur Prüfung desselben wurde aus 2 Bunsen'schen Elementen (Widerstand beider 0,2 Siemens) und 5000 Siemens'schen Einheiten ein Stromkreis gebildet und die Potentialdifferenz zwischen dem zur Erde abgeleiteten negativen Pole und den Stellen 1000, 2000, 3000, 5000 gemessen. Da die Abweichung von der Proportionalität im Mittel nur $^1/_5$ Proc. betrug, so konnte sie vernachlässigt werden.

Vor den eigentlichen Beobachtungen liess ich das Wasser einige Minuten durch die Röhre fliessen. Es wurde beobachtet:

30. Aug. 1879. Röhre 41, seit 24 Stunden benetzt. $d = 57,0$.

p	A	E	E_{1000}		Diff.
316,4	48,5	0,851	2,688		
953,5	138,1	2,423	2,541	2,639	0,098
304,1	44,9	0,788	2,590		= 3,7 Proc.
Röhre 43, frisch gereinigt[1]),					
486,8	84,0	1,474	3,028		
957,5	161,2	2,829	2,955	2,986	0,031
470,1	78,9	1,384	2,944		= 1,0 Proc.

31. Aug. 1879. Röhre 43, seit 24 Stunden benetzt. $d = 38,0$.

p	A	E	E_{1000}		Diff.
425	50,5	1,329	3,127		
972	109,0	2,868	2,937	3,089	0,152
434	50,3	1,324	3,050		= 4,9 Proc.

1) S. u. p. 524.

31. Aug. 1879. Röhre 41, frisch gereinigt. $d = 38,0$.

p	A	E	E_{1000}		Diff.
322	38,1	1,002	3,113		
956	109,3	2,876	3,008	3,077	0,069
315	36,4	0,958	3,041		= 2,3 Proc.

Hierin bedeutet:

d die Ablenkung durch ein Daniell der p. 516 beschriebenen Form,

p den (corrigirten) Druck in mm Quecksilber,

A die Ablenkung des Electrometers in Scalentheilen, (hier von der electrischen Differenz zwischen den Electroden befreit) auf die unter d angegebene Empfindlichkeit reducirt,

E die entsprechende electromotorische Kraft,

E_{1000} dieselbe für $p = 1000$ unter Annahme der Proportionalität mit dem Drucke berechnet.

Die fünfte Columne enthält das Mittel der ersten und dritten Beobachtung, die sechste die Differenz zwischen demselben und der zweiten.

In allen Fällen wächst die electromotorische Kraft etwas langsamer als der Druck; eigenthümlich ist, dass dies Zurückbleiben für lange benetzte Röhren bedeutender ist, als für frisch gereinigte (im Mittel 4,3 gegen 1,7 Proc.).

Die noch nicht dem Poiseuille'schen Gesetze folgenden Röhren 25, 26, 27, 28 hatte ich schon früher untersucht, und zwar folgten hier die einzelnen Versuche nach Verlauf von etwa 15 Minuten aufeinander.

In allen Fällen waren die Röhren sehr lange vor den Versuchen benetzt gewesen.

Ich gebe hier nur die Resultate.

Röhre 25. 12.3.79 = d 73,5		Röhre 26. 1.4.79. $d = 53,5$		Röhre 27. 18.3.79. $d = 75,0$		Röhre 28. 14.3.79. $d = 50,0$	
p	E_{1000}	p	E_{1000}	p	E_{1000}	p	E_{1000}
464	3,283	387	3,737	332	3,314	414	1,961
944	3,371	745	3,467	659	3,182	966	1,864
945	3,310	1007	3,235	890	3,249	961	1,869
460	3,163	389	3,262	888	3,311	410	1,912
—	—	—	—	345	3,484	—	—

Soweit die starke Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit erkennen lässt, findet auch hier angenäherte Proportionalität (bis auf 3 bis 5 Proc.) mit dem Drucke statt. Bei den drei letzten Röhren wächst die electromotorische Kraft etwas langsamer, bei 25 etwas schneller als der Druck. Dies abweichende Verhalten, welches auch bei einem andern Versuche hervortrat, hängt wahrscheinlich damit zusammen, dass die Röhre 25 auch in der Beziehung zwischen Druck und Ausflussmenge in der Nähe von 600 mm eine Discontinuität zeigte.

Da bei den eigentlichen Messungen der Druck nur zwischen 800 und 1000 mm variirte, so darf nach dem Vorstehenden zur Reduction derselben jedenfalls die electromotorische Kraft dem Drucke proportional gesetzt werden.[1])

5. Nachdem zuerst Hr. Clark[2]) auf die Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Zeit und die Abhängigkeit derselben von der Behandlung der Röhre aufmerksam gemacht hatte, musste mein Bemühen sein, ein Verfahren aufzusuchen, welches constante Resultate liefert.

Merkwürdiger Weise zeigte sich das Reinigungsverfahren von Hrn. Clark — Erhitzen mit concentrirter Schwefelsäure unter Zusatz einiger Tropfen Salpetersäure im Dampfbade, Hindurchsaugen von heissem destillirtem Wasser und warmer Luft mit Hülfe einer Luftpumpe — für die Glassorte meiner Röhren ungeeignet.

Es trat nämlich im Laufe der ersten 10—12 Minuten eine Steigerung der electromotorischen Kraft mehrmals bis auf das Doppelte, ja Dreifache des anfänglichen Werthes ein, gleichgültig ob das destillirte Wasser in einer Porcellan- oder Silberschale erwärmt war. Eine Versuchsreihe vom 9. 4. 79 machte mich hierauf aufmerksam; am folgenden Tage erhielt ich:

---

1) Diese Proportionalität ist hiermit zunächst immer nur für denselben Apparat behauptet.

2) Clark, Wied. Ann. 2. p. 344. 1877.

10. 4. 79. Reinigungsverfahren von Hrn. Clark. $d=65{,}0$

Röhre	p	Nach Minuten	A	E	E_{1000}
28	837	—	142,2[1]	2,188	2,614
27	824	$^1/_2$	104,3	1,605	1,947
—	—	6	135,3	2,081	2,526
—	—	11	139,1	2,140	2,597
26	805	$^1/_2$	105,0	1,615	2,007
—	—	6	130,5	2,008	2,494
—	—	12	139,4	2,145	2,664
25	770	$^1/_2$	81,3	1,251	1,624
—	—	6	126,7	1,950	2,532
—	—	12	128,8	1,981	2,574

Eine Wiederholung am 12. 4. 79 ergab ähnliche Resultate; bei 25 stieg hier die Ablenkung sogar von 34,0 auf 102,3. Dies lag nicht etwa daran, dass das Electrometer nur allmählich seine volle Ladung annahm, denn nachdem jetzt der Hahn geschlossen und das Electrometer in seine Ruhelage zurückgegangen war, erfolgte bei erneutem Oeffnen sofort die Ablenkung 103,1. Ein ähnlicher Controlversuch mit demselben Resultate wurde am 13. 4. 78 mit Röhre 27 gemacht.

Der Grund der anfänglich so geringen und dann erst ansteigenden electromotorischen Kraft liegt in dem Hindurchsaugen des heissen Wassers. Stück 1 ergab nämlich (16. 4. 79) frisch, wie es aus der Glashütte kam, $E_{1000}=3{,}191$, nachdem (ohne Erhitzung in Schwefelsäure) 1 Minute heisses Wasser und dann trockene Luft durchgesogen war, nach $^1/_2$ Minute 136,6, nach vier Minuten 155,8 Ablenkung, welchem letzteren Werthe $E_{1000}=2{,}321$ entsprach.

Indem ich andere Versuche mit kalter Schwefelsäure, Salzsäure etc. übergehe, bemerke ich, dass sich als zweckdienlich bewährte: 1) die Benutzung der Röhren ohne vorhergehende Reinigung, bevor sie mit irgend einer fremden Substanz ausser mit Luft in Berührung gekommen; 2) folgendes Reinigungsverfahren: Erhitzen in H_2SO_4 (mit einigen Tropfen HNO_3), Entfernung der Säure durch eine Spritz-

1) Hier ausnahmsweise bald ein constanter Werth erreicht.

flasche[1]) mit kochendem Wasser, Hindurchsaugen trockener Luft.

In beiden Fällen erfolgte eine langsame Abnahme der electromotorischen Kraft. Bei den Stücken 1 bis 5, welche von derselben Röhre geschnitten waren, wurde mit Wasser von derselben Füllung des Ballons beobachtet:

Röhre	Frisch Datum	E_{1000}	Gereinigt Datum	E_{1000}
St. 1	16. 4. 79	3,282	16. 4. 79	2,919
—	—	—	17. 4. 79	2,985
—	—	—	18. 4. 79	3,151
St. 2	17. 4. 79	3,058	17. 4. 79	2,899
St. 3	18. 4. 79	3,254	18. 4. 79	3,127
St. 4	22. 4. 79	3,301	—	—
St. 5	23. 4. 79	3,132	23. 4. 79	3,107
	Mittel	3,205	Mittel	3,031
	±	0,088	±	0,097

Die mittlere Abweichung beträgt etwa 3 Proc., was für Versuche wie die vorliegenden eine gute Uebereinstimmung genannt werden darf. Auch in den späteren Beobachtungen findet man die Brauchbarkeit des Reinigungsverfahrens bestätigt. Uebrigens sinkt durch die Reinigung die electromotorische Kraft etwa um 5 Proc., während nach Anwendung des Verfahrens von Hrn. Clark auch der nach langem Strömen erreichte Werth noch um 20 Proc. gegen den für die frische Röhre zurückbleibt.

6. Nach den in 4) und 5) beschriebenen nothwendigen Vorbereitungen untersuchte ich die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Querschnitt für Röhren, die dem Poiseuille'schen Gesetze genügen und solche, die sich nicht zu weit von demselben entfernen.

Die sämmtlichen folgenden Versuche sind mit destillirtem Wasser von derselben Füllung des Ballons wie die oben mitgetheilten angestellt.

---

1) Ausser bei der sehr langen und engen Röhre 39 gelang dies ausreichend.

	Röhre	p	A	E	E_{1000}
21. April 1879. Röhren gereinigt. $d = 137,5$	27	865	357,9	2,603	3,010
	26	868	369,6	2,688	3,097
	25	855	358,2	2,605	3,047
	28	862	323,9	2,356	2,733
	25	857	357,8	2,602	3,036

Eine Beobachtungsreihe mit denselben Röhren am 19. April hatte entsprechende, nur etwa 3 Proc. kleinere Werthe geliefert.

	Röhre	p	A	E	E_{1000}
22. April 1879. Röhren frisch. $d = 118,5$	38	857	278,3	2,349	2,740
	37	854	316,6	2,672	3,128
	36	855	324,1	2,735	3,199
	35	840	328,4	2,771	3,299
	St. 4	832	325,4	2,746	3,301
23. April 1879. Vormittags. Röhren frisch. $d = 106,5$	St. 5	850	282,8	2,656	3,132
	40	848	318,7	2,993	3,529
	41	845	321,5	3,019	3,573
	42	845	319,4	2,999	3,549
23. April 1879. Nachmittags. Röhren gereinigt. $d = 101,5$	St. 5	812	256,1	2,523	3,107
	40	811	273,3	2,692	3,320
	41	808	290,0	2,857	3,536
	42	808	276,6	2,725	3,372

Die von Hrn. Helmholtz entwickelte Theorie verlangt[1]), dass bei Röhren, die dem Poiseuille'schen Gesetze genügen, die electromotorische Kraft (ceteris paribus) vom Querschnitte und der Länge unabhängig ist. Von den untersuchten Röhren entsprechen der erwähnten Bedingung 40, 41, 42, und diese ergaben in der That frisch im Mittel $3,550 \pm 0,016$, gereinigt $3,409 \pm 0,084$.

In späteren Versuchen hatte ich noch oft Gelegenheit, dies Gesetz bestätigt zu sehen. Die hier mitgetheilten Beobachtungen sind vor dem im Juli 1879 erfolgten Erscheinen der Helmholtz'schen Abhandlung angestellt, sodass also die Beobachtung unabhängig von der Theorie zum gleichen Resultat geführt hat.

Obwohl die übrigen hier untersuchten Röhren theilweise sehr merklich vom Poiseuille'schen Gesetze abweichen, erscheint die electromotorische Kraft doch nur

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 370. 1879.

unerheblich herabgesetzt. Eine Ausnahme machen hier 38 und 28, welches Theile derselben Glasröhre waren.

7. Hr. Helmholtz giebt a. a. O.[1]) die Formel:

$$\frac{A}{\sigma} = \frac{P}{4\pi k^2}(\varphi_i - \varphi_a) \tag{11b}$$

wo:

A die durch den Wasserstrom erzeugte electromotorische Kraft,

σ den specifischen Widerstand der Flüssigkeit, beides in electrostatischem Maasse,

P die Druckdifferenz an den Enden der Röhre in absolutem Maasse,

k^2 die Reibungsconstante der Flüssigkeit,

$\varphi_i - \varphi_a$ das „electrische Moment" der Doppelschicht nach Hrn. Helmholtz

bedeutet.

Obige Formel gilt unter der Bedingung, dass eine Gleitung der Flüssigkeit an der Röhrenwand nicht stattfindet; man überzeugt sich leicht, dass im entgegengesetzten Falle für einen kreisförmigen Querschnitt $\varphi_i - \varphi_a$ nur durch $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ zu ersetzen ist, wo l die Gleitungsconstante, N die Normale der Röhrenwand bedeutet.[2])

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 370. 1879.

2) Es sei die Geschwindigkeit an der Wand $\bar{u}$, so wird sie in der sehr kleinen Entfernung N gesetzt werden können $\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial N} N$, sodass, wenn ε die electrische Dichtigkeit bedeutet, durch ein Flächenelement $ds\,dN$ des Querschnittes in der Zeiteinheit die Electricitätsmenge geführt wird:

$$\varepsilon\left(\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial N} N\right) ds\, dN,$$

welcher Ausdruck über den Querschnitt zu integriren ist.

Der vom zweiten Term herrührende Theil des Integrales wird nach Hrn. Helmholtz:

$$-\frac{PQ}{4\pi k^2 L}(\varphi_i - \varphi_a)$$

(L = Länge, Q = Querschnitt der Röhre).

Drückt man A in Daniell'schen Elementen, die Grössen k^2, P, σ in absolutem Maasse aus, so erhält man $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{d\varphi}{dN} = \mu$ aus der Formel (11b') ebenfalls in Daniells.

Alle Versuche sind bereits auf einen Druck von 1000 mm Quecksilber umgerechnet; dieser ist in absolutem Maasse

$$P_{1000} = 1000 \,.\, g \,.\, q,$$

worin für g die Beschleunigung der Schwere am Beobachtungsorte 9811,29, für q die Dichtigkeit des Quecksilbers

---

sodass nur noch zu berechnen bleibt:

$$\int \varepsilon \bar{u} \, ds \, dN.$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt hat $\bar{u}$ den von s unabhängigen Werth: $\bar{u} = -\frac{lPR}{2Lk^2}$, ferner ist:

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial N^2}.$$

Integrirt man zuerst nach N, so wird

$$\int \frac{\partial^2\varphi}{\partial N^2} \, dN = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_{N=0},$$

indem bei der geringen Dicke der electrischen Doppelschicht φ für merkliche Werthe von N constant wird, sodass $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ für die obere Grenze verschwindet.

Da die Integration nach s einfach $2\pi R$ gibt, so wird das Integral:

$$\int \varepsilon \bar{u} \, ds \, dN = \frac{\bar{u} R}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_{N=0} = -\frac{PQ}{4\pi L k^2}\, l \left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_{N=0},$$

sodass der Gesammtbetrag der in der Zeiteinheit durch den Querschnitt geführten Electricitätsmenge wird:

$E_0 = -\frac{PQ}{4\pi k^2 L}\left(\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)$, wo der Index bei $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ fortgelassen ist.

Wirkt ausserdem eine electromotorische Kraft A zwischen den Enden der Röhre, so ist die von dem electrischen Strom durch jeden Querschnitt beförderte Electricitätsmenge für die Zeiteinheit:

$$E_1 = \frac{AQ}{\sigma L}.$$

Ist keine andere Leitung, als die durch das Rohr vorhanden, so wird der Zustand stationär, wenn:

$$E_0 + E_1 = 0,$$

$$\frac{A}{\sigma} = \frac{P}{4\pi k^2}\left(\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right).$$

bei der Temperatur der Beobachtung zu setzen ist. Da letztere fast genau 21° war, wird $q = 13{,}544$ und

$$P_{1000} = 1{,}3299 \,.\, 10^8.$$

Um die von mir benutzte Bezeichnung einzuführen, ersetze ich A durch E_{1000} und habe:

$$(11b^1) \qquad \mu = \varphi_i - \varphi_a + l\frac{d\varphi}{dN} = \frac{4\pi k^2 E_{1000}}{P_{1000} \cdot \sigma};$$

k^2 ist nach Hrn. O. E. Meyer[1]), hier auf Millimeter bezogen, für die Temperatur T:

$$k^2 = \frac{1{,}775}{1 + 0{,}03315\, T + 0{,}0002437\, T^2}.$$

Der specifische Widerstand σ ist der Widerstand eines Würfels von 1 mm Seite aus der zu untersuchenden Substanz, gemessen in electrostatischem Maasse. Die Messungen ergeben im Folgenden denselben zunächst bezogen auf Quecksilber = 1, d. h. es ist zu Grunde gelegt ein Widerstand = 0,001 Siemens. Nach Hrn. H. F. Weber[2]) ist nun

1 Siemens = $0{,}9550 \,.\, 10^{10}$ absolute electromagnetische Widerstandseinheiten, somit

1 Siemens = $\frac{0{,}9950 \,.\, 10^{10}}{v^2}$ electrostatische W.-E.

v findet W. Thomson[3]) $28{,}25 \,.\, 10^{10}$, Maxwell[4]) $28{,}798 \,.\, 10^{10}$, wobei beide die British Association Unity = 10^{10} absoluten W.-E. voraussetzen. Da nun aber 1 Siemens = 0,9536 B.A.U, so hat man diese Zahlen mit $\frac{0{,}9550}{0{,}9536}$ zu multipliciren, um sie auf die Bestimmung von Hrn. H. F. Weber zu reduciren. Ich setze demnach $v = 28{,}565 \,.\, 10^{10}$, indem ich das Mittel nehme, woraus dann folgt:

1 Siemens = $1{,}1704 \,.\, 10^{-13}$ electrostatische W.-E.

Den auf Quecksilber bezogenen specifischen Widerstand hat man also mit $1{,}1704 \,.\, 10^{-16}$ zu multipliciren, um denselben in electrostatischem Maasse zu erhalten.

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. **2.** p. 394. 1877.

2) H. F. Weber, Phil. Mag. Januar 1878.

3) W. Thomson, Rep. Brit. Assoc. p. 436. 1869.

4) Maxwell, ebenda p. 438. Ich ziehe diese Messungen denen von Weber und Kohlrausch vor.

8. Zur Bestimmung des specifischen Widerstandes des Wassers bediente ich mich, da die Mittel des hiesigen physikalischen Instituts für eine Anwendung der Methode von Hrn. Kohlrausch nicht ausreichten, des Poggendorff'schen Inversors (von Hrn. Edlund neu erfunden und als Depolarisator[1]) beschrieben). Mein Instrument unterschied sich von dem Edlund'schen nur dadurch, dass die Scheibe 10 Umdrehungen machte, während die Kurbel mit der Hand einmal herumgeführt wurde, und dass die Scheibe nicht aus Buchsbaumholz, sondern aus Ebonit bestand. Eine Buchsbaumscheibe musste ich wegen ungenügender Isolation verwerfen, indem ihr Widerstand nur etwa 35 Millionen Siemens betrug.

Es sei zunächst zwischen den schleifenden Federn des Depolarisators ein Drahtwiderstand eingeschaltet, die Messingbekleidung der einen Seite der Ebonitscheibe sei verbunden mit einem Element, von dem andern Pole desselben gehe die Leitung zum Galvanometer und von diesem zur Messingbekleidung der andern Seite. Man messe den Strom bei ruhendem Depolarisator, wenn die Federn auf die Ansätze der Messingbekleidungen drücken, ferner wenn der Depolarisator mit einer gewissen Geschwindigkeit gedreht wird. Der Quotient δ der erstern Stromstärke durch die zweite werde „Depolarisatorfactor" genannt.

Wird nun an Stelle des Drahtwiderstandes ein flüssiger Leiter eingeschaltet, so kann eine Polarisation der Polplatten sich nicht ausbilden, weil die Ströme in demselben unaufhörlich ihre Richtung wechseln, ferner übt auch eine etwa vorhandene Polarisation keinen Einfluss aus, da sich dieser ja bei jedem Contactwechsel in entgegengesetztem Sinne geltend macht. Man kann also mit einem Electrolyten ebenso operiren, wie mit einem Drahtwiderstande, resp. aus der bei gedrehtem Depolarisator gemessenen Ablenkung den Widerstand des Electrolyten herleiten.

---

1) Edlund, Pogg. Ann. **156.** p. 273. 1875.

Die Strommessungen wurden mit einem Siemens'schen Galvanometer ausgeführt, welches infolge der aperiodischen Bewegung des glockenförmigen Magnets eine sehr schnelle und sichere Ablesung erlaubte. Da das Fernrohr 4 Meter entfernt war, konnte man Proportionalität des Ausschlages mit der Stromstärke erwarten, und bei einer Zunahme der Ablenkung von 200 auf 476 Scalentheile betrug die Abweichung wirklich nur 0,36 Proc.

Bei den Widerstandsmessungen des Wassers wurde zunächst der Depolarisatorfactor δ bestimmt mit Benutzung einer Rolle von 775 Windungen und etwa 2,9 Siemens Widerstand, indem ein Meidinger'sches Element mit 12000 Siemens (dem Galvanometer und dem Depolarisator) zu einem ungetheilten Stromkreise vereinigt wurde.

Dann erhielt das Galvanometer zwei Rollen (34000 Windungen, Widerstand 3485 Siemens für 20,72, für andere Temperaturen berechnet nach Hrn. O. Frölich[1])), und es wurde seine Empfindlichkeit gemessen, d. h. derjenige Widerstand $\bar{\omega}$ in Siemens, mit dem die bei der folgenden Messung verwendeten Elemente eine Ablenkung von einem Scalentheil ergeben haben würden. Hierzu war natürlich die Anbringung einer Nebenschliessung erforderlich.

Zwischen den schleifenden Federn des Depolarisators wurde hierauf eine mit dem zu untersuchenden Wasser gefüllte Röhre [Länge 336,2 mm, Querschnitt 123,40 qmm, also Widerstand, wenn mit Quecksilber gefüllt, $R = 0{,}0027244$ Siemens] eingeschaltet, und bei gedrehtem Depolarisator die Ablenkung A beobachtet.

Den Schluss machte eine erneute Bestimmung von $\bar{\omega}$ und δ, deren Mittelwerthe dann für die Rechnung benutzt wurden.

Bei Einschaltung der Röhre würde ohne Polarisation die Ablenkung für Ruhestellung des Depolarisators $A\delta$ Scalentheile gewesen sein, also der Widerstand $\frac{\bar{\omega}}{A\delta}$ Siemens

1) O. Frölich, Lehre von der Electricität und dem Magnetismus, p. 448. 1878.

betragen; nach Abzug der übrigen Widerstände[1]) verbleibe für die Röhre allein W. Da dieselbe mit Quecksilber gefüllt einen Widerstand R besitzt, ist der specifische Widerstand des Wassers auf Quecksilber bezogen

$$\tau = \frac{W}{R}$$

woraus dann der absolute specifische Widerstand in electrostatischem Maasse folgt:

$$\sigma = \tau \,.\, 1{,}1704 \,.\, 10^{-16}.$$

Es bleibt noch zu bemerken, dass an A eine kleine Correction von meistens $-0{,}6$ Scalentheilen wegen der Nebenschliessung durch das hölzerne Fussbrett des Depolarisators angebracht wurde.

Die Röhre wurde mit Hülfe von ungeschwefelten, sorgfältig gereinigten Gummischlauchstücken wasserdicht in seitlichen Löchern zweier Glasgefässe befestigt. Dieser Apparat blieb stets mit destillirtem Wasser gefüllt, vor jedem Versuche wurde er mit dem zu untersuchenden Wasser zuerst ausgespült und dann gefüllt. Die Temperatur, welche von der Lufttemperatur nur wenig abwich, wurde bestimmt. Die platinirten ebenen Platinelectroden wurden an die Enden der Röhre angedrückt.

Weiter unten werde ich zeigen, dass die Anwendung des Depolisators zu Widerstandsmessungen zwei verschiedene Fehlerquellen mit sich führt; aus einer Discussion derselben geht aber hervor, dass sie bei allen hier mitgetheilten Versuchen einen merklichen Einfluss nicht gehabt haben können.

Man hat hierfür ein directes Kriterium, indem nämlich weder bei der Bestimmung des Depolarisatorfactors, noch bei Einschaltung der Flüssigkeit eine Veränderung der Drehungsgeschwindigkeit eine Zu- oder Abnahme der Ablenkung zur Folge haben darf.

In der That stieg nun durch Verdoppelung der Drehungsgeschwindigkeit (von 120 auf 240 Stromwechsel in der

---

1) Stets fast genau 4000 Siemens.

Secunde) bei einem Vorversuche zur Ermittelung von δ die Ablenkung von 134,72 auf 134,75, und bei einer Messung mit destillirtem Wasser von 43,07 auf 43,25. Aehnliche Resultate wurden oft erhalten.

Zur Prüfung des Verfahrens wurde der specifische Widerstand einer verdünnten Kochsalzlösung und einer concentrirten Bittersalzlösung nach demselben bestimmt, nur mit der Abänderung, dass eine Röhre mit dem Quecksilberwiderstande 0,019666 gewählt, und bei allen Beobachtungen eine Rolle mit 775 Windungen benutzt wurde.

20. August 1879.

	Spec. Gew.	Temp.	δ	ω	A	$\frac{\omega}{A\delta}$	W
NaCl	1,0345 bei 17,3°	20,80	2,092	$2,3828 . 10^6$	358,3	3171	3071
$MgSO_4$	1,1880 bei 21,0°	21,07	2,082	$2,3836 . 10^6$	279,3	4098	3998

Hieraus folgt die Leitungsfähigkeit k bezogen auf Quecksilber:

	$k\,10^8$ beob.	ber.	Diff.	in Proc.
NaCl-Lösung	640,3	661,5	21,2	3,2
$MgSO_4$-Lösung	491,8	492,5	0,7	0,2

Die berechneten Werthe sind nach den Daten von Hrn. Kohlrausch[1]) erhalten, die beobachteten weichen von ihnen nur unbedeutend ab.

Bei der Kochsalzlösung ist vielleicht noch ein kleiner Rest von Polarisation geblieben; bei den Versuchen mit destillirtem Wasser ist ihr Einfluss wegen der (4 mal) grössern Electrodenfläche und der geringen Stromstärke jedenfalls viel unbedeutender, wie auch vergleichende Versuche mit blanken und platinirten Platinelectroden für Kochsalzlösung und Wasser zeigten.

Gegen die angewandte Methode der Widerstandsbestimmung könnte man ferner den Einwand erheben, dass

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. **154.** p. 217. 1875. Wied. Ann. **6.** p. 50. 1879.

bei der eigentlichen Messung andere Galvanometerrollen benutzt wurden, als bei der Ermittelung des Depolarisatorfactors, woher ein Fehler infolge der Verschiedenheit der Extraströme im Galvanometer entstehen könnte.

Zur Schätzung des Einflusses dieser Fehlerquelle bestimmte ich den Widerstand von drei Wasserproben einmal (I) genau wie oben angegeben, dann aber (II) unter Benutzung derselben beiden Rollen mit geringem Widerstande für alle Operationen; um eine genügende Ablenkung nach Einschaltung der Wasserröhre zu erzielen, musste das Galvanometer astasirt und die electromotorische Kraft bedeutend gesteigert werden (5 Chromsäureelemente). Ich erhielt:

27. und 28. August 1879.

	Temp.	δ	ω	A	W	σ	σ reduc.
I	21,17	2,073	$2{,}4184 \cdot 10^8$	60,57	$1{,}9219 \cdot 10^6$	$8{,}256 \cdot 10^{-8}$	—
II	21,32	2,063	$7{,}4497 \cdot 10^7$	19,25	$1{,}8864 \cdot 10^6$	$8{,}104 \cdot 10^{-8}$	$8{,}133 \cdot 10^{-8}$
I	20,92	2,078	$2{,}4076 \cdot 10^8$	60,36	$1{,}9151 \cdot 10^6$	$8{,}227 \cdot 10^{-8}$	$8{,}219 \cdot 10^{-8}$
II	20,96	2,062	$7{,}2732 \cdot 10^7$	18,58	$1{,}8984 \cdot 10^6$	$8{,}155 \cdot 10^{-8}$	—
I	20,77	2,078	$2{,}4076 \cdot 10^8$	72,35	$1{,}5970 \cdot 10^6$	$6{,}860 \cdot 10^{-8}$	$6{,}837 \cdot 10^{-8}$
II	20,91	2,062	$7{,}2732 \cdot 10^7$	22,68	$1{,}5552 \cdot 10^6$	$6{,}681 \cdot 10^{-8}$	—

Die Untersuchungen von Hrn. Kohlrausch[1]) zeigen, dass die Temperaturcoefficienten des Leitungsvermögens für sehr verdünnte Lösungen — und destillirtes Wasser ist diesen zuzurechnen — sich wenig von dem für die Reibung unterscheiden, daher habe ich oben, wie im Folgenden zur Reduction des Widerstandes den Temperaturcoëfficienten der Reibung benutzt.[2])

Die Messungen I ergaben somit den Widerstand um 1,49, 2,28, 0,78, im Mittel 1,52 Proc. grösser als II. Da diese geringe Abweichung in dem Sinne liegt, wie der Einfluss der Extraströme bei I es erwarten lässt, so habe ich

1) Kohlrausch, Wied. Ann. **6.** p. 193. 1879.

2) Demnach hat man in der Formel (11^{b1}) k^2 für diejenige Temperatur zu nehmen, bei der σ bestimmt wurde. Beide Temperaturen waren stets nur wenig verschieden.

sämmtliche nach I erhaltenen Widerstände um 1,52 Proc. verringert.

9. Das Wasser, mit dem die electromotorische Kraft im April 1879 bestimmt wurde, war zu gleichen Theilen 2 Ballons entnommen, von deren Inhalt im August noch der grösste Theil unvermischt übrig war. Am 8. August 1879 erhielt ich für diese:

$$\sigma = 6{,}280 \,.\, 10^{-8}, \text{ resp. } 9{,}680 \,.\, 10^{-8}.$$

Schätzt man für die Beobachtungen vom 23. April 1879 den Widerstand dem Mittel gleich: $7{,}980 \,.\, 10^{-8}$, so ergeben nach (11b′) die Röhren 40, 41, 42[1]) frisch für $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ 3,750, gereinigt 3,600.

Da dieser Werth nur als eine vorläufige Näherung angesehen werden konnte, machte ich zur Ermittelung von $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ noch neue Beobachtungen mit 2 Sorten von Wasser, wo stets sofort nach Messung der electromotorischen Kraft eine Bestimmung des Widerstandes folgte.

In nachstehender Tabelle sind alle Widerstandsmessungen vereinigt.

Dat.	Temp.	δ	$\omega \,.\, 10^{-8}$	A	$W.10^{-6}$	$\sigma \,.\, 10^{8}$	$\frac{1}{r} \,.\, 10^{9}$
14 8. 79. *)	21,00	2,111	2,371	101,80	1,0995	4,653	2,515
14 8. 79.**)	21,10	2,084	2,483	107,62	1,1030	4,668	2,507
15/8. 79.	21,26	2,091	2,367	101,85	1,1073	4,685	2,498
21/8. 79.	20,86	2,080	2,445	103,42	1,1323	4,791	2,443
23/8. 79.	21,12	2,085	2,413	100,96	1,1425	4,834	2,421
24/8. 79,	21,21	2,101	2,410	100,76	1,1345	4,801	2,438
27 8. 79.	21,17	2,073	2,415	60,57	1,9195	8,123	1,441
28 8. 79.	20,92	2,062	2,408	60,36	1,9150	8,104	1,444

*) Vormittags. **) Nachmittags.

Die Ablenkungen A sind schon wegen der Nebenschliessung durch den Fuss des Depolarisators corrigirt, ebenso ist bei W bereits der Widerstand ausser der Röhre (4000 S.-E.) in Abzug gebracht. Die letzte Columne enthält die Leitungsfähigkeit auf Quecksilber bezogen. Zur

1) S. oben p. 526.

Vergleichung sei daran erinnert, dass Hr. Kohlrausch[1]) dieselbe für ein mit Benutzung eines Platinkühlers destillirtes Wasser $= 0,71 . 10^{-10}$ fand, dass sie aber durch blosse Berührung mit der Luft in 44 Tagen bei einer andern Probe von $0,78 . 10^{-10}$ auf $30 . 10^{-10}$ stieg.

Auffällig könnte die wenn auch geringe Zunahme des Widerstandes für die späteren Beobachtungen bei der ersten Füllung des Ballons erscheinen, doch erklärt sich dieselbe leicht daraus, dass die tieferen Schichten geringe, trotz der sorgfältigen Reinigung noch übrig gebliebene Unreinheiten vom Boden des Ballons aufnahmen, wodurch ihre Leitungsfähigkeit gegen die oberen steigen musste.

Von den Electrometerbeobachtungen folgen diejenigen, welche ich für die zuverlässigsten halte. Die angegebenen electromotorischen Kräfte sind gemessen, nachdem der Wasserstrom etwa 1 Minute gedauert hatte. Bei der ersten Füllung betrug die Abnahme derselben in 10 Minuten Strömung 5 bis 10, für die zweite Füllung nur 1 bis 3 Proc. Die Röhren waren gereinigt.[2]) Es bedeutet d die Ablenkung für 1 Daniell (mit $ZnSO_4$)[3]), p den Druck, A die Ablenkung des Electrometers bei strömendem Wasser, E_{1000} die auf $p = 1000$ reducirte electromotorische Kraft in d, $\mu = \varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$, berechnet nach Formel (11b'), ist bereits durch Multiplication mit 0,9282 auf Normaldaniell zurückgeführt.

Dat.	d	Röhre	p	A	E_{1000}	$\sigma . 10^8$	μ	Mittel
14/8. 79	140,0	41	887	262,4	2,113	4,653	3,926	4,002 ± 0,078
	—	42	849	248,9	2,094	—	3,890	
15/8. 79	120,0	42	995	267,4	2,240	4,685	4,105	
	—	41	990	265,6	2,235	—	4,096	
21/8. 79	135,0	41	999	297,8	2,210	4,791	3,995	
27/8. 79	66,0	41	1010	253,4	3,695	8,123	3,915	3,869
	—	43	1004	245,9	3,607	—	3,822	± 0,046

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 7 u. 9. 1876.

2) S. oben p. 524.

3) S. oben p. 516.

Die hier erhaltenen Werthe des „electrischen Momentes“ $\mu = \varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ für Wasser und Glas, nämlich 4,002, resp. 3,869 Daniell, weichen nur um 3 Proc. ab, obwohl das Wasser der zweiten Füllung nahe den doppelten Widerstand hatte, und ihr Mittel,

3,936 Daniell,

ist in guter Uebereinstimmung mit dem Werthe 3,9346, welchen Hr. Helmholtz[1]) aus den Beobachtungen des Hrn. Quincke über Fortführung des Wassers in Capillarröhren durch den electrischen Strom berechnet.

Es möge noch hinzugefügt werden, dass der kleinste Werth, den $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ nach einer 10 Minuten langen Dauer des Wasserstromes annahm, für die erste Füllung 3,650, für die zweite 3,712 betrug.

10. Mit dem Wasser der ersten Füllung habe ich ferner einige vergleichende Versuche für die Röhren 21 und 22′ gemacht, welche sich sehr weit von Poiseuille's Gesetz entfernen. Um auch hier eine Ableitung von der untern Electrode zu vermeiden, wurde das Auffangegefäss isolirt und so tief gestellt, dass sich der Wasserstrahl schon vor Erreichung desselben in Tropfen auflöste. Obwohl selbstverständlich die an die Erfüllung von Poiseuille's Gesetz gebundene Formel (11b′) hier nicht mehr gilt, berechne ich doch $\mu = \varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ nach derselben:

Dat.	d	Röhre	p	nach Minuten	A	E_{1000} (in d)	$\sigma \cdot 10^8$	μ
23/8. 79	130,0	43	1028	1,5	321,7	2,407	4,834	4,289
	—	—	—	10	305,6	2,287	—	4,076
	—	21	1007	1	170,3	1,301	—	2,319
24/8. 79	145,0	21	1000	1	206,7	1,426	4,801	2,553
	—	—	—	5	181,7	1,253	—	2,244
	—	22′	996	1	160,6	1,112	—	1,991

Man erkennt deutlich eine Abnahme mit der Röhrenweite; übrigens würde dieselbe noch geringer ausfallen,

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 361. 1879.

wenn man statt der am Manometer abgelesenen Druckhöhe die eigentlich einzuführende Druckdifferenz zwischen den Enden der Röhre einsetzen könnte.

Galvanometerversuche. — 11. Verbindet man die Electroden mit einem Galvanometer, dessen Widerstand sehr klein ist gegen den des Wassers in der Röhre, so gleicht sich die durch den Wasserstrom mitgeführte Electricität fast ausschliesslich durch das Galvanometer aus, und die Stromstärke wird in electrostatischem Maasse nach Hrn. Helmholtz[1]):

$$\mathfrak{J} = 2u(\varphi_i - \varphi_a), \tag{14d}$$

wo u die mittlere Geschwindigkeit des Wassers bedeutet.

Zur Gültigkeit dieser Formel ist wieder erforderlich, dass die Röhre bereits dem Poiseuille'schen Gesetze folgt; sollte eine Gleitung der Flüssigkeit an der Wand stattfinden, so würde man auch hier haben:

$$\mathfrak{J} = 2u\left(\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right). \tag{14d'}$$

Ich prüfte diese Formel durch Beobachtungen mit dem Wasser der ersten Füllung an der Röhre 41, welche der obigen Bedingung nahezu genügt, und fügte noch einige Messungen an 21 und 22′ der Vergleichung wegen hinzu.

Am 26. August 1879 wurde zunächst die Empfindlichkeit des Plath'schen Galvanometers bestimmt, es war:

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{1{,}377 \,.\, 10^9} \frac{\text{Meidinger}}{\text{Siemens}}.$$

Da das Meidinger'sche Element mit Hülfe des Electrometers = 0,9360 Normaldaniell gefunden war, so ist:

$$1 \text{ mm Ablenkung} = \frac{0{,}9360}{1{,}377 \,.\, 10^9} \cdot \frac{\text{Daniell}}{\text{Siemens}}.$$

Ferner ist nach Hrn. Kohlrausch[2]) 1 Daniell = 11,71 Siemens. Weber, und somit:

$$1 \text{ mm Ablenkung} = \frac{0{,}9360 \,.\, 11{,}71}{1{,}377 \,.\, 10^9} \text{ Weber'sche abs. Stromeinh.,}$$

1) Helmholtz, Wied. Ann. **7.** p. 380. 1879.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. **141.** p. 458. 1870.

denen:

$$\frac{0,9360 \,.\, 11,71 \,.\, 28,565 \,.\, 10^{10}}{1,377 \,.\, 10^{9}} = 2274 \text{ electrost. Einh. entsprechen.}$$

Der Querschnitt von 41 ist 0,1653 qmm; für einen Druck von 994 wurde in 1 Sec. das Ausflussvolumen beobachtet 289,1 cmm, woraus $u = 1749$ und auf den bei der eigentlichen Beobachtung herrschenden Druck von 993 mm reducirt = 1747 mm/Secunde sich ergibt.

Die Leitung von den Electroden zu den in Ebonit eingelassenen Klemmschrauben des Galvanometers wurde nur über Siegellackstützen geführt, sodass eine Störung durch Nebenschliessungen und fremde electromotorische Kräfte ausgeschlossen war. Die Ablenkungen von dem Stande für ruhendes Wasser aus gerechnet, waren nach Oeffnung des Hahnes:

3,1 3,0 2,75 2,6 mm[1]),

woraus die Werthe von $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ folgen:

2,02	1,95	1,79	1,69	electrostat. Einh.
= 5,15	4,99	4,57	4,32	Daniell.

Die Ablenkung durch 2 Meidinger, die mit Galvanometer und Röhre zu einem Stromkreise verbunden waren, betrug 2,28 mm; wie später gezeigt werden wird, lässt sich mit Benutzung hiervon die früher mit E_{1000} bezeichnete electromotorische Kraft und weiter aus dieser $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ nach (11b') berechnen. Ich erhielt so:

4,95 4,79 4,39 4,15 Daniell.

Man erkennt bei näherer Betrachtung, dass zu einer vollen Uebereinstimmung der nach (11b') und (14d') berechneten Resultate die strenge Erfüllung des Poiseuille'schen Gesetzes und die Richtigkeit des benutzten Werthes von σ erfordert wird.

Da sich später zeigen wird, dass die Nichterfüllung des Poiseuille'schen Gesetzes ein sehr starkes Anwachsen

1) Eine Correction wegen der Polarisation ist hier nicht erforderlich.

der nach (14d') berechneten electrischen Momente zur Folge hat, so schreibe ich die obige kleine Differenz einer geringen Abweichung von demselben zu.

Auch von dem aus Electrometerbeobachtungen gefundenen Werthe von $\varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N}$ (4,002 Daniell) für die erste Füllung weicht der hier erhaltene Werth (5,15 bis 4,32) nicht mehr ab, als man bei den geringen Ablenkungen des Galvanometers erwarten durfte, und man kann daher diese Versuche als eine Bestätigung der Formel (14d') ansehen.

Am Tage vorher war eine Beobachtung mit derselben Röhre 41 ohne besondere Vorsichtsmassregeln zur Isolation gemacht; ich erhielt nach Formel (14d') die mit den vorigen nahe übereinstimmenden Werthe des electrischen Momentes: 4,93, 4,85 und 4,68 Daniell.

Das Verhalten weiterer Röhren ist aus folgenden Beobachtungen ersichtlich:

25. August 1879. 1 mm Abl. $= \frac{1}{1{,}340 \,.\, 10^9} \frac{\text{Meid.}}{\text{Siem.}}$

Wasser der ersten Füllung.

Röhre	p	A beob.		A	u. beob.	μ ber.	reduc.
21	1014	38,9	reduc.	38,77	7342	15,81	—
	1012	34,0	auf $p =$	33,97	für $p =$	13,82	—
	1010	31,95	1011	31,98	1011	12,99	—
22'	1022	102,0		100,70	9605	31,28	33,29
	1010	95,15	auf $p =$	95,06	für $p =$	29,53	31,42
	997	92,75	1009	93,87	1009	29,16	31,00

Hierin ist die Reduction der Ablenkungen A unter Annahme der Proportionalität mit p gemacht. Die A sind mit Polarisation behaftet, und die 7. Columne enthält die mit ihnen berechneten Werthe des electrischen Momentes. Da ferner der specifische Widerstand des Wassers ($4{,}801 \,.\, 10^{-8}$ in electrostatischem Maasse, $4{,}102 \,.\, 10^{8}$ bezogen auf Quecksilber), sowie die Dimensionen der Röhren bekannt waren, so liess sich diejenige Ablenkung berechnen, welche ohne Polarisation durch 1 Meidinger erzeugt wäre, und es er-

gab sich so 22,06 für 21 und 84,04 für 22′ [1]), die beobachteten Ablenkungen waren 22,33 resp. 79,00. Bei 21 ist letztere sogar etwas grösser, was zunächst auf einen verschwindenden Einfluss der Polarisation während der 20 Secunden des Stromschlusses bei dieser Röhre schliessen lässt.

In der That nahm in 80 Secunden die Ablenkung nur um $0{,}5 = 2^1/_2$ Proc. ab, und die Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten [2]) Ablenkung ist eine Bestätigung für die Genauigkeit der Widerstandsbestimmung. Für 22′ beträgt die Polarisation 6,38 Proc. der beobachteten und μ reducirt ist aus der vorhergehenden Columne durch Vergrösserung um denselben Betrag erhalten.[3])

Die so gefundenen Werthe zeigen eine sehr bedeutende Zunahme mit wachsender Abweichung vom Poiseuille'schen Gesetze und sind etwa derselben Ordnung wie diejenigen, welche Hr. Helmholtz aus den Beobachtungen von Hrn. Edlund erhält.[4])

Benutzt man die gemessenen Ablenkungen durch 1 Meidinger um E_{1000}, und dann $\varphi_i - \varphi_a + l\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ nach (11d′) zu berechnen, so ergibt sich:

Röhre 21	:	3,102	2,716	2,558
22′	:	2,281	2,153	2,126

nahe entsprechend den oben [5]) aus den Electrometerbeobachtungen hergeleiteten Werthen.

Ich brauche wohl kaum besonders hervorzuheben, dass die hier mitgetheilten Berechnungen des electrischen Momentes nur den Zweck haben, die Abweichungen für weitere Röhren zu zeigen, und nicht etwa als Bestimmungen dieser Grösse anzusehen sind.

---

1) Auch auf die Temperatur ist Rücksicht genommen.

2) Das Ueberwiegen derselben ist vielleicht auf Bildung von Glaslösung zurückzuführen.

3) Ueber die Berechtigung hierzu s. Wied. Ann. **5.** p. 16. 1878.

4) Edlund, Wied. Ann. **7.** p. 382. 1879.

5) s. o. p. 537.

12. Ich gehe nun zu denjenigen Versuchen über, welche für weitere Röhren experimentell das Gesetz feststellen sollten, nach dem für eine gleiche mittlere Geschwindigkeit des Wassers die electromotorische Kraft vom Querschnitt abhängt.

Die angewandte Methode habe ich bereits mitgetheilt.[1]) Sie beruht auf den (schon von Hrn. Edlund gemachten) Voraussetzungen, deren Zulässigkeit a. a. O. gezeigt ist, dass: 1) für die hier in Betracht kommenden schwachen Ströme die Polarisation der Stromstärke proportional, und 2) dieselbe für ruhendes wie für strömendes Wasser ist.

Das mit der Röhre zu einem Stromkreise verbundene Galvanometer beschreibe nach Oeffnen des Wasserhahnes einen Bogen entsprechend A Scalentheilen, nach dem Wiederschliessen desselben rückwärts A', ferner nach Einschaltung eines Daniell in denselben Stromkreis i_2, nach Wiederausschaltung i'_2, so wird die electromotorische Kraft in Daniells:

$$E = \frac{A}{i_2} = \frac{A'}{i'_2}.$$

Aus der von Hrn. Helmholtz entwickelten Theorie erkennt man ohne Schwierigkeit, dass unter obigen Voraussetzungen dieser Werth der electromotorischen Kraft identisch wird mit demjenigen, den ein Electrometer gegeben hätte.[2])

---

1) Dorn, Wied. Ann. **5.** p. 23 ff. 1878.

2) Der Wasserstrom führe in der Zeiteinheit eine electrostatisch gemessene Electricitätsmenge e_0 durch den Querschnitt. Sind die Electroden mit einem Electrometer verbunden, so steigert sich die Potentialdifferenz derselben. Ist dieselbe E, so treibt sie rückwärts durch den Querschnitt in der Zeiteinheit die Electricitätsmenge:

$$e_1 = \frac{E \cdot Q}{\sigma \cdot L},$$

und der Zustand wird stationär, wenn $e_0 = e_1$, also ergibt eine Electrometermessung:

$$E = \frac{e_0\,\sigma\,L}{Q} = \text{electrostat. Einh.} = \frac{e_0\,\sigma\,L}{Q\,\Delta}\ \text{D., wenn 1 D.} = \Delta\ \text{electst. Einh.}$$

Wird andererseits ein Galvanometer von hinreichend geringem Widerstand benutzt, so fliesst e_0 durch dasselbe ab. Die entstehende

13. Da es mir nicht gelang, eine einfache Beziehung zwischen der Ausflussgeschwindigkeit und der Stromstärke (resp. electromot. Kraft) aufzufinden, so schlug ich zur Reduction aller Beobachtungen auf eine bestimmte Geschwindigkeit ($\mathfrak{u} = 8$ m/Secunde) einen indirecten Weg ein. Ich beobachtete für mehrere Drucke die Ausflussmenge, welche durch den Querschnitt dividirt die Geschwindigkeit ergibt, berechnete hiernach eine Interpolationsformel:

$$p = x\mathfrak{u} + y\mathfrak{u}^2,$$

welche den zu $\mathfrak{u} = 8$ m/Secunde gehörigen Druck p_8 zu bestimmen erlaubte, und reducirte die bei anderen Drucken erhaltenen electromotorischen Kräfte auf p_8 unter der Annahme der Proportionalität.

Auf die Bedenken, welche Hr. Edlund gegen die letztere Voraussetzung erhebt[1]), komme ich später zurück; innerhalb des hier erforderlichen Bereiches habe ich die Proportionalität von Druck und electromotorischer Kraft bis auf Bruchtheile eines Procentes nachgewiesen.[2])

Bei den Beobachtungen der Ausflussmenge wurde der Hahn geöffnet, das Auffangegefäss mit einem Secundenschlage untergeschoben und wieder vorgezogen, und dann erst der Hahn geschlossen, wodurch man nur mit der stationären Strömung operirt und die Unregelmässigkeiten derselben beim Oeffnen und Schliessen des Hahnes vermeidet.

Für die Röhren 1 bis 16 wurden die Constanten x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate aus 5

Polarisation schwäche den Strom im Verhältnisse $1 : 1 - f$, so wird, wenn einer electrostatischen Stromeinheit γ Scalentheile entsprechen, die Ablenkung sein:

$$A = e_0 (1 - f) \gamma .$$

Die Ablenkung durch ein Daniell wird:

$$i_2 = \frac{\Delta Q (1 - f) \gamma}{\sigma L}, \qquad \text{woher:} \qquad \frac{A}{i_2} = \frac{e_0 \sigma L}{Q \Delta} \text{ Daniell}$$

mit dem Obigen übereinstimmend.

1) Edlund, Wied. Ann. 8. p. 121. 1879.

2) Dorn, Wied. Ann. 5. p. 34 u. 35. 1878.

bis 7 Beobachtungen für sehr verschiedene p (meistens ca. 300 bis 1300 mm) berechnet; der mittlere Fehler von p war:

für	1[1])	2	10	11	12	13	15	15′	16
in Proc.:	1,3	0,4	0,2	0,25	0,8	0,4	1,0	0,5	1,6,

sodass jedenfalls p_8 nur mit einer geringen Unsicherheit behaftet ist.

Später habe ich mich begnügt, x und y aus zwei Beobachtungen für solche Drucke abzuleiten, zwischen denen p_8 liegt.

In folgender Tabelle sind die x, y und p_8 angegeben und der bequemern Uebersicht wegen Länge und Querschnitt der Röhren beigefügt.

Röhre	Länge	Querschn.	x	y	p_8
	mm	qmm			
1	331,0	18,358	31,87	15,84	1268,6
2	217,5	12,182	25,54	13,92	1095,0
7	68,0	4,786	—	—	659,0*
10	100,0	2,757	23,08	7,813	684,7
11	49,7	2,757	11,82	6,337	500,1
12	99,9	0,8376	22,98	14,52	1113,1
13	49,7	0,8376	20,14	8,594	711,2
15	100,55	4,767	18,68	7,235	612,6
15′	149,7	4,757	22,08	8,283	706,8
16	300,15	13,492	27,42	11,75	971,3
21	100,97	0,6820	24,99	15,82	1212,4
22	150,92	3,9022	23,95	8,488	734,9
22′	150,9	3,9372	25,00	8,747	759,8
23	304,31	7,6605	25,27	10,67	885,3
24	502,29	13,2866	51,72	9,074	994,5

* Durch eine directe Interpolation aus den Beobachtungen erhalten.

Ich erinnere daran, dass die Röhren 1—16 verschieden, 21—24 aber aus einem Hafen gezogen waren.

Für einige der Röhren berechnete ich aus obigen Formeln noch den Druck für 3, 5, 10 m/Secunde, der freilich mehrfach ausserhalb der Beobachtungen liegt, die zur Bestimmung von x und y dienten.

1) Ich wähle hier arabische Ziffern für die Röhren.

Röhre	p_3	p_5	p_{10}
12	199,7	477,9	1681,8
10	139,6	310,9	1012,1
15	121,1	274,3	910,3
2	201,9	475,6	1647,2
1	238,1	555,3	1902,4

Die Quotienten: $\frac{p_5}{p_3}$, $\frac{p_8}{p_5}$, $\frac{p_{10}}{p_5}$ weichen von ihren Mittelwerthen 2,326, 2,270, 3,397 nur um resp. 3, 2 und 3 Proc. ab, und es werden daher die electromotorischen Kräfte (und Stromstärken), welche die verschiedenen Röhren für $u = 3, 5, 10$ ergeben, denen für $u = 8$ nahe proportional sein, sodass ein für letztern Werth erlangtes Resultat zugleich für ein ziemliches Intervall gültig bleibt.

14. In folgender Tabelle ist eine Anzahl meiner Beobachtungen vereinigt und zugleich in eine Form gebracht, welche ihre Vergleichung erleichtert.

A resp. A' ist die Ablenkung des Galvanometers durch den Wasserstrom, i_2, i_2' durch 1 Daniell (mit $ZnSO_4$), wenn zugleich die Röhre im Stromkreise war. E_{1000} [1]), E_8 sind die electromotorischen Kräfte für $p = 1000$ resp. $= p_8$, und E_8 entspricht somit einer bestimmten Geschwindigkeit, $u = 8$ m/Sec. des Wasserstroms.

Die zu E_8 gehörige Stromstärke würde sein (und zwar von der Polarisation befreit): $\frac{E_8 Q}{L \sigma}$, wo Q Querschnitt, L Länge der Röhre, σ der specifische Widerstand des Wassers.

Die unter $\frac{E_8 Q 100}{L}$ angegebenen Grössen unterscheiden sich hiervon nur durch den Factor 100σ und sind also bei Versuchen mit verschiedenen Röhren, aber demselben Wasser der Stromstärke proportional.

Um Versuche mit einer andern Wassersorte hiermit vergleichbar zu machen, sind die Mittel der $\frac{E_8 Q 100}{L}$ für die beiden Versuchsreihen gemeinsamen Röhren berechnet und

1) Berechnet nach $\frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{p} \left(\frac{A}{i_2} + \frac{A'}{i_2'}\right)$ oder auch $\frac{1000}{p} \frac{A + A'}{i_2 + i_2'}$.

die Resultate der zweiten mit ihrem Quotienten f multiplicirt. Wo keine Röhren gemeinsam waren, ist eine graphische Interpolation ausgeführt. Die zwischen zwei Strichen stehenden Versuche beziehen sich auf Wasser derselben Füllung; auf jede der angegebenen Messungen folgten im Laufe weniger Minuten noch mehrere, die ich nicht mittheile.

Die Röhre II hatte meistens Goldelectroden, die übrigen Platinelectroden, und zwar sind dieselben bei den späteren Versuchen grösser gewählt.

Röhren von verschiedenem Glase.

A. Gereinigt mit Ammoniak, kalter Schwefelsäure[1]) und kaltem Wasser, nicht getrocknet.

Dat.	Röhre	p	A	A'	i_2	i_2'	E_{1000}	E_8	$\frac{E_8 Q \cdot 100}{L}$	f	$f\frac{E_8 Q \cdot 100}{L}$
15 3. 78.	13	1247	41,1	41,8	31,8	32,4	1,035	0,736	1,240	1,194	1,480
	11	1249	98.1	100.1	97,5	98,4	1,172	0,586	3,252	—	(3,881)
	2	1197	85,0	88,15	99,3	102,6	0,810	0,887	4,967	—	5,929
	1	1205	91,1	92.75	105,9	108,0	0,717	0,910	5.045	—	6.023
	10	1249	79,0	80,15	53,7	55,0	0.713	0,488	1,346	—	(1,606)
18 3. 78.	13	1241	42,75	42,78	33,2	33.25	1.038	0,738	1,243	1,360	1,692
	10	1252	72,67	73,7	53,25	54,05	1.893	0,746	2,056	—	2,797
	2	1236	87,67	90,13	102,45	104,55	0,695	0,761	4,261	—	5,797
	1	1218	85,3	87,2	108,6	110,4	0,646	0,819	4,543	—	6,180
	7	1242	90,33	97,17	121,1	129,1	0,601	0,396	2,788	—	3,793
30 3. 78.	12	1152	28,17	28,24	20,19	20,31	1,209	1,346	1,128	1,600	1,805
	10	1214	74,5	76,05	62,42	63,77	0,981	0,672	1,852	—	2,963
	15	1159	96,43	96,97	105,50	107,05	0,785	0,481	2,279	—	3,647
	2	1121	72,17	75,92	117,82	123,52	0,548	0,600	3,358	—	5,373
	1	1162	86,65	88,70	128,55	131,85	0,580	0,735	4,077	—	6,522
3 4. 78.	12	1254	32,95	32,90	13,67	13,90	1,904	2,119	1,777	1,000	1,777
	10	1238	78,80	79,43	40,33	40,70	1,577	1,080	2,977	—	2,977
	15	1240	105,93	106,57	69,07	69,00	1,241	0,760	3,604	—	3,604
	2	1155	81,53	83,93	79,00	81,93	0,890	0,974	5,456	—	5,456
	1	1190	93,25	93,90	84,85	85,60	0,923	1,171	6,494	—	6,494

Die Werthe von p, A, A' sind hier die Mittel von 2—5 Beobachtungen. Die aus den einzelnen Beobachtungen berechneten E_{1000} zeigten eine langsame Abnahme.

1) Hier wie in allen anderen Fällen waren einige Tropfen HNO_3 zugesetzt.

B. Gereinigt mit heisser Schwefelsäure, kaltem Wasser; nicht getrocknet. Angegeben ist die erste Beobachtung, die folgenden zeigten eine ziemlich schnelle Abnahme der electromotorischen Kraft.

Dat.	Röhre	p	A	A'	i_2	i'_2	E_{1000}	E_s	$\frac{E_s Q.100}{L}$	f	$f\frac{E_s Q.100}{L}$
19/4. 78.	12	1284	24.4	25,6	14,90	15.40	1,285	1.430	1.199	1,272	1,525
	10	1258	65,5	65,7	44,47	45,10	1,164	0,797	2,197	—	2,796
	15	1204	85,9	86.4	75,03	75,87	0,949	0,581	2,756	—	3,506
	2	1182	72,8	77,3	87,97	90,83	0,710	0,778	4,354	—	5,540
	1	1214	86,0	86,9	90,07	91,70	0,783	0,994	5,512	—	7,013
20/4. 78.	12	1337	28,2	28,6	15,00	15.27	1,420	1.581	1,325	1,209	1,602
	10	1310	76,5	77,8	44,73	45.20	1,310	0,897	2,472	—	2,988
	15	1254	114.4	115.9	75,07	76,07	1,215	0,744	3,529	—	4,265
	2	1190	79,3	80,1	92,30	94.20	0,718	0,787	4,405	—	5,324
	1	1194	79,5	80,4	91,13	92.53	0,729	0,925	5.130	—	6.200
22/4. 78.	12	1204	27.6	28,4	15,45	15.45	1,505	1.675	1,404	1,213	1.704
	10	1158	64.9	66.5	44,97	45,77	1,250	0,856	2,360	—	2,863
	15	1221	103,8	105,0	75,40	76,33	1,127	0,690	3,273	—	3,970
	2	1165	71,0	72,0	96,23	98,30	0,631	0,691	3,870	—	(4,695)
	1	1078	83,0	83,3	91,77	92,43	0,838	1,063	5,893	—	7.148
24/4. 78.	12	1333	26,1	26,6	15,67	15,77	1,258	1,400	1,173	1,292	1,516
	10	1283	62.7	63,5	46,20	46.73	1,059	0,725	1,998	—	2,583
	15	1287	113,8	115,0	77,77	78,83	1,135	0,695	3,296	—	4,260
	16	1356	104.3	105,9	74,27	75,57	1,035	1,005	4,516	—	5,837

C. Dünner Schellacküberzug.

In den ersten zwei Beobachtungsreihen Mittel, dann erste Beobachtungen. Langsame Abnahme.

Dat.	Röhre	p	A	A'	i_2	i'_2	E_{1000}	E_s	$\frac{E_s Q.100}{L}$	f	$f\frac{E_s Q.100}{L}$
6/4. 78.	10	1242	73,17	73,50	41,93	42.40	1,400	0,959	2,643	1,186	3,133
	15	1134	88.43	88,90	70,23	70.50	1,112	0,681	3,228	—	3,826
	2	1167	72,27	73,57	80,30	81,73	0,771	0,845	4,729	—	5,607
	1	1198	73,15	73,65	85,45	85,90	0,715	0,907	5,030	—	5,964
9/4. 78.	10	1213	69,23	70,23	39,73	40,20	1,438	0,985	2,715	1,157	3,140
	15	1209	95,90	96,83	67,13	67,67	1,183	0,725	3,435	—	3,974
	2	1165	70,53	71,30	79,43	80,33	0,762	0,834	4.673	—	5,406
	1	1173	71,75	71,05	82,55	82,40	0,738	0,936	5,193	—	6,008
30/4. 78.	12	1266	29,6	30,5	16,06	16,60	1,454	1,618	1.356	1,295	1,757
	10	1234	84,8	85,6	48.12	48,58	1,428	0,978	2.696	—	3,491
	15'	1225	88,7	88,9	56,37	56,93	1,280	0,905	2.874	—	3,722
	16	1221	94,0	96,2	78,13	79,73	0,987	0,959	4,309	—	5,581
1/5. 78.	12	1244	31,9	32,3	16,73	16,73	1,542	1,717	1,439	1,308	1,883
	10	1253	70,5	71,8	50,37	50,73	1,123	0,769	2,120	—	2,773
	15'	1218	90,0	90,2	58,53	58,93	1,260	0,890	2,829	—	3,702
	16	1223	95,3	97,2	81,43	83,23	0,958	0,931	4,184	—	5,474

Röhren aus demselben Hafen gezogen.

D. Gereinigt mit heisser Schwefelsäure, kaltem Wasser. Nicht getrocknet.

Erste Beobachtung angegeben; die folgenden zeigen bei 21 eine schnelle, sonst eine langsame Abnahme der electromotorischen Kraft.

Dat.	Röhre	p	A	A'	i_2	i'_2	E_{1000}	E_8	$\frac{E_8 Q.100}{L}$	f	$f\frac{E_8 Q.100}{L}$
16/10.78.	21	1252	25,7	25,6	10,65	10,65	1,924	2,332	1,575	0,5584	0,879
	22	1283	113,4	114,0	27,40	27,30	3,240	2,381	6,157	—	3,438
	23	1285	128,5	128,7	27,55	27,27	3,651	3,232	8,136	—	4,542
	24	1253	141,4	141,4	29,72	29,52	3,809	3,788	10,021	—	5,595
	21	1111	31,6	31,6	9,43	9,80	2,958	3,586	2,422	—	1,352
18/10.78.	21	1255	29,1	29,4	11,67	11,53	2,009	2,436	1,645	0,6370	1,048
	22	1225	102,9	103,2	30,17	29,93	2,799	2,057	5,319	—	3,388
	23	1223	114,7	115,3	29,97	29,43	3,166	2,803	7,055	—	4,494
	24	1192	128,5	128,9	31,40	31,40	3,439	3,420	9,047	—	5,762

Zwei fernere Beobachtungsreihen, wo 21 und 22 mehrmals abwechselnd beobachtet wurden, lieferten nahe dasselbe Verhältniss der electromotorischen Kräfte wie obige Beobachtungen im Mittel. (0,3213 gegen 0,3169.)

E. Reinigung mit heisser Schwefelsäure, heissem Wasser. Durch Hindurchsaugen von heisser Luft getrocknet.

Meistens langsame Abnahme der electromotorischen Kraft. Erste Beobachtung angegeben.

Dat.	Röhre	p	A	A'	i_2	i'_2	E_{1000}	E_8	$\frac{E_8 Q.100}{L}$	f	$f\frac{E_8 Q.100}{L}$
29/12.78.	21	1297	28,4	28,8	7,92	7,80	2,807	3,403	2,298	0,6857	1,576
	22'	1260	91,6	91,9	27,24	27,84	2,644	2,009	5,242	—	3,594
	23	1203	86,3	87,0	26,78	26,72	2,693	2,384	6,001	—	4,115
	24	1120	101,2	101,4	27,90	27,92	3,240	3,223	8,525	—	5,845
	21	1014	20,0	20,5	7,95	7,95	2,512	3,045	2,057	—	1,410
31/12.78.	21	1339	26,9	27,0	8,44	8,38	2,395	2,903	1,961	0,7698	1,510
	22'	1253	87,6	88,1	30,06	30,25	2,324	1,766	4,608	—	3,547
	23	1234	88,4	89,4	28,04	28,15	2,564	2,270	5,715	—	4,399
	24	1142	92,4	93,5	29,45	29,51	2,761	2,745	7,263	—	5,591

F. Reinigung mit schon benutzter heisser Schwefelsäure, heissem Wasser. Heisse Luft durchgesogen, während die Röhre mit einem Bunsenschen Brenner erwärmt.

Erste Beobachtung angegeben; die folgenden zeigen bei 21 eine geringe Abnahme, bei den anderen Röhren eine geringe Zunahme der electromotorischen Kraft.

Dat.	Röhre	p	A	A'	i_2	i'_2	E_{1000}	E_8	$\frac{E_8 Q.100}{L}$	f	$f\frac{E_8 Q.100}{L}$
4/1. 79.	21	1324	29,3	29,2	8,32	8,54	2,622	3,179	2,147	0,7718	1,657
	22'	1292	84,8	85,6	29,84	29,85	2,210	1,679	4,380	—	3,381
	23	1210	89,1	89,3	28,85	28,85	2,556	2,263	5,695	—	4,395
	24	1137	98,6	98,9	30,05	30,27	2,879	2,864	7,575	—	5,846

G. Reinigung mit frischer, heisser Schwefelsäure, heissem Wasser. Heisse Luft hindurchgesogen, während die Röhre mit einem Bunsen'schen Brenner erwärmt. Erste Beobachtung angegeben; electromotorische Kraft bleibt fast constant.

Dat.	Röhre	p	A	A'	i_2	i'_2	E_{1000}	E_8	$\frac{E_8 Q.100}{L}$	f	$f\frac{E_8 Q.100}{L}$
2/1. 79.	21	1262	17,7	18,1	8,77	9,00	1,652	2,002	1,352	0,9106	1,231
	22'	1221	63,2	63,7	29,77	29,90	1,742	1,324	3,454	—	3,145
	23	1158	72,9	73,2	28,60	28,74	2,200	1,948	4,903	—	4,465
	24	1066	82,0	82,4	29,89	29,99	2,576	2,562	6,778	—	6,171
6/1. 79.	21	1334	22,2	22,3	9,20	9,29	1,805	2,188	1,478	0,9771	1,444
	22'	1302	68,4	68,6	31,92	31,97	1,647	1,252	3,226	—	3,192
	23	1226	78,9	79,4	31,23	31,41	2,061	1,825	4,593	—	4,489
	24	1121	82,8	83,1	32,32	32,55	2,282	2,269	6,003	—	5,867

Die Schellacküberzüge waren ausserordentlich dünn. So wurde der Radius der Röhre 12 zweimal nach Anbringung eines solchen bestimmt und 0,51566, resp. 0,51563 gefunden, während er bei reiner Glaswand 0,5165 betragen hatte, sodass die Dicke des Ueberzuges 0,001 mm nicht erreichte.

Das Wasser haftete an dem Schellack nicht gleich gut, wie an der gereinigten Glaswand, doch beeinflusste dies die Wassergeschwindigkeit auch bei den engsten der hier benutzten Röhren nur unerheblich, da wiederholte Ausflussversuche bei 12 und 10 nur Differenzen von 1 bis $1^1/_2$ Proc. zwischen dem beobachteten und berechneten Drucke gaben, welche zudem noch in verschiedenem Sinne

lagen. Die Beobachtungen C sind daher mit denselben Constanten berechnet wie A und B.

Trotz der grössten Sorgfalt gelingt es doch nicht, geringe Verschiedenheiten der Röhrenwände ganz auszuschliessen, und diese machen sich bei diesen Erscheinungen sofort mehr bemerklich, als bei irgend welchen anderen, wie man auch nach den Bemerkungen von Hrn. Helmholtz erwarten darf.[1])

Der Einfluss solcher Zufälligkeiten geht erst aus der Combination vieler Beobachtungen heraus; die obigen ergeben im Mittel folgende der von der Polarisation befreiten Stromstärke bei $u = 8$ proportionalen Grössen.

Röhre	A	B	C
12	1,791 ± 0,014	1,587 ± 0,066	1,820 ± 0,063
13	1,586 ± 0,106	—	—
10	2,912 ± 0,077	2,807 ± 0,117	3,134 ± 0,181
15	3,626 ± 0,021	4,000 ± 0,212	3,900 ± 0,074
15'	—	—	3,712 ± 0,010
7	3,793	—	—
2	5,639 ± 0,224	5,432 ± 0.108	5,507 ± 0,101
16	—	5,837	5,528 ± 0,054
1	6,305 ± 0,203	6,787 ± 0,391	5,986 ± 0,022

Röhre	D	E	F	G
21	1,093 ± 0,173	1,543 ± 0,033	1,657	1,338 ± 0,107
22	3,413 ± 0,025	—	—	—
22'	—	3,571 ± 0,023	3,381	3,169 ± 0,023
23	4,518 ± 0,024	4,257 ± 0,142	4,395	4.477 ± 0,012
24	5,679 ± 0,084	5,718 ± 0,127	5,846	6.019 ± 0,152

In Taf. III A Fig. 2 sind als Abscissen die Durchmesser der Röhren, als Ordinaten obige Grössen aufgetragen und zwar sind die Ordinaten bei B und E um 1, bei C und F um 2, bei G um 3 vergrössert.

Trotz der sehr verschiedenen Behandlungsweise der Röhren sind sämmtliche Curven wenig abweichend von Geraden, die durch den Coordinatenanfang gehen, sodass hiernach bei gleicher mittlerer Geschwindigkeit des

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 344. 1879.

Wasserstroms für weitere Röhren die Stromstärke nahe proportional dem Durchmesser ist, und also die electromotorische Kraft demselben umgekehrt proportional.

Die Beobachtungen G entsprechen diesem Gesetze sehr genau, denn die nach $1{,}4416 \, . \, d$ berechneten Werthe

1,343 — 3,228 — 4,502 — 5,930

weichen nur um 0,005 0,059 0,027 0,089,
also noch nicht um $1^1/_2$ Proc. im Mittel von den beobachteten ab.

In allen anderen Fällen bleiben die Stromstärken für weitere Röhren etwas zurück.

Obiges Resultat hat natürlich nur die Bedeutung eines empirischen Gesetzes[1]) für die bei obigen Versuchen vorhandenen Röhrendimensionen und Geschwindigkeiten; es galt schon nicht mehr für die Röhren 25—28 und noch weniger für eigentliche Capillaren.

Bei dem gegenwärtigen Stande der Hydrodynamik lässt sich die Theorie dieser Versuche für weitere Röhren nicht durchführen.

Die durch den Querschnitt in der Zeiteinheit geführte Electricitätsmenge wäre nämlich[2]):

$$\int \varepsilon \frac{\partial u}{\partial N} N ds dN,$$

und man kann $\frac{\partial u}{\partial N}$ nicht angeben.

Unter der für Röhren von grösserem Durchmesser, also geringer Krümmung der Wand, plausiblen Voraussetzung, dass bei gleicher mittlerer Geschwindigkeit die Verhältnisse in der Nähe der Wand bei Röhren verschiedener Weite doch annähernd dieselben sind (also $\frac{\partial u}{\partial N}$ dieselbe Function von N), ergibt

1) Ich erkannte seine annähernde Gültigkeit schon im Frühjahr 1878 und hierauf bezieht sich auch meine Andeutung Wied. Ann. **5.** p. 43. 1878. Das von Hrn. Haga für Capillaren vermuthete Gesetz gilt also nicht für diese, wohl aber für weitere Röhren.

2) Dorn, Wied. Ann. **7.** p. 370. 1879.

die Integration nach N ein vom Durchmesser unabhängiges Resultat und die Integration nach $s:\pi d$, sodass in der That die mitgeführte Electricitätsmenge d proportional wird.

Obige Betrachtung lässt zugleich die Bedingung für die Gültigkeit dieses Gesetzes erkennen und zeigt, dass es nur ein angenähertes sein kann.

(Schluss im nächsten Heft.)

II. *Thermische Theorie des galvanischen Stroms; von J. L. Hoorweg.*

1. In seiner bekannten Abhandlung über die thermoelectrischen Erscheinungen weist Clausius darauf hin, dass die Helmholtz'sche Theorie über das Auftreten eines Potentialunterschiedes[1]) zwischen zwei Metallen nicht im Stande ist, von den Peltier'schen Wirkungen Rechenschaft zu geben.

Darauf entwickelt Clausius den theilweise bereits früher von Buys-Ballot[2]) gegebenen Satz, dass in den Contactpunkten zweier Metalle die Wärmebewegung selbst Potentialdifferenzen zuwege bringt und zeigt, dass diese Hypothese das Auftreten der genannten Wirkung vollkommen erklärt.

Nun hat Thomson[3]) bewiesen, dass — einmal die von Peltier entdeckte Abkühlung und Erwärmung als Thatsache angenommen — die mechanische Wärmetheorie von selbst zu einer Theorie der Thermoströme führt, die vollständig wird, wenn man die Annahme hinzufügt, dass vorübergehend durch Erwärmung auch in ein- und demselben Metalle die Peltier'sche Erscheinung eintreten kann.

---

1) Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft, p. 47.
2) Buys-Ballot, Physiologie van het onbewerktuigde ryk.
3) Thomson, Philos. Mag. **11.** p. 214.

Tait[1]) hat ferner gezeigt, dass man für die zeitweise Potentialänderung in demselben Metalle nur anzunehmen braucht, dass sie der absoluten Temperatur proportional sei, um zu der empirischen Formel von Avenarius

$$F = A\ (t - t_1)\left(T - \frac{t + t_1}{2}\right)$$

zu gelangen, welche nochmals von Tait experimentell bestätigt wird.

Endlich ist von Edlund[2]) die Grösse des Peltier'schen Effectes erfahrungsmässig festgestellt und bewiesen, dass die electromotorische Kraft der Thermoelemente bei gleichem Temperaturunterschiede diesem Effecte proportional ist, in Uebereinstimmung mit der Thomson'schen Formel:

$$F = J\frac{\pi}{t}\tau.$$

So scheint man eine rationelle Erklärung der thermo-electrischen Erscheinungen ganz auf der Annahme von Clausius von der Umsetzung der Wärme in Electricität aufbauen zu können.

Man kann sich dann die Sache folgendermassen vorstellen:

In jedem Contact zweier Metalle ist die Wärmebewegung fortwährend thätig, das eine Metall auf ein höheres Potentialniveau zu bringen als das andere, in solcher Weise, dass ein constanter Unterschied der beiden Niveaus auftritt. Clausius vergleicht diese Wirkung mit der einer abgeschlossenen Gasmasse, die durch ihre Bewegung fortwährend den Kolben vom Boden des Cylinders zu entfernen strebt. Haben wir also eine an beiden Enden mit einem Zinkdraht versehene Kupferstange, dann ist das dabei vorkommende Potentialniveauprofil wie in Taf. IIIB Fig. 1, und die beiden Zinkdrähte liegen in electrischer Hinsicht in demselben Niveau. Wird nun a erwärmt, so nimmt durch die vermehrte Wärme-

1) Tait, Proc. Roy. Soc. Edinb. 1870 und 1871.

2) Edlund, Pogg. Ann. Bd. **143.** p. 534. 1871.

bewegung die Potentialdifferenz zu, und das Profil geht über in Taf. III B. Fig. 2.

Das warme Zink liegt in einem höhern Niveau als das kalte, und die Verbindung beider durch einen neutralen Draht gibt einen Thermostrom von *b* nach *a*. Lässt man, anstatt in *a* zu erwärmen, durch das System einen galvanischen Strom in der Richtung des Pfeiles (Taf. III B Fig. 1) gehen, dann sinkt dieser in *a* auf ein tieferes und steigt in *b* zu einem höhern Niveau auf. Beim ersten Uebergange wird, ebenso wie beim Fallen, Wärme erzeugt. Beim zweiten ist, wie beim Heben von Lasten, Wärme nöthig. In *a* entsteht also Erwärmung und in *b* Abkühlung.

Clausius zeigt, dass bei Metallen der Potentialunterschied proportional der absoluten Temperatur zunimmt, und demnach würden alle Thermoströme dem Temperaturunterschiede an den Löthstellen proportional sein müssen.

Dies ist nicht der Fall; es kommt selbst oft vor, dass bei starker Erwärmung die electromotorische Kraft des Thermostromes abnimmt und Null wird (Neutraler Punkt).

Um das Vorhandensein eines neutralen Punktes zu erklären, nimmt Clausius an, dass bei der Erwärmung auch in jedem Metalle selbst Potentialunterschiede zwischen zwei Schichten auftreten können.

Das Potentialprofil kann dann bei Erwärmung von Taf. III B Fig. 1 in Taf. III B Fig. 3 übergehen, und obgleich die Potentialdifferenz zugenommen hat, liegen beide Zinkdrähte wieder in demselben Niveau.

Alles dieses scheint einfach und rationell.

Bei näherer Ueberlegung fehlen jedoch einige Glieder in der Kette.

a. Erstens ist das Auftreten der Peltier'schen Wirkung in demselben Metalle nach vieler Anstrengung von Thomson nur zweifelhaft bewiesen.

b. Zweitens ist z. B. Wismuth positiv gegen Antimon, und doch geht der Strom in dem erwärmten Punkt vom ersten Metall zum zweiten.

c. Drittens glaubt Péclet[1]) bewiesen zu haben, dass bei Erhöhung der Temperatur der electrische Unterschied Zink-Gold gleich gross bleibt.

Ich werde im Folgenden diese Schwierigkeiten zu heben suchen.

2. Was den ersten Punkt betrifft, so bemerkt Wiedemann[2]):

„Bei den verhältnissmässig sehr geringen Temperaturdifferenzen (0,22 C.), welche bei den Thomson'schen Versuchen unter Anwendung sehr starker Ströme (es kam vor, dass die Löthung schmolz) beobachtet wurden, ist es stets noch fraglich, ob nicht secundäre Ursachen die Verschiedenheiten bedingt haben.“

Ich habe die Versuche Thomson's[3]) in folgender Weise modificirt (Taf. IIIB. Fig. 4).

Aus später zu erörternden Gründen wählte ich einen Neusilberdraht von ungefähr 2 mm Dicke und $1^3/_4$ m Länge. Dieser Draht *ADEF* wurde in einer Länge von $^3/_4$ m horizontal befestigt und bog sich bei *D* und *E* um, sodass die Enden *A* und *F* in zwei nebeneinander stehende Gläser mit kaltem Wasser tauchten. In diesen Gläsern waren mit dem Neusilberdraht die kupfernen Leitungsdrähte verbunden, welche nach dem Commutator *C*, der Tangentenbussole *T* und der Batterie *B* führten. Auf dem horizontalen Theile *ED* befanden sich 4 Schirmchen *a*, *b*, *c*, *d*; zwischen *b* und *c* fiel auf den Draht aus dem Hahn *k* ein fortwährender Wasserstrom, jenseits *a* und *d* wurde der Draht erwärmt durch die beiden Gasflammen *e* und *f*, deren Stärke regulirt werden konnte. Zwischen *c* und *d* und zwischen *a* und *b* waren mit Seide fest auf den Draht gebunden die Löthstellen *g* und *h* eines Thermoelementes Kupfer-Eisen, dessen Pole mit dem Spiegelgalvanometer *G* verbunden waren.

---

1) Péclet, Ann. de chim. et de phys. **3.** T. 20. p. 235.
2) Wiedemann, Galvanismus, **1.** p. 644.
3) Wiedemann, Galvanismus, **1.** p. 642.

Durch vorsichtiges Reguliren der Stärke und des Standes der Gasbrenner konnte man es nun in einem ruhigen Raume dahin bringen, dass das Bild auf der Galvanometerscala sich kaum merklich bewegte, wenn das Wasser ausströmte, und die Flammen *e* und *f* brannten. Alsdann wurde der Strom von 6 Bunsen'schen Zellen abwechselnd in entgegengesetzter Richtung durch den Draht geführt. Der Einfluss des Stromes war sehr deutlich, wie die folgende Tabelle ausweist.

Zeit	Tangentenbussole	Galvanometer
0 Min.	0°	40 mm
0 „	Strom positiv + 35	
5 „	„ „ + 35	10 mm
5 „	„ negativ − 36	
10 „	„ „ − 36	72 mm
10 „	„ positiv + 35	
15 „	„ „ + 35	9 mm
15 „	„ negativ − 36	
20 „	„ „ − 36	69 mm
20 „	0	
25 „	0	45 mm

Also in der einen Richtung des Stromes in 5 Min. eine Ablenkung von 40 auf 10 mm und in der andern Richtung von 40 auf 70 mm. Nun wurden die Gasflammen ausgedreht, der Wasserstrom abgeschlossen und nach Verlauf von 10 Min. der Strom der Batterie *B* wieder in abwechselnder Richtung durch den Draht geleitet. Man beobachtete eine sehr langsame Bewegung nach den niedrigen Ziffern von 2 mm pro 5 Min., die aber bei Umkehrung des Stromes in derselben Richtung fortging. Der Strom allein brachte also die oben genannte Wirkung nicht zu Wege; nur war die eine Löthstelle etwas dichter auf den Draht gedrückt als der andere.

Es unterliegt also keinem Zweifel, dass die von Thomson entdeckte Erscheinung in Neusilber wirklich stattfindet. Bei Untersuchung der Richtung der Ströme ergab sich, dass eine Abkühlung oder wenigstens eine geringere Er-

wärmung eintrat, wenn der galvanische Strom von warmen nach kalten Theilen floss.

Denselben Versuch habe ich, ebenfalls aus später anzuführenden Gründen, mit Wismuth und Antimon zu bewerkstelligen gesucht, jedoch die grosse Sprödigkeit dieser schwer zu handhabenden Metalle und der niedrige Schmelzpunkt des erstern stellten mir Schwierigkeiten in den Weg, die bisher nicht überwunden werden konnten.

Dagegen lieferte der Versuch mit einem Eisendraht wieder sehr befriedigende Resultate. Obgleich schwächer als bei Neusilber, äusserte sich der Einfluss des Stromes deutlich im Sinne von Thomson's Versuchen durch Abkühlung (resp. geringere Erwärmung) beim Uebergange des Stromes von warm nach kalt.[1])

3. Wenn wirklich bei Temperaturunterschieden durch galvanische Ströme Abkühlung und Erwärmung in demselben Metalle auftreten können, so muss auch ungleiche Erwärmung in demselben Metalle Thermoströme hervorrufen.

Anstatt mit Thomson ein Mitreissen von Wärme durch Electricität anzunehmen, stelle ich mir die Sache wie folgt vor: Wenn man ein Metall in einem Punkte erwärmt, so entstehen beiderseits zeitweise Structurverschiedenheiten, welche verursachen, dass eine Schicht sich heterogen gegen eine andere verhält. Diese vorübergehenden Structurverschiedenheiten entstehen aber nach beiden Seiten in derselben Aufeinanderfolge und erzeugen Thermoströme, die sich gegenseitig aufheben. Alleinige Erwärmung eines homogenen Drahtes kann also keinen Strom liefern. Nimmt man aber auf einer z. B. der linken Seite durch einen kalten Wasserstrom die Wärme so viel wie möglich hinweg, so entsteht der vorübergehende Structurunterschied grösstentheils auf der rechten Seite, und es tritt ein Thermostrom auf, dessen Richtung und Grösse durch die Art und Grösse des Structurunter-

1) Siehe auch Leroux, Compt. rend. **63.** p. 324.

schiedes bestimmt wird. Diess ist nämlich das Ergebniss meiner Versuche. (Taf. IIIB Fig. 5.)

Metalldrähte von 2—3 mm Durchmesser und mindestens 1,5 m Länge wurden wie in *ABCD* umgebogen, sodass ein Theil *BC* horizontal lief, und die Enden *A* und *D* in die Gläser *E* mit kaltem Wasser eintauchten. In diesen Gläsern waren die Verbindungsdrähte angebracht, die nach dem Spiegelgalvanometer *G* leiteten. Thermoströme wegen der Contacte in *A* und *D* waren auf diese Weise unmöglich.

Auf dem horizontalen Theile *BC* befanden sich zwei Schirme *H* und *S*, und zwischen diese beiden fiel ein kräftiger Wasserstrom aus dem Hahne *F* der Wasserleitung auf den Draht.

Wenn man jetzt an der Aussenseite eines dieser Schirme (und diesem so nahe wie möglich) mit einer Spirituslampe den Draht erwärmte, so entstand ein Thermostrom, der die entgegengesetzte Richtung annahm, wenn man die Wärme von der linken Seite von *S* nach der rechten Seite von *H* verlegte. So fand ich, dass:

Eisen einen Strom liefert von warm nach kalt,
Messing „ „ „ „ kalt nach warm,
Zink „ „ „ „ „ „ „
Neusilber „ „ „ „ warm nach kalt.
Bei Kupfer ist der Strom unmerklich.

Was die relative Stärke der Ströme betrifft, so wird diese durch die bei gleicher Erwärmung erhaltenen Galvanometerablenkungen angegeben, nämlich:

	Ablenkung		Ablenkung
Neusilber	20 mm	Messing	0,5 mm
Eisen	4 „	Kupfer	0 „
Zink	3 „		

Bei allen Versuchen war das Ergebniss deutlich und ein Versehen gänzlich unmöglich. Ich bin beschäftigt, diese Versuche auf andere Weise zu wiederholen, um die Resultate in bekannten Einheiten ausdrücken zu können.

Mit den beiden schwer zu behandelnden Metallen Wismuth und Antimon muss ein anderer Weg einge-

schlagen werden. Nach vieler Mühe gelang es meinem Assistenten, aus beiden Metallen gerade Stäbe von 1,5 m Länge zu giessen. Diese wurden auf einem Brette befestigt, in dessen Mitte sich eine Oeffnung von 2 dm. Länge und einigen cm Breite befand. Ueber der Oeffnung wurden wieder der Wasserhahn *F* und die Schirme *H* und *S* aufgestellt, während links oder rechts von diesen Schirmen von unten erwärmt werden konnte. Um Thermoströme durch Erwärmung der Verbindungspunkte des Stabes mit den Leitungsdrähten des Galvanometers zu vermeiden, wurden die Enden in nasse Tücher gewickelt, worauf fortwährend Wasser tröpfelte. Diese Maassregel in Verbindung mit der grossen Länge der Stäbe erwies sich vollkommen genügend, um Vertrauen verdienende Resultate zu erhalten.

In dieser Weise behandelt, ist Wismuth ausserordentlich empfindlich. Wenn das Wasser ausfloss, war die geringste Berührung mit der Hand genügend, eine Ablenkung von über 100 mm zu bewirken. Mit einem Zündhölzchen schlug der Spiegel stark über die Scala aus.

Wiederholt überzeugte ich mich an verschiedenen Stellen des Stabes, dass die so erhaltenen Thermoströme immer die Richtung von kalt zu warm haben. Dies stimmt überein mit Versuchen Matteuci's[1]), der jedoch mit permanenten Structurdifferenzen zu thun hatte oder zu thun zu haben meinte, denn gewiss müssen viel der auffallenden Erscheinungen, die in dieser Hinsicht beim Wismuth gefunden worden sind, einfach der ungleichen Erwärmung zugeschrieben werden. Indessen will ich nicht verkennen, dass beim Gebrauch metallener Gussformen und schneller, theilweiser Abkühlung in Wismuth auch wohl permanente Structurverschiedenheiten vorkommen.

Was das Antimon betrifft, so ist es, obgleich viel empfindlicher als Neusilber, doch viel weniger empfindlich als Wismuth.

---

1) Matteuci, Bibl. de Genève, 1831 und 1838.

In meinem Stabe von 1,5 m Länge kamen hier und da permanente Structurverschiedenheiten vor, wie sich aus dem vorliegenden Versuch ergibt:

Ablenkung beim Erwärmen links vom Schirm $S = 40$ mm links,
„ „ „ rechts „ „ $H = 6$ mm links.

Hier ist die Ablenkung in beiden Fällen nach derselben Seite, also die permanente Structurverschiedenheit wirkt in einem Falle mit, im andern entgegen der vorübergehenden. Wurden auf einem andern Punkte die Schirme angebracht, so erhielt ich sehr regelmässige Resultate, nämlich Thermoströme von warm nach kalt, also entgegengesetzt von denen des Wismuths.

Vergleicht man die Ergebnisse dieses Paragraphen mit denen des vorigen, so sieht man, dass beide einander bestätigen. So erzeugt im Neusilber ein galvanischer Strom beim Uebergange von warm zu kalt Abkühlung, während bei Erwärmung ein Thermostrom auftritt von warm zu kalt, ganz in Uebereinstimmung mit der Regel Peltier's.

Die Versuche Thomson's gaben also, ungeachtet der angewandten starken Ströme, vollkommen richtige Resultate, und hiermit ist die erstgenannte Schwierigkeit gehoben.

4. Die zweite Schwierigkeit betrifft nicht allein Wismuth und Antimon, sondern erstreckt sich, wie man leicht einsieht, auf alle Metalle, die in der eigentlichen Spannungsreihe einen andern Platz einnehmen, als in der thermo-electrischen Reihe, und wie sehr beide Reihen von einander abweichen, folgt aus der nachstehenden vergleichenden Tabelle:

Spannungsreihe[1])	Thermoreihe[2])	Spannungsreihe[1])	Thermoreihe[2])
+	+	+	+
Zink	Antimon	Kupfer	Kupfer
Blei	Eisen	Silber	Blei
Zinn	Zink	Platin	Zinn
Wismuth	Silber	Gold	Wismuth
Antimon	Gold	—	—
Eisen	Platin		

1) Nach Péclet, Kohlrausch und Avenarius.
2) Nach Edlund, Matthiessen und Tait.

Edlund[1]) schreibt den Unterschied zwischen beiden Reihen den Gasen zu, die sich auf den Metallplatten condensiren.

Clausius führt diese Erklärung ebenfalls an, hält es aber auch für möglich, dass beide electrische Erscheinungen unabhängig voneinander und gleichzeitig auftreten können.

Wo ein derartiger Unterschied besteht, glaubt man schon leicht an Irrthümer und Fehler. Durch Untersuchung ergibt sich nun, dass die thermo-electrische Reihe so genau von Matthiessen, Edlund und Tait bestimmt ist, dass darin unmöglich erhebliche Fehler vorkommen können. Anders verhält es sich mit der Spannungsreihe. Wiedemann[2]) führt darüber die Versuche von Volta, Seebeck, Péclet, Mund und Pfaff an. Hiervon sind die von Volta, Munk und Pfaff auf die gewöhnliche Weise durch Ableitung mit den Fingern ausgeführt. Diese verdienen daher kein Vertrauen, da Péclet[3]) behauptet, dass diese Ableitung andere Resultate ergibt, wie beim alleinigen Gebrauch von Metallcontacten.

Seebeck gibt durchaus nicht an, wie er zu seiner Reihe gelangt, und Péclet sagt von der seinigen, dass er für die Richtigkeit nicht einstehen könne und seine Versuche zu wiederholen gedenkt[4]).

Die einzigen zuverlässigen Resultate geben also die Versuche von Kohlrausch[5]) und Avenarius[6]), aber diese umfassen nur die sechs Metalle: Zink, Eisen, Kupfer, Silber, Platin und Gold, geben also keinen Aufschluss über Wismuth und Antimon.

Ich habe gesucht, hierüber Gewissheit zu erlangen.

Unter einer Glasglocke A (Taf. IIIB Fig. 6), die oben

1) Edlund, Pogg. Ann. **143.** p. 404 1871.
2) Wiedemann, Galvanismus, I. p. 26.
3) Péclet, Ann. de chim. et phys. (3) **20.** p. 238. 1841.
4) Péclet, Ann. chim. et phys. (3) **20.** p. 243. 1841.
5) Kohlrausch, Pogg. Ann. **79.** p. 177. 1850.
6) Avenarius, Pogg. Ann. **122.** p. 193. 1864.

durch einen Kork geschlossen war, stand auf einer Glasplatte *B* eine oben gefirnisste Messingplatte *D* auf einem Glasfuss *C*.

D war durch einen isolirten Draht *s* mit zwei der Quadranten eines Thomson'schen Electrometers verbunden, die beiden anderen Quadranten standen durch einen Messingdraht mit dem Boden in Verbindung. Links war an die Messingplatte *D* ein dicker Messingdraht *rq* geschraubt und mit einem Oehr versehen, worin lose der Messingstift *p* mit der Glasstange *G* gedreht werden konnte. Auf die Platte *D* legte man eine ähnliche Platte von verschiedenem Metall *E*, die durch den Glasstiel *F* gehoben werden konnte und mit *D* einen Condensator bildete. Die Luft in der Glocke wurde durch Schwefelsäure trocken gehalten. Der Condensator ladete sich durch Berührung des Metalls *E* mit dem Messingstift *p*. Darauf wurden *G* und *F* aufgehoben und der Ausschlag des Spiegelelectrometers beobachtet. Zum Schluss brachte man den Kupferpol einer Daniell'schen Zelle mit dem Erdboden, den Zinkpol mit dem Draht *s* des Electrometers in Contact und beobachtete ebenfalls den Ausschlag.

Versuch mit Wismuth:

Ausschlag: 7, 6, 5,75, 4,5, 7, 6,5, 5,5, Mittel 6 cm.

Versuch mit 1 Daniell:

Ausschlag: 39,5, 38, 36,5, 37,5, Mittel 37,9 cm.

mithin electrischer Unterschied:

Wismuth-Messing = 16 Proc. Daniell.

Auf diese Weise fand ich folgende Reihe:

Zink	80	Proc. Daniell	Messing	0	Proc. Daniell
Wismuth . . .	16	„ „	Kupfer	1	„ „
Antimon. . . .	12½	„ „	Platin II. . . .	4	„ „
Silber	4	„ „	Gold	8	„ „
Platin I.. . . .	2	„ „			

Platin I. war nahezu chemisch rein, Platin II. war Platin des Handels.

Eine derartige Verschiedenheit der Platinsorten hat auch Thomson[1]) in thermo-electrischer Hinsicht gefunden.

1) Thomson, Pogg. Ann. **99**. p. 334. 1856.

Ohne nun behaupten zu wollen, dass diese Versuche mit den classischen Untersuchungen Kohlrausch's wetteifern können, beweisen sie, wie mir scheint, unwiderleglich, dass die Spannungsreihe von Volta, Seebeck u. a. richtig aufgestellt ist, dass die Ableitung mit den Fingern nicht den grossen Effect hat, den Péclet derselben zuschreibt, und dass Wismuth und Antimon in thermoelectrischer Hinsicht sich ganz anders verhalten als bei den gewöhnlichen Volta'schen Erscheinungen.

Doch brauchen wir nicht zu den Annahmen Edlund's und Clausius' unsere Zuflucht zu nehmen. Im Gegentheil findet der Unterschied zwischen beiden Reihen in meinen Versuchen unter § 3 eine sehr natürliche Erklärung.

Denken wir uns eine Kette Wismuth-Kupfer. In jeder der beiden Löthstellen wird Electricität entwickelt, sodass beide Ströme, die, der Spannungsreihe zufolge, vom Kupfer durch die Löthstelle zum Wismuth gerichtet sind, einander gerade aufheben. Nun wird die eine Löthstelle erwärmt, und dadurch wird nicht allein die electrische Differenz zwischen Kupfer und Wismuth grösser, sondern es treten auch in beiden Metallen Structurverschiedenheiten auf. Dies hat nach § 3 bei Kupfer keinen merklichen Effect, bei Wismuth aber entsteht dadurch ein sehr starker Strom von kalt nach warm. Ist es nun befremdlich, dass dieser starke Strom den andern zwischen Kupfer und Wismuth aufhebt, und dass der Thermostrom vom Wismuth durch die Löthstelle zum Kupfer geht? (Siehe Taf. IIIB Fig. 7 mit den Potentialprofilen vor und nach der Erwärmung).

Beachten wir die Ergebnisse des § 3, so ist leicht einzusehen, dass Zink in der Spannungsreihe durch Erwärmung sinken, Eisen darin steigen muss, und es erscheint sehr natürlich, warum Wismuth und Antimon, die ursprünglich einander so nahe stehen, bei Erwärmung sich so weit voneinander entfernen.

Die Verschiedenheit zwischen beiden Reihen entsteht also durch dieselbe Ursache, welche das Auftreten eines neutralen Punktes zur Folge hat, d. h. durch die vorübergehenden Structur- und Potentialdifferenzen, die in demselben Metalle durch Verschiedenheit der Temperatur entstehen.

Man könnte noch bezweifeln, ob die Stärke der von mir gefundenen Thermoströme wohl genügend wäre, den genannten Effect zu Wege zu bringen, und dieser Zweifel würde grösser werden, wenn man die Kraft der nach § 3 in Wismuth erweckten Thermoströme mit der Kraft derjenigen vergleicht, welche zwischen Wismuth und Kupfer auftreten. Man findet dann, dass die letzteren stärker sind.

Die folgenden Versuche werden aber diesen Zweifel beseitigen.

1. Versuch. Ein sehr langer Eisendraht von 2 mm Durchmesser wurde mit beiden Enden der kupfernen Leitungsdrähte des Spiegelgalvanometers verbunden. Dicht neben dem rechten Contactpunkte von Eisen und Kupfer fiel auf den Eisendraht ein kräftiger Wasserstrom. Nun erwärmte man das Eisen links vom Wasserstrom, und alsbald zeigte die Ablenkung des Galvanometers, dass durch den mit Wasser abgekühlten Theil des Eisens noch genug Wärme hindurchdrang, um einen Thermostrom zu erzeugen. Etwa $^1/_5$ der dem Eisendrahte gegebenen Wärme wurde nicht von dem Wasserstrome weggeführt. Doch war der Querschnitt des Wismuthstabes von § 3 noch beinahe 30 mal grösser als der des Eisens in diesen Versuchen. Also wurde durch den in § 3 angewandten Wasserstrom nur ein kleiner Theil der Wärme fortgenommen; der beobachtete Thermostrom war nur ein kleiner Theil von demjenigen, welcher aufgetreten sein würde, wenn das Wasser die Temperatur constant gehalten hatte.

2. Versuch. Der lange Wismuthstab von § 3 wurde mit dem Spiegelgalvanometer und einem Thermoelemente Kupfer-Eisen in eine Kette gesetzt. Die am Galvanometer beobachtete Ablenkung zeigte nun, dass bei gleicher

Erwärmung der nach § 3 vorübergehend in Wismuth erweckte Thermostrom 1,5 mal so stark war, als der Strom des Kupfer-Eisen-Elementes.

Beide Versuche zusammen lassen keinen Zweifel über den grossen Einfluss, den die durch Temperaturunterschiede erzeugten Structurdifferenzen ausüben können.

5. Es besteht nur noch eine Schwierigkeit, nämlich der Versuch Péclet's mit einer Zinkröhre, welche erst mit kaltem, später mit warmem Wasser gefüllt, in beiden Fällen gerade dieselbe electrische Ladung dem Condensator mittheilte. Nach Clausius muss aber die electrische Differenz zwischen zwei Metallen proportional der absoluten Temperatur zunehmen.

Ich habe deshalb den Versuch von § 4 mit Wismuth bei zwei verschiedenen Temperaturen des Zimmers wiederholt. Das Resultat ist folgendes:

Ausschlag des Electrometers:

bei 18° C.	7,	6,5,	4,5,	5,	6,5,	Mittel	5,9
„ 30° C.	9,5,	10,	10,5,	8,5,	9,0,	Mittel	9,5
„ 18° C.	7,5,	6,	5,5,	6,0,	7,	Mittel	6,4.

Auch mit Zink erhielt ich ähnliche Resultate, sodass ohne Zweifel die electrischen Differenzen mit der Temperatur zunehmen.

6. Man kann nun wohl schliessen, dass die Potentialdifferenzen, die bei Erwärmung auftreten, nur Modificationen von denen sind, welche die von Volta entdeckten Erscheinungen zu Wege bringen.

Da Clausius gezeigt hat, dass eine richtige Erklärung der thermo-electrischen Erscheinungen nur gegeben werden kann, wenn man annimmt, dass beim Conzweier Metallen durch die eigene Wärme der Löthstellen electrische Differenzen auftreten, so nehme ich für die Volta'schen electrischen Differenzen denselben Ursprung an.

Wenn aber die Wärme im Contactpunkt zweier Metalle die constante electrische Differenz, welche sie zeigen, verursacht, warum hat denn dieselbe Wärme nicht auch

im Contactpunkt eines Metalles mit einer Flüssigkeit oder in dem von zwei Flüssigkeiten die electrische Differenz zur Folge, welche dabei vorkommt?

Warum sollten nicht alle electrischen Differenzen, die wir kennen, und aus welchen wir die ganze Lehre vom Galvanismus aufbauen, denselben thermischen Ursprung haben?

Für die gewöhnlichen Thermoströme hat Thomson[1]) folgende Grundgleichungen aufgestellt:

$$F = J\left\{\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots - \int_{T_1}^{T_0} \sigma_1 dt - \int_{T_2}^{T_1} \sigma_2 dt - \ldots\right\} \tag{1}$$

und

$$\frac{\Pi_1}{T_1} + \frac{\Pi_2}{T_2} + \ldots - \int_{T_1}^{T_0} \frac{\sigma_1}{t} dt - \int_{T_2}^{T_1} \frac{\sigma_2}{t} dt - \ldots = 0 \tag{2}$$

wo:

F die electromotorische Kraft des Stromes,

J das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit,

Π_1, Π_2 ... den Peltier'schen Effect in den Löthstellen pro Sec. und pro Einheit der Stromstärke,

σ_1, σ_2 ... denselben Effect in einem und demselben Metalle für eine Schicht, deren Endflächen die absoluten Temperaturen T und $T + dt$ haben.

Die erstere Formel ist eine Folge des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, die zweite ein Ausdruck für den zweiten Hauptsatz.

Nach (2) ist, wenn alle Theile einer Kette dieselbe Temperatur besitzen:

$$\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots = 0, \tag{3}$$

welche Gleichung implicite den Beweis der Sätze von Volta und Becquerel enthält, dass der electrische Unterschied zweier Metalle gleich ist der Summe der electrischen Differenzen der zwischen gelegenen Metalle.

Die Gleichung (3) in (1) eingeführt, ergibt, dass in einer geschlossenen Kette von Metallen bei gleicher Temperatur kein electrischer Strom auftreten kann.

1) Thomson, Phil. Mag. 11. p. 283.

Diese letztere Thatsache ist also eine Folge des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie.

Dieser zweite Satz gilt aber nur, wie Thomson sagt: „If every part of the action and all its effects be perfectly reversible.“ So sagt auch Clausius: „Demnach gilt für alle umkehrbare Kreisprocesse als analytischer Ausdruck des zweiten Hauptsatzes die Gleichung:

$$\int \frac{dq}{T} = 0.\text{“}$$

Nun hat der galvanische Strom wenigstens zwei Wirkungen, die das Auftreten eines umkehrbaren Kreisprocesses unmöglich machen, nämlich galvanische Erwärmung wegen des Widerstandes und chemische Zersetzung, wovon sicher die letztere, da sie die Art der Stoffe, welche die Kette bildet, ändert, in erster Stelle zu nennen ist.

Hieraus folgt, dass in einer Kette von Metallen und Flüssigkeiten, welche letztere nicht ohne Zersetzung leiten, bei constanter Temperatur allerdings ein Strom auftreten kann, weil Gleichung (3) dann nicht gilt.

7. Wenn alle Potentialdifferenzen beim Contact verschiedener Stoffe denselben thermischen Ursprung haben, müssen auch Metalle und Flüssigkeiten Thermoströme liefern können.

Wirklich sind solche Ströme von vielen beobachtet, aber man trug stets Bedenken, sie als wirkliche Thermoströme anzuerkennen.

Faraday[1]) schrieb sie einer Veränderung der chemischen Wirkung zu, weil er sie bei nicht chemisch aufeinander wirkenden Stoffen nicht bemerkte.

Obgleich man aber den Einfluss einer Aenderung in der chemischen Verwandtschaft und in der Concentration bei diesen Erscheinungen nicht verkennen kann, werden seit den vielen Versuchen Gore's[2]) die Bedenken wohl grösstentheils geschwunden sein. Die Ströme zwischen

1) Faraday, Exp. Researches 1956.

2) Gore, Proc. Roy. Soc. 1871 und 1878.

Zinksulfat und Zinkelectroden z. B. widerlegen die Ansicht Faraday's.

Ich nahm einen länglichen, inwendig lackirten Holztrog, theilte ihn durch 2 Kupferplatten in 3 ungleiche Abtheilungen und füllte die mittlere und grösste mit Kupfersulfat. Die Kupferplatten waren durch Kupferdrähte mit den Windungen des Spiegelgalvanometers verbunden und zeigten keinen Strom durch Ungleichheit.

Wenn man nun in eine der beiden äusseren Abtheilungen Eis und in die andere warmes Wasser brachte, so entstand ein Strom, der in der Flüssigkeit von kalt nach warm gerichtet war. Vermehrung des Temperaturunterschiedes verursachte eine stärkere Ablenkung. Vertauschte man Wasser und Eis miteinander, so kehrte sich die Richtung des Stromes um. Mit dem Quadrantenelectrometer mass ich bei 10° C. Temperaturunterschied eine electromotorische Kraft von $^1/_{30}$ Daniell. Die Richtung des Stromes ist diejenige, welche Wild angibt[1]), woraus hervorgeht, dass wir es hier nicht mit einem Concentrationsstrom zu thun haben, denn dieser würde die entgegengesetzte Richtung zeigen. Es ist ein wirklicher Thermostrom, denn auch die Peltier'sche Wirkung tritt dabei auf. Daher kommt es, dass die positive Electrode in einer Zersetzungszelle wärmer wird als die negative.

Zwei wie oben eingerichtete Holzgefässe A und *B* (Taf. IIIB Fig. 8) enthielten in der mittlern Abtheilung das eine *A* Zinksulfat, das andere *B* Kupfersulfat. In *A* waren Zinkplatten, in *B* Kupferplatten; an den Zinkplatten waren Zinkdrähte befestigt, die in den mit kaltem Wasser gefüllten Gläsern *e* und *f* mit den kupfernen Leitungsdrähten verbunden waren.

Mittelst eines Commutators *C* waren beide Gefässe mit dem Galvanometer in einen Kreis eingefügt, sodass man nach Belieben die beiden Ströme sich gegenseitig verstärken oder schwächen lassen konnte. Nennen wir die electromotorische Kraft der Thermoströme in *A* und *B* E_1 und E_2,

1) Wild, Pogg. Ann. **103.** p. 375. 1858.

und die Ablenkungen am Galvanometer in beiden Stellungen des Commutators i_1 und i_2, so ist:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_1 + i_2}{i_1 - i_2}.$$

Nachdem nun die durch Ungleichheit der Platten entstehenden Ströme verschwunden waren, füllte man von jedem Troge die eine Abtheilung mit Eis und die andere mit warmem Wasser, und wenn dann die Thermometer in *A* und *B* dieselbe Temperatur zeigten, mass man schnell die Ablenkungen i_1 und i_2. So fand ich bei einem Temperaturunterschiede von 28° C.:

1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch	4. Versuch
i_1 = 7,15	6,9	7,0	7,2
i_2 = 0,8	0,9	0,8	0,75

also im Mittel:

$$\frac{E_1}{E_2} = 1{,}26.$$

Der Thermostrom $Zn|ZnSO_4$ ist bei gleichem Temperaturunterschiede 1,26 mal grösser als der von $Cu|CuSO_4$.

Wild[1]) fand bei 10° C. für

$Zn|ZnSO_4$ $^1/_{20}$ D.

und ich $Cu|CuSO_4$ $^1/_{30}$ D.,

wodurch obiges Resultat bestätigt wird.

Jetzt wurden beide Gefässe mit einer Batterie von 5 Bunsen'schen Elementen und mit einem Commutator in einen Kreis gestellt. Die Abtheilungen ausserhalb der Platte waren leer, die mittlere enthielt Flüssigkeiten von der Temperatur des Zimmers und, fest an die Platten gedrückt, befanden sich 4 Thermometer, die $^1/_{10}$ Grad noch deutlich anzeigten. Nennen wir die Thermometer in Zinksulfat *A* und *B* und die in Kupfersulfat *C* und *D*, so fand ich beim Durchgange des Stromes in der von den Zeichen + und — angedeuteten Richtung:

1) Wild, Pogg. Ann. **103.** p. 411. 1858.

	Zinksulfat		Kupfersulfat	
	A	*B*	*C*	*D*
	+	−	+	−
Temp. nach 0 Min.	13,4	13,4	13,5	13,5
10 Min.	14,6	13,7	14,7	13,9
Erwärm.	1,2	0,3	1,2	0,4
Unterschied	0,9		0,8	

	A	*B*	*C*	*D*
	−	+	−	+
Temp. nach 0 Min.	13,3	13,3	13,4	13,4
10 Min.	14,2	15,2	14,2	15,0
Erwärm.	0,9	1,9	0,8	1,6
Unterschied	1,0		0,8	

Die Mehrerwärmung der positiven Electrode ist also bei Zn|$ZnSO_4$ grösser als bei Cu|$CuSO_4$ und nahezu ebensoviel mal, als die *E*-Kraft des Thermostromes stärker ist.

Wir haben es hier also mit einem Peltier'schen Effect zu thun, wie auch aus den Versuchen Bouty's[1]) hervorgeht, bei welchen mit schwachen Strömen selbst eine Abkühlung der negativen Electrode beobachtet wurde.

Indessen erhebt sich hier eine der von § 1 sub *b* ähnliche Schwierigkeit. Kupfer z. B. ist negativ in Kupfervitriol, das Kupfersulfat liegt also auf einem höhern electrischen Niveau, und ein Strom würde, um auf dieses höhere Niveau zu kommen, Abkühlung zu Wege bringen müssen. Er gibt aber Erwärmung.

Der Peltier'sche Effect und die Richtung des Thermostroms ist also derjenigen entgegengesetzt, welche man nach der bekannten Potentialdifferenz Cu|Cu SO_4 erwarten sollte.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, verweise ich auf die folgende, von Gore[2]) entdeckte und von mir bestätigt gefundene Thatsache:

---

1) Bouty, Journal de Phys. Oct. 1879.

1) Gore, Proc. Roy. Soc. **27.** p. 513.

Die Thermoströme zwischen Metallen und Flüssigkeiten hängen, was die Richtung betrifft, nur von der Flüssigkeit und nicht von der Natur des Metalles ab.

Wenn man nun bedenkt, dass nach allen Versuchen ein fester Körper in einer Flüssigkeit mit einer Schicht der Flüssigkeit bedeckt wird, deren Bildung nach Pouillet selbst Wärmeentwicklung zur Folge haben kann, und welche Schicht selbst beim Strömen der Flüssigkeit unbeweglich auf ihrem Platze bleibt, so kommt man durch obengenannte Thatsache zu dem Schluss, dass man es hier nicht mit Thermoströmen zwischen Metallen und Flüssigkeiten, sondern mit solchen zwischen der anhaftenden und der freien Flüssigkeit zu thun hat. Dass diese zwei als heterogen betrachtet werden müssen und electrische Differenzen liefern können, ist oftmals behauptet und kürzlich noch von Elster[1]) als ein nothwendiges Ergebniss seiner Untersuchungen angeführt.

Zieht man in Betracht, dass die Stromesrichtung in dem erwärmten Punkte meistens die von der Flüssigkeit nach dem Metall ist, so wird man es erklärlich finden, wenn ich annehme, dass die freie Flüssigkeit negativ in Bezug auf die Anhaftende ist. Unter dieser Annahme schwinden alle Schwierigkeiten: der Thermostrom geht in der Flüssigkeit von kalt nach warm, und die Erwärmung nach Peltier geschieht an der positiven Electrode (s. Potentialprofil Taf. III B Fig. 9).

Quincke[2]) machte zwei Metallplatten durch Glühen u. s. w. vollkommen gleich, verband beide durch einen Draht, stellte die eine in eine Flüssigkeit und tauchte nach einiger Zeit auch die trockene ein. In diesem Augenblicke entstand ein kurzwährender Strom von der trocknen zur nassen Platte. Die nasse Platte und der damit verbundene Leitungsdraht, also auch die andere Platte, waren

1) Elster, Wied. Ann. **6.** p. 553. 1878.
2) Quincke, Pogg. Ann. **107.** p. 12. 1859.

von der Flüssigkeit positiv electrisirt. Als man nun die trockne auch in die Flüssigkeit tauchte, verlief einige Zeit, ehe darauf eine Schicht gebildet war, und so lange passirte ein Strom in angegebener Richtung. Dieser Versuch kann also einigermassen zur Bestätigung meiner Annahme dienen.

Die electrische Differenz zwischen der freien und der anhaftenden Flüssigkeit direct zu messen, wird äusserst schwierig sein, denn in der Regel wird sie der Wahrnehmung entgehen, weil alle Körper sich mit einer ähnlichen Schicht bedecken. Nehmen wir z. B. Kupfer-Schwefelsäure-Zink, so erhalten wir das Potentialprofil Taf. III B Fig. 10 und was wir messen ist die electrische Differenz *ab*, gerade so, als wenn das Profil Taf. III B Fig. 11 wäre.

Lediglich bei ungleicher Erwärmung der Electroden können die von mir aufgestellten electrischen Differenzen bemerkbar werden.

Weil jetzt die Quelle der hier besprochenen Thermoströme in die Flüssigkeit selbst verlegt worden ist, so könnte man fragen, ob dann wirkliche Thermoströme zwischen Metallen und Flüssigkeiten gar nicht existiren? Indirecte Beweise für das Auftreten dieser letzten Ströme lassen sich wohl finden.

Wenn man z. B. Zink in Potaschelösung stellt und eine der Zinkplatten erwärmt, so entsteht erst ein schwacher Strom in der Flüssigkeit von kalt nach warm und gleich darauf ein stärkerer und schnell zunehmender Strom von warm nach kalt. Nun ist Zink negativ in Kali, und das Potentialprofil hat also die Form Taf. III B Fig. 9b. Wenn bei der ersten Erwärmung die electrische Differenz der gebundenen und der freien Flüssigkeit und darauf die der Metalle mit der Flüssigkeit zunimmt (s. Taf. III B Fig. 12), so wird das Auftreten der beiden Ströme vollständig erklärt. Der starke Strom von warm nach kalt wäre dann wirklich ein Thermostrom zwischen Metall und Flüssigkeit.

Dergleichen Umkehrungen der Stromesrichtung, die an den neutralen Punkt bei Metallen erinnern, hat Gore ebenfalls beobachtet, z. B. bei Chromalaun, Nickel-

sulfat, Nickelnitrat u. a.; und da man in Flüssigkeiten nicht gut dergleichen vorübergehende Structurverschiedenheiten annehmen kann, wie bei Metallen, so weisen alle diese Stromumkehrungen auf ein Zusammentreffen von zwei oder mehreren Strömen hin. Ich sage: von zwei oder mehreren Strömen, weil auch Concentrationsänderung eine Aenderung der Potentialdifferenz zweier Stoffe zur Folge haben muss.

8. Auch zwischen zwei Flüssigkeiten entstehen nach Wild[1]) ziemlich starke Thermoströme; die Peltier'sche Wirkung konnte er aber dabei ebensowenig nachweisen, wie früher E. du Bois-Reymond[2]), der doch eine starke Batterie und empfindliche Thermometer anwandte.

Wild fragt, ob dies negative Resultat nicht von der grossen Beweglichkeit der Flüssigkeit verursacht werde, und sicherlich spielt diese eine grosse Rolle. Als ich in das Kupfersulfat des mehrgenannten Holztroges drei Thermometer stellte, eins in die Mitte, die beiden anderen sehr nahe den Kupferplatten (obgleich nicht bis zur Berührung) und nur auf der linken Seite eine Kältemischung, auf der rechten warmes Wasser von 30° C. anbrachte, stieg die Temperatur in allen dreien von 17,2° auf 20,6° und war das Thermometer auf der kalten Seite nie mehr als 0,2° C. niedriger als das auf der warmen.

Zu der grossen Beweglichkeit der Flüssigkeiten gesellt sich noch der Nachtheil des langen Quecksilberreservoirs, welches sich ausser auf die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten auf mehrere Lagen darüber und darunter erstreckt.

Das sind zwei Ursachen, welche meiner Meinung nach die negativen Resultate von Wild und du Bois-Reymond erklären könnten. Ich richtete deshalb den Versuch folgendermassen ein (Taf. III B Fig. 13):

Zwei Glasröhren *A* und *A'* waren in der Mitte in einer Länge von 10 cm auf einen Durchmesser von höch-

1) Wild, Pogg. Ann. **103.** p. 353. 1858.

2) E. du Bois-Reymond, Berl. Ber. 1856.

stens 1 mm verengt, mit dem obern offnen Ende in einem Glasgefässe D befestigt und unten mit Korken geschlossen, durch welche zwei starke Kupferdrähte c und d gesteckt waren. In den mit kaltem Wasser gefüllten Gläsern e und f waren mit den Kupferdrähten die Leitungsdrähte verbunden, die nach der Tangentenbussole T, dem Commutator C und der Batterie B führten. Mit feinen Glaspipetten wurden die Röhren A und A' zuerst mit Kupfersulfat (spec, Gew. 1,2) bis zur Höhe $\bar{a}b$ und darauf weiter mit Schwefelsäure (spec. Gew. 1,07) gefüllt), welche letztere theilweise auch das Glasgefäss D füllte. In a und in b war eine sehr scharfe Grenzfläche. Auf diese Punkte brachte man von aussen gegen das dünne Glas die Löthstellen eines Thermoelementes aus dünnem Kupfer- und Eisendraht, dessen Pole mit den Leitungsdrähten des sehr empfindlichen Spiegelgalvanometers verbunden wurden. Der Strom einer Batterie von 12 Bunsen'schen Elementen wurde nun nacheinander in verschiedener Richtung durch den Apparat geleitet und die Wirkung derselben auf das Thermoelement beobachtet. Der Widerstand der Kette $caDbd$ war so gross, dass die Tangentenbussole T durch einen Multiplicator M ersetzt werden musste.

Zeit	0	5	5	10	10	15	15	20	20	30
Mult.	0	0	+80	+80	−79	−79	+80	+80	−79	−79
			Str. +		Str. −		Str. +		Str. −	
Galv.	2,65	2,65	2,65	2,9	2,9	2,6	2,6	2,7	2,7	2,3

Zeit	30	40	40	50	60	60	60	65
Mult.	+81	+81	−80	−80	+79	+79	0	0
	Str. +		Str. −		Str. +			
Galv.	2,3	2,8	2,8	2,3	2,3	2,8	2,8	2,7

Der Nullpunkt des Spiegelgalvanometers war 2,65, und die Ablenkungen links und rechts vom Nullpunkt betrugen nacheinander:

bei positivem Strom +0,25; 0,05; 0,15; 0,15 cm
bei negativem Strom −0,05; 0,25; 0,25 cm.

Aus diesen Versuchen geht deutlich der Einfluss der Stromwirkung auf die Erwärmung der Contactpunkte her-

vor. Genaue Untersuchung ergab, dass beim Uebergange des Stromes von Schwefelsäure zum Kupfersulfat Abkühlung stattfand.

Nun entfernte man das Thermoelement und verband die dicken Kupferdrähte *c* und *d* selbst mit dem Spiegelgalvanometer. Der Apparat verhielt sich dann ganz wie ein ziemlich empfindliches Differentialthermometer. Die blosse Berührung mit den Fingern in den Punkten *a* und *b* genügte zu einer sehr deutlichen Ablenkung. Die Richtung des Thermostroms war, wie Wild sie angibt, im erwärmten Punkte vom Kupfersulfat nach Schwefelsäure.

Vergleicht man dieses Resultat mit den früheren, dann stimmen sie nicht mit der Regel Peltier's. Wir haben hier gerade das Umgekehrte, denn der Thermostrom lief im erwärmten Punkte von Kupfersulfat zur Schwefelsäure, während ein vom Kupfersulfat auf Schwefelsäure übergehender Strom Erwärmung anstatt Abkühlung zu Wege brachte.

Dies auffallende Resultat veranlasste mich, die Versuche mit anderen Röhren *A* und anderen Thermoelementen zu wiederholen, aber das Resultat war immer dasselbe: die umgekehrte Peltier'sche Erscheinung.

Es würde mir angenehm sein, wenn andere sich entschlössen, diesen delicaten Versuch, vielleicht mit besseren Hülfsmitteln, zu wiederholen. Möchten sich meine Resultate bestätigen, so würde daraus, wie man leicht bei Zeichnung der Potentialprofile einsieht, folgen, dass die Potentialdifferenz von Kupfersulfat und Schwefelsäure mit der Temperatur abnimmt. Hierbei muss ich bemerken, dass der Clausius'sche Schluss von der Proportionalität der Potentialdifferenzen mit der absoluten Temperatur auch gänzlich auf dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie basirt ist und also für zwei Flüssigkeiten und für Metalle und Flüssigkeiten nicht zu gelten braucht. Vielleicht dient diese Bemerkung noch zur weitern Erklärung der früher genannten Stromumkehrungen.

Jedenfalls brauchen wir bei den Versuchen dieser Paragraphen nicht länger zu verweilen, weil nach Kohlrausch[1]) die electrischen Differenzen zweier Flüssigkeiten nur eine sehr untergeordnete Rolle in den galvanischen Elementen spielen.[2])

Am Ende dieses Paragraphen erwähne ich noch die Disjunctionsströme Edlund's[3]), welche ich noch immer als Thermoströme betrachte, ebenso wie ich mit Wild[4]) den Temperaturunterschied der Kohlenspitzen einer electrischen Lampe einen Peltier'schen Effect nenne.

9. Von grossem Interesse ist die Frage: können wir wirklich die Wirkung einer Säule aus den electrischen Differenzen ihrer Theile erklären?

Ist die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes die Summe der electrischen Differenzen:

$$Zn \mid Cu; \quad Zn \mid SO_4 Zn; \quad Cu \mid CuSO_4?$$

Diese Frage ist niemals direct gelöst. Allein in der Voraussetzung, dass die Antwort bestätigend sei, hat Kohlrausch den Antheil jeder einzelnen Differenz bestimmt. Er fand[5]):

$Zn \mid Cu$ . . .	$+4{,}17$	80,1 Proc.
$Zn \mid ZnSO_4$ . .	$-3{,}106$	59,7 „
$Cu \mid CuSO_4$ . .	$-2{,}071$	39,8 „
also 1 Daniell	5,205	100 „

Ich wollte die Frage jedoch direct lösen. Schon früher, in § 4, hatte ich für $Zn \mid Cu$ 80 Proc. Daniell gefunden, was gut mit obigen Ziffern stimmt und auch von Avenarius[6]) gefunden ist.

---

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. **79.** p. 177. 1850.

2) Später bemerkte ich, dass Schultz-Sellack (Pogg. Ann. **141.** p. 467. 1870) die normale Peltier'sche Wirkung bei Chlorcalcium und Salmiak nachgewiesen hat.

3) Edlund, Pogg. Ann. **131.** p. 586. 1867.

4) Wild, Pogg. Ann. **106.** p. 621. 1859.

5) Kohlrausch, Pogg. Ann. **88.** p. 473. 1853.

6) Avenarius, Pogg. Ann. **122.** p. 193. 1864.

Die Differenz Zn | $ZnSO_4$ bestimmte ich in folgender Weise. (Taf. IIIB Fig. 14).

Auf der Glasplatte *A* standen auf Glasfüssen die beiden Metallscheiben *E* und *C*. *E* ist eine oben gefirnisste Messingplatte, *C* eine Zinkplatte. Auf *E* liegt die Zinkplatte *D*, die mit *E* einen Condensator bildet. *D* ist durch den Draht *ef* mit der Zinkplatte *C* verbunden. An *C* ist ein Zinkstreifen *T* geschraubt, der bei *g* ein Oehr hat, in welchem ein Zinkdraht an dem Glasstiel *H* gedreht werden kann. *E* ist durch die Messingdrähte *ab* und *cd* mit dem Quadrantenelectrometer und mit dem Boden verbunden. *B* ist ein dünnwandiges Glasgefäss, mit einem Glasstiel versehen und mit Zinksulfat gefüllt. Nachdem nun der Zinkdraht *g* einige Zeit in die Flüssigkeit eingetaucht gewesen war, wurden zuerst *H* und *G* abgehoben, darauf *ef* und *cd* entfernt und *D* abgehoben. Die Ablenkung vom Electrometer war:

11 13 12 12,5 11,5 Mittel 12 cm.

Nun wurde die Verbindung mit *C* unterbrochen und an die Stelle der Zinkplatte *D* eine Kupferplatte gesetzt, mit welcher der Kupferpol eines Daniell'schen Elementes verbunden war, dessen Zinkpol durch einen Kupferdraht mit dem Boden in Verbindung stand. So lud ich den Condensator ganz in derselben Weise wie im vorigen Versuche, aber jetzt mittelst der Daniell'schen Zelle.

Die Ablenkung war:

26 23,5 25,5 24,5 25,5 Mittel 25 cm,

demnach ist Zn | $ZnSO_4$ = 48 Proc. Daniell.

Zur Bestimmung der Differenz Cu | $CuSO_4$ waren *D*, *C*, *T* und *g* von Kupfer, und die Flüssigkeit war Kupfersulfat.

Ablenkung am Electrometer:

7,5 6,5 6,5 7 7,5 Mittel 7 cm.

Der Versuch mit der Daniell'schen Säule noch einmal wiederholt, ergab:

	im Mittel		25,5 cm
also ist	$Cu \mid CuSO_4$	=	− 27,4 Proc. Daniell.
Demnach	$Zn \mid Cu$	=	+ 80 „
	$Zn\ SO_4 \mid Zn$	=	+ 48 „
	$Cu \mid CuSO_4$	=	− 27,4 „
	Total		100,6 Daniell.

Die Temperatur des Zimmers war sehr hoch, ungefähr 27° C.

Dieses Ergebniss weicht wohl einigermassen von dem Kohlrausch's ab. Ich beabsichtige deshalb, diese Versuche zu wiederholen; die Schwierigkeiten sind aber dabei in unserem feuchten Klima ausserordentlich gross. Indessen glaube ich, die am Anfange dieses Paragraphen gestellte Frage bejahend beantworten zu können.

10. Ich stelle nun folgende Sätze auf:

a. Ueberall, wo zwei Leiter[1]) in Berührung kommen, hat die Wärmebewegung Entwickelung von Electricität zur Folge. Daher tritt zwischen beiden Stoffen eine constante electrische Differenz auf.

b. Ist in einer geschlossenen Kette die Gesammtsumme der Potentialdifferenzen von Null verschieden, so tritt in dieser Kette ein andauernder electrischer Strom auf.

c. Dieser Strom existirt auf Kosten der Wärme an dem einen Theile der Contactpunkte und hat Wärmeerzeugung im andern zur Folge.

d. Alle Volta'schen Ströme sind Thermoströme.

e. Die chemische Wirkung in der Säule und den Zersetzungsapparaten ist eine Folge des galvanischen Stroms.

11. Nehmen wir zur Prüfung dieser Sätze eine Kette, bestehend aus einer constanten Zelle und einem Metall-

1) Nach den Versuchen J. Thomson's (Proc. Roy. Soc. 25. p. 169) über die Contactelectricität von Nichtleitern und nach der in seinen Studien über electrische Grenzschichten vorkommenden Berechnung Helmholtz's (Wied. Ann. 7. p. 337. 1879) kann man auch wohl dasselbe von Nichtleitern behaupten. Die ganze Lehre von der Electricität wäre dann auf ein einziges Princip zurückgeführt.

drahte; die Zelle enthält die Metalle a und d und die Flüssigkeiten b und c, während die Kette von dem Metalldrahte f geschlossen wird.

Nennen wir die Potentialdifferenz dieser Stoffe in der Richtung des Stromes nacheinander:

$$b|a,\ c|b,\ d|b,\ f|d,\ a|f,$$

so ist, weil die electrische Differenz zwischen anhaftender und freier Flüssigkeit zweimal, aber mit entgegengesetztem Zeichen vorkommt, die electromotorische Kraft der Säule:

$$E = b|a + c|b + d|c + f|d + a|f.$$

E ist eine Function der Temperatur, wie auch von Lindig[1]) bei den Daniell'schen Elementen gefunden ist.

Die in jedem Contact pro Secunde entwickelte Wärme ist nach Clausius:

$$W = -AJ(V_2 - V_1),$$

in welcher J die Stromstärke, A das thermische Aequivalent und $V_2 - V_1$ die Potentialdifferenz bedeutet.

Die in allen Contacten entwickelte Wärme ist also:

$$W = -AJ\{b|a + c|b + d|c + f|d + a|f\}$$

oder:

$$W = -AJE.$$

Also wird in der Säule eine Wärmemenge verbraucht von:

AJE Wärmeeinheiten.

Dies ist der erste Satz Edlund's in seiner Abhandlung über die thermischen Erscheinungen beim galvanischen Strome.[2])

Weiter ist die galvanische Erwärmung durch Widerstand in der Gesammtkette nach dem Joule'schen Gesetze:

$$W' = +AJ^2R = +AJE \text{ Wärmeeinheiten,}$$

also:

$$W + W' = 0.$$

---

1) Lindig, Pogg. Ann. **123.** p. 1. 1864.
2) Edlund, Pogg. Ann. **159.** p. 420. 1876.

Die Summe der durch die Electricität verbrauchten und erzeugten Wärme ist in der Gesammtkette Null.

Wenn man also eine Säule mit ihrem Schliessungsdraht in ein Calorimeter stellt, so ist die beobachtete Temperaturerhöhung nur allein der in der Säule stattfindenden chemischen Wirkung zuzuschreiben, also auch gleich derjenigen, welche die rein chemische Wirkung für sich selbst zu Wege bringen würde.

Dies Resultat ist bekanntlich von Favre und Joule durch zahlreiche Versuche festgestellt und hat die Meinung bestätigt, dass die Quelle der Electricität in der chemischen Wirkung gelegen sei.

Nicht eher aber kann ich auf diese Meinung einigen Werth legen, bis man erklärt hat, wie dann in einer Säule, worin bei offener Kette keine Spur chemischer Wirkung zu finden ist, der electrische Strom beginnt.

Nach der in seinem Lehrbuche, Th. III p. 230 vorkommenden Regel zu urtheilen, nämlich:

„Der Strom verläuft immer in der Richtung, in welcher die chemischen Wirkungen, welche sich zu dem Strome gesellen, einen Gewinn von Wärme zur Folge haben,“

stellte Bosscha sich diesen Beginn ungefähr wie folgt vor:

Sobald die Theilchen einer Zelle vernommen haben, dass irgendwo die Kette geschlossen und der Electricität Gelegenheit zu einem Ausgange geboten ist, berechnen sie schnell, nach welcher Seite ein Gewinn von Wärme zu erwerben ist, und schliesslich setzt sich die Electricität in der berechneten Richtung in Bewegung.

Aber was ist zu thun, wenn die Berechnung nach beiden Seiten einen Wärmeverlust aufweist, wie z. B. bei der Zelle Blei-Wasser-Kupfer. Nach Favre ist nämlich:

$$PbO - H_2O = 27675 - 34462 = -6787$$
$$CuO - H_2O = 21885 - 34462 = -12577.$$ [1]

Doch liefert diese Zelle: Blei- dest. Wasser-Kupfer, einen ziemlich starken Strom, welcher in der Flüssigkeit die Richtung von Blei nach Kupfer hat.

b. Zweitens nehme ich eine Kette, in welcher sich eine constante Säule und ein Zersetzungsapparat befindet. Schneiden wir z. B. den Draht f irgendwo durch und löthen daran zwei gleiche Metallplatten g, die in einer Flüssigkeit b eintauchen. Es sollen sich ferner beim Durchgange des Stromes die Gase p und q abscheiden.

Ich stelle mir nun die Flüssigkeiten im Sinne Clausius' vor, sodass sich die Theilchen zugleich in einer fortschreitenden, drehenden und schwingenden Bewegung befinden, wobei sich bald hier, bald dort ein Theil eines Molecüls mit einem andern Theile eines andern Molecüls verbinden kann. Beinahe ebenso gut kann ich mich mit der älteren Vorstellung Buys-Ballot's[2]) vereinen, nach welcher sich die Theilchen in solchen Schwingungen befinden, dass eine äussere Kraft sie leicht über das labile Gleichgewicht hinausbringt.

Unter dem Einflusse des Stromes scheiden sich nun bald hier, bald dort die Gase p und q ab und modificiren dort die electrische Differenz zwischen den Electroden und der Flüssigkeit. Nach der Terminologie Wiedemann's verändert sich dann z. B. $Pt \mid H_2SO_4$ in $Pt_H \mid H_2SO_4$ und im allgemeinen:

---

1) Berthelot in seiner „Essai de méc. chim.“ gibt in Tabl. 22 u. s. w. folgende Zahlen:

Oxyde de plomb hydraté	26,7
„ „ „ anhydre	25,5
Protoxyde de cuivre . .	21
Bioxyde de cuivre . . .	19,2
Eau	34,5

2) Physiologie van het onbewerkt. ryk der natuur, Utrecht 1849. Von dieser merkwürdigen Schrift ist ein Auszug zu finden Pogg. Ann. **103.** p. 140. 1858.

$$h|g \text{ in } h|g_p \text{ und } h|g_q \,.$$

Wahrscheinlich wird auch die electrische Differenz der anhaftenden und freien Flüssigkeit geändert, und alle diese Aenderungen zusammen nennen wir die Polarisation p.

Diese Aenderung geschieht aber nur hier und dort, jedesmal an einer andern Stelle der Electroden, allmählich an mehreren und endlich auf der ganzen Oberfläche; alsdann ist das Maximum der Polarisation erreicht.

Nun erscheint es mir natürlich, anzunehmen, dass, ehe das Maximum erreicht ist, sich der Strom im Zersetzungsapparate verzweigt; ein Theil folgt dem Flüssigkeitstheile, welcher durch die von den Gasen veränderten Electrodentheile begrenzt wird, während der Rest des Stromes den andern Flüssigkeitstheil durchläuft. Ich nehme also an, dass hier dasselbe geschieht, als wenn man auf eine der Platinelectroden eines Voltameters hier und da Zinkknöpfe aufsetzte.

Setzen wir den Fall, dass in einem gewissen Augenblicke der erste Theil der Flüssigkeit $\frac{1}{n}$ des Ganzen ist, so haben wir, wenn der Gesammtwiderstand des Zersetzungsapparates r und der der übrigen Theile der Kette R ist, folgende Stromverzweigung (Taf. IIIB Fig. 15):

E ist die Säule mit der electromotorischen Kraft.

$$E = b|a + c|b + d|c + f|d + a|f$$

und dem Widerstande R.

AC ist der geänderte Theil des Zersetzungsapparates, in welchem der Widerstand $= nr$ und die electromot. Kraft $= -p = h|g_q + g_p|h$.

ABC ist der ungeänderte Theil des Voltameters mit dem Widerstande $r\frac{n}{n-1}$ und der electromotorischen Kraft:

$$0 = h|g + g|h.$$

Nach den Kirchhoff'schen Gesetzen hat man nun:

$$J = i_1 + i_2, \qquad JR + \frac{i_2 nr}{n-1} = E, \qquad i_1 nr + p = i_2 r \frac{n}{n-1},$$

also:

(4) $$J = \frac{E - \frac{p}{n}}{R + r}$$ und:

(5) $$i_1 = \frac{nJr - (n-1)p}{n^2 r}; \qquad i_2 = \frac{n-1}{n^2 r}(Jnr + p).$$

Die Formel (4) ergibt für den zeitlichen Werth der Polarisation p' den Ausdruck $\frac{p}{n}$, in welchem p das Maximum, und n eine Zahl ist, die von ∞ bis 1 mit einer Geschwindigkeit abnimmt, welche durch die Stromstärke und die Oberfläche der Electroden bestimmt wird. Diese Formel ist in Uebereinstimmung mit den Versuchen, welche sämmtlich ein beständiges Anwachsen der Polarisation von Null bis zum Maximum zu erkennen geben. Ich gebe hier noch folgende Versuche, welche obige Formel bestätigen.

Von zwei Voltametern V und V' war V eine lange, U-förmige Röhre von $2^1/_2$ m und V' ein kleines Glas. Beide Apparate waren mit derselben Flüssigkeit (verdünnter Schwefelsäure) gefüllt, und in beiden befanden sich gleich dicke Platindrähte als Electroden, deren Abstand aber in V $2^1/_2$ m und in V' nur 1 cm betrug.

Beide Apparate waren in der Weise mit einer Wippe A verbunden (Taf. III B Fig. 16), dass in der einen Lage derselben jedes Voltameter von einem gesonderten Strome der Batterien B und B' durchflossen wurde, während in der zweiten Lage der Wippe die Batterien nicht mehr wirkten, und V und V' mit einem Spiegelgalvanometer G eine einzige Kette bildeten, in welcher ihre Polarisationsströme in entgegengesetzter Richtung verliefen.

In der Lage I der Wippe war a mit e, b mit f, c mit g und d mit h in Verbindung, und in der Lage II a mit m, b mit n, c mit o und d mit p; a und b waren in fester Verbindung mit V und c und d mit V'.

Nachdem in der Lage I der Wippe die Wasserzersetzung in V und V' einige Zeit, z. B. 10 Sec., gedauert hatte, wurde plötzlich die Wippe in die Lage II gebracht, der erste Ausschlag am Galvanometer G beobachtet und

gleich darauf die Wippe wieder in die Lage I zurückgeführt. Dann liess man aufs neue, jetzt aber für längere Zeit, z. B. 20 oder 30 Sec., den Strom der Batterien B und B' wirken und beobachtete wieder momentan den Ausschlag am Galvanometer. Auf diese Weise konnte man die Stärke beider Polarisationsströme nach beliebiger Zeit vergleichen.

In den folgenden Tabellen bezeichnet t die Zeit zwischen der Lage I und II der Wippe, G den Galvanometerausschlag.

Versuch I, mit stark angesäuertem Wasser, in beiden Voltametern deutliche Gasentwickelung:

$t =$ 10	20	30	40	60 Sec.,	5	10 Min.
G + 1	−1	+1	+0,5	−1	−0,5	−0,4

Strom in V' in entgegengesetzter Richtung t = 2 Min., G −50,
Strom in V' wie früher, der in V umgekehrt t = 2 Min., G +49,6.

Versuch II, mit schwach angesäuertem Wasser, bei V' Gasentwickelung, bei V nach einiger Zeit kleine Gasblasen:

$t =$ 10	20	40	50	60	75 Sec.,	2	3	5	10 Min.
G + 11	+9	+10	+12	+9	+5,2	+3,2	+4	+6	+5,5

Strom in V' in entgegengesetzter Richtung t = 2 Min., G −50,
Strom in V' wie früher, der in V umgekehrt t = 2 Min., G +43.

Versuch III, mit sehr schwach angesäuertem Wasser, bei V' schwache Gasentwickelung, bei V Electrode vollkommen blank.

Bei den Versuchen II und III Galvanometerrollen dichter am Spiegel.

$t =$ 10	20	30	60	60	60	60 Sec.,	5	10 Min.
G + 1,2	+1	+0,8	+1	+1,2	+1,3	+1,2	+1,1	+1,2

Strom in V' umgekehrt . . . . t = 1 Min., G −1,6
Strom in V' wie früher, der in V umgekehrt t = 1 Min., G +2.

Versuch IV. Alles wie in Versuch III.

$t =$ 10	20	40	60 Sec.,	5	10 Min.,	5 Stdn.
G + 1	+0,9	+0,9	+1,3	+1,4	+1,2	+0,6.

Beim Wechseln der Pole in V' und V:

t = 1 Min., G −2,7; +2,4.

Nennen wir pk und pl die Polarisation in der kurzen und in der langen Röhre, so folgt aus:

Versuch I $pl = pk$,
„ II $pl = 0{,}75\,pk$,
„ III $pl = 0{,}15\,pk$,

während Versuch IV zeigt, dass in 5 Stunden das Verhältniss $\frac{pl}{pk}$ nur von 0,4 auf 0,6 steigt. Bei sehr grossen Widerständen bleibt also die Polarisation p' für längere Zeit weit unter dem Maximum p.

Die in den Contacten entwickelte Wärme ist nach (4) und (5): in der Säule $= -AEJ$,

$$\text{im Zersetzungsapparat } + Ap\,i_1 = A\left(\frac{pJ}{n} - \frac{p^2(n-1)}{n^2 r}\right)$$

Die galvanisch entwickelte Wärme beträgt:
in der Säule und dem Verbindungsdraht $f = AJ^2R$,

$$\text{im Zersetzungsapparat } = A\left(i_1{}^2 nr + i_2{}^2\frac{nr}{n-1}\right)$$

$$= A\left\{J^2 r + \frac{n-1}{2^2 r}p^2\right\}.$$

Zusammen erhält man also:

$$-AEJ + Ap\frac{J}{n} + AJ^2(R+r),$$

was nach (4) wieder Null liefert.

Dies Resultat stimmt wieder mit den Versuchen Favre's.

Die allein im Zersetzungsapparate entwickelte Wärme beträgt:

$$(6)\qquad Api_1 + A\left(i_1{}^2 nr + i_2{}^2\frac{nr}{n-1}\right) = A\left(\frac{Jp}{n} + J^2 r\right).$$

Hier ist $\frac{p}{n}$ natürlich die Polarisation p' zur Zeit der Beobachtung und J^2r die auf gewöhnliche Weise berechnete galvanische Wärme G im Zersetzungsapparate, und also gelangt man zum zweiten Satze Edlund's: dass in jedem Zersetzungsapparate ausser der galvanischen Wärme noch soviel Wärme producirt wird,

als von der zeitlichen Polarisation p' angedeutet wird.

Raoult[1]) misst bei seinen calorimetrischen Untersuchungen auch die im Zersetzungsapparate entwickelte Wärme. Er nennt locale Wärme L die Differenz der beobachteten Wärme B, und der galvanischen Wärme G. Den Ausdruck AJp' nennt er die Volta'sche Wärme V, des Voltameters. Nach seiner Schreibweise muss also, da in der beobachteten Erwärmung auch die Abkühlung durch chemische Zersetzung begriffen ist, Formel (6) werden:

Beob. Wärme $= L + G = V + G$ — chemische Wärme
oder chemische Wärme $= V - L$ (6),

welches gerade der durch viele Versuche bestätigte Ausdruck des Satzes Raoult's ist:

Die Differenz der Volta'schen und der localen Wärme ist immer gleich dem calorischen Aequivalent der chemischen Bildung des Electrolyten.

c. Findet die Polarisation in der Zelle selbst statt, und wendet man auf diesen Fall dieselbe Regel der Stromverzweigung an, so erhält man wieder:

$$J = \frac{E - \frac{p}{n}}{R + r},$$

und wieder ist die Gesammtwärme in der ganzen Kette, die chemische ausgenommen, gleich Null.

Für die in der Säule allein entwickelte Wärme erhält man:

$$W_1 - AJ\left(E - \frac{p}{n}\right) + AJ^2 R_1 + \text{chem. Wärme},$$

wenn R_1 den innern Widerstand vorstellt. Setzen wir die chemische Wärme gleich aJ, so können wir obige Gleichung auch schreiben:

$$W_1 = AJ^2 R_1 + J(a - AE')$$

1) Raoult, Ann. de chim. (4), 4. p. 411. 1865.

und gelangen so zu dem von Bosscha[1]) aus den Versuchen Favre's abgeleiteten Satze:

Ausser der dem Leitungswiderstande und dem Quadrate der Stromstärke proportionalen Wärmemenge entsteht noch eine Wärmemenge, welche der Stromstärke und der Differenz der wahren electromotorischen Kraft der Säule und der aus dem electrothermischen Aequivalent berechneten proportional ist.

Dieser Satz gilt aber nur für die Zelle selbst, nicht für das Voltameter.

Favre hat später[2]) noch Versuche angestellt mit den Elementen: Zink-Salzsäure-Platin, Cadmium-Salzsäure-Platin u. a., die in ein Calorimeter gebracht waren, während der Platindraht, der die Pole verband, sich ausserhalb des Calorimeters befand und so viel Widerstand lieferte, dass der in den Elementen vernachlässigt werden konnte. In diesem Falle muss die beobachtete Wärme $= -AJ\left(E - \frac{p}{n}\right)$ + chemische Wärme gewesen sein.

Nun ist nach Poggendorff[3]) die electromotorische Kraft der Elemente Zink-Salzsäure-Platin ohne Polarisation 1,54 Daniell. Die Polarisation durch Wasserstoff allein beträgt im Maximum 1,2 Daniell, welches Maximum bei dem grossen Widerstande bei weitem nicht erreicht sein wird, weil der Versuch Favre's nur 1500 Sec. dauerte. (Siehe die Versuche unter 11 b).

Nach Berthelot[4]) ist die chemische Wärme in dieser Säule $= \text{Zn} \mid \text{Cl} - \text{HCl} = 56{,}4 - 39{,}3 = 17{,}1$, also in der der Daniell'schen Säule ausgedrückt: $\frac{17{,}1}{23{,}9} = 0{,}71$ Daniell. In gewissen Einheiten erhält man also für die in der Zelle entwickelte Wärme $0{,}71 - \left(1{,}54 - \frac{1{,}2}{n}\right)$, wo n eine grosse Zahl.

1) Bosscha, Pogg. Ann. **108.** p. 162. 1859.
2) Favre, Compt. rend. **68.** p. 1300. 1869.
3) Pogg. Ann. **70.** p. 60. 1847.
4) Berthelot, Essai de méc. chem. 1. Tabl. 23. 1879.

Es ist also nicht befremdlich, dass Favre bei dieser Zelle, Zink-Salzsäure-Platin, Abkühlung beobachtete.

d. Thomson[1]) und Bosscha[2]) haben Versuche mit Wasserzersetzungsapparaten angestellt, bei welchen die positive Electrode aus Platin, aber die negative aus Zink verfertigt war.

Beide fanden in diesem Zersetzungsapparate eine stärkere Erwärmung, als wenn beide Electroden aus Platin bestehen.

Man braucht nur das Potentialprofil für beide Zersetzungsapparate zu zeichnen (Taf. IIIB Fig. 17), um dies Resultat begreifen zu können. Die starken abwärts gerichteten Sprünge im zweiten Falle erklären alles.

Bei diesen Experimenten Bosscha's war nur ein einziges Thermometer mitten in die Flüssigkeit gestellt. Sein Schluss[3]), dass in diesem Falle die negative Electrode stärker erwärmt werde als die positive, ist also unberechtigt.

e. Tip[4]) u. a. haben gefunden, dass in einer Zersetzungszelle die positive Electrode beinahe immer wärmer wird als die negative. Meine Erklärung davon findet man in § 7.

Setzen wir nun den Fall, dass man einen Strom einige Zeit durch einen Zersetzungsapparat leitet, plötzlich den Strom unterbricht und den Apparat mit einem Galvanometer verbindet. Die positive Electrode ist dann wärmer als die negative, liegt auch auf einem andern, in der Regel höhern, Potentialniveau, und es tritt somit ein Strom auf in einer der des Hauptstromes entgegengesetzten Richtung.

Dieser Strom hat ganz das Ansehen eines Polarisationsstromes und erklärt, wie man letztern auch da wahrnimmt, wo man schwerlich in der chemischen Wir-

---

1) Thomson, Rep. of the Brit. Assoc. 1852.
2) Bosscha, Pogg. Ann. **103.** p. 517. 1858.
3) Pogg. Ann. **103.** p. 521. 1858.
4) Tip, Inaug. Diss. Utrecht 1854.

kung die Ursache finden kann, z. B. bei den Versuchen von Beetz[1]) mit Quecksilberjodid und Fluorblei und bei denen von Sabine[2]) mit Selen.

Die Versuche E. Rood's[3]) finden eine ähnliche Erklärung. Eine Platinplatte *B* theilte ein Glasgefäss in zwei ganz abgesonderte Theile. In jeder Abtheilung befand sich angesäuertes Wasser und eine Platinplatte, *A* und *C*. Wenn nun *A* und *B* einige Zeit mit einer Batterie in eine Kette gebracht wurden, und man verband dann später *B* und *C* mit einem Lippmann'schen Electrometer, so spürte man einen Strom, der in der Flüssigkeit von *C* nach *B* ging. Die Ursache hiervon war, dass *B* durch den Strom erwärmt worden, während *C* kalt geblieben war.

Rood fand den bewussten Strom stärker, wenn *B* die positive Electrode ausmachte, als im Fall sie die negative war. Das kommt wieder daher, dass die positive Electrode stärker erwärmt wird als die negative.

Jedoch lässt mich die lange Dauer des von Rood gefundenen Stromes glauben, dass auch noch eine geringe Durchdringung der Gase stattgefunden hat.

f. Die chemische Wirkung in der Säule ist eine Folge des electrischen Stromes, aber die dabei entwickelte Wärme ist ein unentbehrliches Aequivalent für den in den Contactpuncten erlittenen Wärmeverlust. Diese chemische Wärme ist das Magazin, aus welchem der Strom fortwährend Nahrung zieht und neue Kräfte bekommt. In diesem Sinne kann man noch immer sagen, dass die chemische Wärme durch die ganze Kette verbreitet wird.

Die Wärmeabsorption in der Säule in dt Sec. ist:

$$AEJdt,$$

1) Beetz, Pogg. Ann. **92.** p. 457. 1854.

2) Sabine, Phil. Mag. **5.** p. 5. 1878.

3) Rood, Berl. Monatsber. p. 217. 1876. — Der Versuch rührt zuerst von Crova her (Mondes **5.** p. 210. Wiedemann, Galv. **1.** § 498). Die Red.

die chemischen Actionen liefern in derselben Zeit, wenn a das electrochemische Aequivalent,

$$aJdt \text{ Einheiten;}$$

im ganzen findet also eine Wärmeproduction statt von:

$$Jdt\,(a - AE) \text{ Einheiten.}$$

Ist nun $a < AE$, so sinkt allmählich die Temperatur und somit auch die electromotorische Kraft der Säule; nach kürzerer oder längerer Zeit verschwindet der Strom.

Ist $a > AE$, so steigt die Temperatur und mit dieser auch die electromotorische Kraft der Säule und, wenn keine anderen Umstände eintreffen, kann E den Werth $\frac{a}{A}$ erreichen, wie es bei den constanten Elementen nach den Messungen Bosscha's[1]) der Fall ist.

Es geht hiermit wie mit einer von einer Dampfmaschine oder von irgend einem andern Motor getriebenen dynamo-electrischen Maschine.

Schliesst man die Pole mittelst eines kurzen Drahtes von geringem Widerstande, so entsteht ein so kräftiger Strom, dass dessen Reaction den Gang des Motoren verzögert und diesen bald zur Ruhe bringt. Die Maschine geht nicht an.

Wenn aber der Widerstand grösser ist, so steigt die Intensität des Stromes bis auf ein constantes und bleibendes Maximum.

Ich werde später noch weiter auf diese Gegenstände eingehen.

Utrecht, December 1879.

---

1) Bosscha, Pogg. Ann. **101.** p. 517. 1857.

III. *Ueber die Ursache der Electricitätserregung beim Contact heterogener Metalle; von Prof. Franz Exner.*

(Aus dem **80.** Bd. d. Sitzber. d. k. Akad. d. Wiss. II. Abth. Juli-Heft. Jahrg. 1879; mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.

So oft man auch die Thatsache, dass beim Contact heterogener Metalle Electricität entwickelt wird, experimentell zu constatiren im Stande war, so konnte man doch eine stichhaltige Erklärung dieser Erscheinung bisher nicht geben; die Contacttheorie, sowie die sogenannte chemische Theorie nahmen beide diese Erscheinung für sich in Anspruch, und die Anhänger beider Theorien dürften heutigen Tages an Zahl ziemlich gleich sein. Eine Untersuchung über die Natur der galvanischen Polarisation hat mich nun zu einer ganz bestimmten Ansicht über die Entstehung der sogenannten Contactelectricität geführt, einer Ansicht, die durch die nachfolgend mitgetheilten Beobachtungen verificirt werden soll. In der eben angeführten Untersuchung[1]) habe ich den Nachweis geliefert, dass die Entstehungsursache des Polarisationsstromes nicht, wie bisher ganz allgemein angenommen wurde, in dem Contacte der Electroden mit den daran ausgeschiedenen Jonen zu suchen sei, sondern in der Wiedervereinigung der letzteren, wobei die electromotorische Kraft des so entstehenden Stromes durch den Wärmewerth dieser Vereinigung gemessen wird, ganz so wie die electromotorische Kraft irgend eines Hydroelementes durch den Wärmewerth der in demselben sich abspielenden chemischen Processe. Mit einer sogenannten Contactwirkung hat also die Entstehung des Polarisationsstromes, und selbstverständlich auch die jedes andern, gar nichts zu thun.

Wenn demnach in dieser Beziehung sich die Basis der Contacttheorie als vollständig unzuverlässig ja über-

1) Exner, Wien. Ber. 78. Juli 1878.

flüssig erwies, so lag der Gedanke nahe, auch die ersten Anfänge dieser Theorie, d. h. die Volta'schen Fundamentalversuche einer Kritik von diesem Standpunkte aus zu unterziehen, d. h. es lag der Gedanke nahe, die Ursache der Electricitätsentwicklung beim Contacte zweier Metalle nicht in diesem Contacte, sondern in vorangegangenen chemischen Einwirkungen der umgebenden Medien auf die Metalle zu suchen. Deshalb habe ich am Schlusse der oben erwähnten Abhandlung über die Polarisation unter Hinweis auf die Analogie zwischen Spannungsreihe und Oxydationsreihe die Vermuthung ausgesprochen, dass die sogenannte Contactelectricität durch die Oxydation der sich berührenden Metalle von Seiten des Sauerstoffes der Luft hervorgebracht werde, nach denselben Gesetzen, nach welchen im Hydroelemente die Electricität durch die Oxydation des Zinkes entwickelt wird. Wenn diese Vermuthung sich bestätigt, und sie hat sich bestätigt, so muss die electromotorische Kraft bei Berührung zweier Metalle in Luft messbar und ausdrückbar sein durch die Verbrennungswärmen der beiden Metalle.

Der erste Versuch einer Bestätigung dieser rein chemischen Theorie bestände also in einem Vergleich zwischen den erzeugten electromotorischen Kräften und den Verbrennungswärmen der Metalle.

Die letzteren sind schon durch ältere Versuche von Favre, Favre und Silbermann und in neuerer Zeit durch die umfassenden thermo-chemischen Untersuchungen von J. Thomsen bekannt gemacht worden; des letztern Autors Angaben dürften wohl auf die grösste Genauigkeit und Verlässlichkeit Anspruch haben, weshalb auch bei allen folgenden Berechnungen nur seine Zahlen zu Grunde gelegt wurden.

Bei weitem weniger gut steht es mit den Angaben der verschiedenen Autoren bezüglich der electromotorischen Kraft beim Contact zweier Metalle; hier bedingt schon die grosse Schwierigkeit der Versuche beträchtliche Differenzen. Doch geht aus allen bisher bekannten Beobachtungen mit

Evidenz hervor, dass die Spannungsreihe identisch ist mit der Reihe der Oxydirbarkeit.

Schon die ersten Versuche von Volta[1]) haben das ergeben; Volta findet die Spannungsreihe beim trockenen Contact der Metalle Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Ag, Au, C, also stetig verlaufend vom leichter oxydirbaren Metalle zu den unoxydirbaren.

Diese, wenngleich nur qualitativ ausgeführten Versuche mussten schon die Aufmerksamkeit auf den Vorgang der Oxydation lenken. Quantitative Angaben ohne Zurückführung auf irgend eine bekannte Einheit der electromotorischen Kraft verdanken wir ferner Hankel[2]), er findet, wenn die Spannung zwischen Zn und Cu = 100 gesetzt wird:

Al	Zn	Pb	Hg	Fe	Cu	Au	Ag	C	Pt
220	200	156	119	116	100	90	82	78	77

Diese Zahlen stimmen, wenigstens mit Ausnahme des Quecksilbers, mit dem oben Gesagten überein. Aehnliche Resultate erhält auch Gerland.[3]) Er findet z. B., wenn wir in üblicher Weise die Potentialdifferenz zwischen Zn und Cu mit Zn|Cu bezeichnen, Zn|Cu = 100; Zn|Ag = 109, Zn|Au = 115.

Wenn es sich aber darum handelt, über die Ursache dieser Potentialdifferenzen eine bestimmte Ansicht auszusprechen, so ist es natürlich von höchster Wichtigkeit, nicht nur die relativen Werthe derselben, sondern auch ihre absoluten zu kennen, d. h. ihr Verhältniss zu einer bestimmten electromotorischen Kraft, deren Wärmewerth bekannt ist, z. B. der des Daniell'schen Elementes. Diese wichtige Bestimmung ist, so viel mir bekannt, zuerst von R. Kohlrausch ausgeführt worden, und seither sind leider nur vereinzelte und wenig verlässliche Beobachtungen hinzugekommen.

Kohlrausch[4]) hat die folgende Methode eingeschla-

1) Volta, Ann. d. chem. et phys. **40.** p. 225.
2) Hankel, Pogg. Ann. **126.** p. 440. 1865; **131.** p. 607.
3) Gerland, Pogg. Ann. **133.** p. 513. 1868.
4) Kohlrausch, Pogg. Ann. **82.** p. 407. 1851.

gen: er bildet aus den zu untersuchenden Metallen einen Condensator, verbindet denselben mit den Polen eines Daniell'schen Elementes einmal in dem einen Sinn, das andere Mal im entgegengesetzten und misst beide Male die erhaltenen Electricitätsmengen am Dellmann'schen Electrometer. Ist die Potentialdifferenz der beiden Condensatorplatten z. B. gleich P, die der Pole des Elementes $= D$, so hat man die Condensatorladung das eine Mal proportional $P + D$, das andere Mal proportional $P - D$, woraus das gesuchte Verhältniss $\frac{P}{D}$ entnommen werden kann. Eine directe Verbindung der beiden Platten durch einen Draht liefert dann noch eine Controlbeobachtung.

Auf diese Weise findet Kohlrausch die Differenz Zn|Pt = 0,6 Daniell, und das Verhältniss $\frac{\text{Zn|Pt}}{\text{Zn|Cu}}$ variirend von $\frac{106}{100} - \frac{111,2}{100}$. Auf die wahrscheinliche Ursache dieser Inconstanz wird im Folgenden noch Gelegenheit sein zurückzukommen.

In jüngster Zeit sind noch einige Messungen, diesen Gegenstand betreffend, ausgeführt worden, so z. B. von Clifton[1]) ebenfalls nach der Methode des Condensators; er findet:

Zn|Fe = 0,694 Daniell
Fe|Cu = 0,095 „
und daraus Zn|Cu = 0,789 „

unter Anwendung des Volta'schen Spannungsgesetzes, dessen Richtigkeit wohl nicht bezweifelt werden wird. Die Resultate von Kohlrausch scheinen mir aber grössere Genauigkeit zu besitzen. (Kohlrausch findet nach den obigen Zahlen Zn|Cu ungefähr gleich 0,5 Daniell.) Im grossen und ganzen analoge Resultate wie Clifton erhielten auch Ayrton und Perry.[2])

Zu erwähnen wäre ferner noch ein älterer Versuch

1) Clifton, Proc. Roy. Soc. 26.
2) Ayrton und Perry, Proc. Roy. Soc. 27.

von W. Thomson[1]), der über die absolute Grösse von Zn|Cu Aufschluss gibt. In seinem bekannten Ringelectrometer wurden die beiden Halbringe aus Zn und Cu gemacht, über dem Schlitze schwebte eine beliebig electrisirte Nadel. Werden die beiden Halbringe metallisch verbunden, so weicht die Nadel in dem einen oder andern Sinne aus; verbindet man aber dieselben mit je einem Pole eines Daniell'schen Elementes in passendem Sinne, so überwiegt die Kraft des letztern über die Contactkraft der beiden Metalle, und man kann es durch geeignete Theilung der electromotorischen Kraft des Daniell dahin bringen, dass die Nadel in Ruhe bleibt. Es wäre somit Zn|Cu kleiner als 1 Daniell, was auch mit allen übrigen Beobachtungen übereinstimmt.

Thomson hat ferner beobachtet, dass, wenn man den Kupferhalbring in der Flamme oxydirt, dann die electromotorische Kraft desselben mit Zn bedeutend steigt, ja sogar etwas grösser werden soll als 1 Daniell.

Die vorstehend mitgetheilten Daten bilden sozusagen die Basis der beiden jetzt herrschenden Theorien des Volta'schen Versuches; sie geben aber auch schon einen halbwegs brauchbaren Prüfstein desselben ab. Es ist bekannt, dass schon Volta selbst eine verschiedene Einwirkung der sich berührenden Metalle auf die in ihnen enthaltenen Electricitäten annahm, infolge deren eine Neuvertheilung derselben erfolgt. Diese Ansicht ist, soviel mir bekannt, erst von Helmholtz in eine ganz bestimmte Form gebracht worden, in der sie heutigen Tages ganz allgemein acceptirt wird.

Helmholtz[2]) sagt: „Es lassen sich nämlich offenbar alle Erscheinungen in Leitern erster Classe herleiten aus der Annahme, dass die verschiedenen chemischen Stoffe verschiedene Anziehungskräfte haben gegen die beiden Electricitäten ...... — Die Contactkraft würde demnach

1) Thomson, Proc. of. Manch. Soc. II.

2) Helmholtz, „Ueber die Erhaltung der Kraft".

in der Differenz der Anziehungskräfte bestehen, welche die der Berührungsstelle zunächst liegenden Metalltheilchen auf die Electricitäten dieser Stelle ausüben."

Gegen diese Stelle ist bekanntlich von Clausius[1]) Einspruch erhoben worden, wenigstens insofern sich aus dieser Contactkraft „alle Erscheinungen in Leitern erster Classe herleiten" lassen sollen, und zwar zunächst mit Rücksicht auf die Erscheinungen der Thermoelectricität.

Im übrigen aber ist diese Hypothese heutigen Tages gang und gäbe, und es lässt sich nicht leugnen, dass durch diese ganz bestimmte Vorstellung einer jeden Untersuchung auf diesem Gebiete ein ganz wesentlicher Dienst geleistet wurde. Etwas anderes ist die Frage, ob wir auch nach dem heutigen Stande der Dinge noch bemüssigt sind, an derselben fest zu halten, oder ob sich nicht eine ungezwungenere Erklärung des Volta'schen Phänomens finden lässt, eine Erklärung, die sich auch mit einer Reihe anderer wohluntersuchter Phänomene in Einklang bringen lässt.

Eine solche ist, wie mir scheint, die von den Gegnern der Contacttheorie, den Begründern der chemischen Theorie aufgestellte Ansicht, dass zwei Metalle bei ihrem Contact nur dann Electricität zu entwickeln im Stande sind, wenn dieselben gleichzeitig einer chemischen Veränderung unterliegen; diese Ansicht strebt darnach, die Electricitätsentwickelung beim Volta'schen Versuch auf dieselben Ursachen zurückzuführen, die im Hydroelemente wirken.

Es ist in der That die Uebereinstimmung zwischen der Volta'schen Spannungsreihe und der Oxydationsreihe der Metalle so auffallend, dass man sofort auf die Vermuthung kommen muss, es habe die erzeugte Spannung ihren Grund in der Oxydation der Metalle. Es hat diese Ansicht zuerst de la Rive vollständig entwickelt und durch zahlreiche Versuche gestützt; wie zahlreichen Angriffen sie dessen ungeachtet ausgesetzt war, und wie sie allmählich in Vergessenheit gerieth, ist bekannt.

1) Clausius, Abhandlung XII und Pogg. Ann. **90.** p. 513. 1853.

De la Rive[1]) macht die Annahme, dass ein Metall in Luft nicht von Seiten des condensirten Wasserdampfes, wie man ihm jetzt allgemein zuschreibt, sondern auch in trockener Luft von Seiten des Sauerstoffes direct einen chemischen Angriff erleidet; dass ferner bei einer jeden chemischen Action Electricität entwickelt werde, entsprechend der Intensität des chemischen Angriffes. Als bekannt darf ich wohl voraussetzen die Art und Weise seiner Ableitung des Volta'schen Phänomens aus dieser Hypothese.

Hätte man damals schon genaue quantitative Messungen über die electromotorischen Kräfte beim Contacte gehabt und ebenso ein Maass für die Intensität des chemischen Angriffes, wie wir es heutigen Tages in den Verbindungswärmen haben, so hätte sich die Richtigkeit dieser auch von anderen[2]) vertretenen Ansicht ohne weiteres ergeben.

Da nun ein solcher directer Beweis nicht anzutreten war, so hielten die Gegner mit einer gewissen Erbitterung an der ältern Volta'schen Hypothese fest; namentlich war es Pfaff, der die chemische Theorie durch Experimente ad absurdum zu führen suchte. Er stellte[3]) unter andern den Fundamentalversuch, statt in Luft auch im Vacuo und in indifferenten Gasen an, z. B. in Wasserstoff, fand aber auch da jedesmal dieselbe Electricitätsentwickelung, wo man gar keine hätte erwarten sollen. Doch hat de la Rive die Ursache hiervon in der Schwierigkeit nachgewiesen, eine Gasschicht von der Oberfläche eines Metalls selbst im Vacuo zu entfernen und zugleich gezeigt[4]), dass die Versuche, vollkommen rein ausgeführt, in der That zu Gunsten der chemischen Theorie sprechen.

Nichtsdestoweniger ist die chemische Theorie im Laufe der Zeit mehr und mehr von der Contacttheorie verdrängt

1) De la Rive, Traité de l'électricité II und Pogg. Ann. **15.** p. 98. 1828; **38.** 1836; **40.** p. 515. 1837.

2) Vergl. z. B. E. Becquerel in Compt. rend. **22.**

3) Pfaff, Ann. de chim. et phys. **16.**

4) De la Rive, Ann. de chim. et phys. **39.**

worden, da sich ein exacter Nachweis weder für die eine noch für die andere führen liess, und der oben citirte Satz Helmholtz' ursprünglich als eine wohlberechtigte Hypothese ausgesprochen und als solche nicht zu unterschätzen, wurde allmählich als der Ausdruck einer Thatsache betrachtet.

So standen die Dinge, als ich durch meine Versuche über die galvanische Polarisation mit aller Bestimmtheit zu der Ansicht gedrängt wurde, dass auch die sogenannte Contactelectricität chemischen Ursprunges sei. Man kann den Beweis für diese Ansicht auf verschiedenen Wegen antreten. Erstens dadurch, dass man zeigt, dass zwei heterogene Metalle keine Electricitätsentwickelung geben, sobald sie sich in einem chemisch indifferenten Raume befinden. Dieser Nachweis ist schon von de la Rive durch sehr sorgfältige Beobachtungen geliefert worden, und ich halte es für überflüssig, einen Versuch, für den de la Rive einsteht, zu widerholen. Zweitens kann man zeigen, dass die Potentialdifferenzen, die zwei beliebige Metalle in Luft anzeigen, in directem Zusammenhange stehen mit den Verbrennungswärmen der Metalle; und drittens lässt sich zeigen, dass zwei Stücke ein und desselben Metalles durch Contact Electricität liefern, sobald die beiden Stücke sich in chemisch verschieden einwirkenden Atmosphären befinden.

Die unter 2 und 3 angeführten Beweismethoden sind im Nachfolgenden durchgeführt, und ich will zunächst die Beobachtungen mittheilen, die darthun, dass die Spannung zwischen zwei Metallen in Luft in der That durch ihre Verbrennungswärmen gemessen wird.

Zunächst handelt es sich darum, in Bezug auf die Art der Abhängigkeit der Spannung von der Verbrennungswärme eine bestimmte Vorstellung zu gewinnen. Wenn auch der ganze Process der Electricitätserzeugung nach dem heutigen Stande der Dinge noch keineswegs durchsichtig ist, so dürfte doch die folgende Darstellung im wesentlichen der Wirklichkeit entsprechen.

Man weiss, dass im Hydroelemente ein jeder chemische

Vorgang eine Potentialdifferenz erzeugt, die seinem Wärmewerthe proportional ist; dies auf den Fall der Oxydation eines Metalles in Luft übertragen, wird man sagen müssen, dass die Potentialdifferenz zwischen dem Metalle und dem erzeugten Oxyde der Verbrennungswärme des ersteren proportional sei. Es müsste also ein jedes Metall, das sich in isolirtem Zustande an der Luft oxydirt, eine gewisse Menge positiver und negativer Electricität geschieden enthalten; dass dieselben nach aussen unwirksam sein müssen, ergibt sich von selbst. Auch können die so getrennten Electricitäten eine gewisse Spannungsdifferenz nicht überschreiten, denn die beobachtete Spannung ist immer eine constante, gleichviel ob die Oxydation noch weiter fortschreitet oder nicht, es scheint demnach, dass die durch die fortfahrende Oxydation weiter entwickelten Electricitäten sich unter Freiwerden der entsprechenden Wärmemenge wieder neutralisiren.

Hat nun z. B. ein Stück Zink durch Oxydation an der Luft das Potential $+E$, die Oxydschicht oder vielleicht die anliegende Luftschicht aber das Potential $-E$ erhalten, sodass die Potentialdifferenz gleich $2E$ ist, so ist diese Grösse $2E$ gemessen durch die Verbrennungswärme des Zinkes. Verbinden wir nun das Zink mit irgend einem in Luft indifferenten Metalle, z. B. Platin, so wird ein Theil der Electricität des Zinkes jetzt auf das Platin überströmen, bis beide Metalle ein gemeinsames Potential, z. B. $+P$, angenommen haben. Die freie Spannung am Zink wird jetzt $= -E + P$, die an Platin $= + P$, somit die Potentialdifferenz zwischen Zink und Platin $= -E$, also gemessen durch die halbe Verbrennungswärme des Zinkes. Wäre demnach der Wärmewerth eines Daniell $= A$[1]), die Verbrennungswärme des Zinkes $= B$, so müsste die Potentialdifferenz zwischen Zink und Platin in Luft gleich sein $\frac{B}{2A}$. Wird das mit dem Zink verbundene Metall auch in

1) Die Wärmewerthe müssen selbstverständlich alle auf chemisch-äquivalente Mengen der Substanz bezogen werden.

Luft oxydirt, so bleibt die ganze Betrachtungsweise selbstverständlich dieselbe; immer ist die Potentialdifferenz zweier Metalle gemessen durch die halbe Differenz ihrer Verbrennungswärmen.

Um also die Richtigkeit der chemischen Theorie zu erweisen, hätte man nichts zu thun als die beobachteten Potentialdifferenzen mit den von J. Thomsen sehr genau bestimmten Verbrennungswärmen zu vergleichen.

Ein solcher Vergleich zeigt zunächst, dass zwischen Beobachtung und Rechnung im grossen und ganzen Uebereinstimmung herrscht, auch was den absoluten Werth der Potentialdifferenzen anlangt. Allein die Zahlen, die von den verschiedenen Autoren über die Spannungsdifferenzen angegeben werden, stimmen aus Gründen, die zu erörtern gleich Gelegenheit sein wird, untereinander nur mässig überein. Ich habe daher versucht, wenigstens für einige Metalle die Potentialdifferenzen mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln. Hierzu bediente ich mich ausschliesslich der Methode von R. Kohlrausch. Die Thomson'sche Methode mit dem Ringelectrometer — dem Principe nach wohl die einfachste — konnte deshalb nicht verwendet werden, weil es sich bei den späteren Versuchen darum handelte, die beiden Metalle in verschiedenen Gasen zu haben.

Es wurde demnach aus dem zu untersuchenden Metalle und einer massiven Platinplatte ein Condensator gebildet, letztere von einer metallischen Unterlage durch Paraffinstücke isolirt. Die untersuchten Metalle waren Zn, Fe, Cu, Ag, sämmtlich gut geschliffene Platten von 55 mm Durchmesser wie die Platinplatte. Die isolirende Schicht des Condensators war Paraffin; durch dasselbe Material waren die metallenen Handhaben an den Platten befestigt. Es wurden nun die beiden Pole eines isolirten Normal-Daniell's abwechselnd in dem einen und dem andern Sinne mit den Platten des Condensators verbunden. Die dadurch erzeugten Electricitätsmengen sind proportional der Summe, resp. der Differenz der electromotorischen Kräfte

der Platten und des Daniell, letzteres Verhältniss kann somit aus diesen zwei Beobachtungen ermittelt werden. Zur Controle wurde noch der Condensator direct geschlossen und die entwickelte Electricitätsmenge bestimmt. Die Messung dieser Mengen geschah an einem Quadrantelectrometer nach Branly, dessen Quadranten durch eine Zamboni'sche Säule geladen waren. Die Ausschläge desselben waren nach vorhergeganger Graduirung innerhalb der eingehaltenen Grenzen den Ladungen proportional.

Die ersten Versuche erstreckten sich auf die Spannung zwischen reinem Zink und Platin. Ich muss bemerken, dass es zur Erzielung constanter Resultate absolut nothwendig ist, die Platten vor jedem Versuche gut zu reinigen und zu trocknen, wie auch bei erhöhter Zimmertemperatur zu arbeiten. Desgleichen muss die Paraffinschicht des Condensators vor jedem Versuche sorgfältig geprüft und, im Falle sie electrisch wäre, durch Umschmelzen erneuert werden. Ein solcher Process kann aber natürlich nicht zwischen zwei zusammengehörigen Beobachtungen gemacht werden, da für solche die Verstärkungszahl des Condensators constant bleiben muss.

Im Folgenden bezeichne N den Nullpunkt der jedesmaligen Fernrohreinstellung, a den beobachteten Ausschlag, positiv gezählt, wenn nach absteigenden Zahlen, negativ, wenn im entgegengesetzten Sinne gerichtet. Die erste Verticalcolumne enthält die Nummern der Versuche. Eine jede Horizontalreihe bildet einen vollständigen Versuch. A gibt die Ablesung bei Gegeneinanderschaltung von Condensator und Daniell, B bei Gleichschaltung derselben, C die daraus berechneten Werthe von x und D, wo x die Spannung der untersuchten Metalle, und D die electromotorische Kraft eines Daniell bedeutet, beide ausgedrückt in Scalentheilen. D gibt die Ablesungen der Controlbeobachtung, E den daraus gefundenen Werth für x, F gibt das Mittel der Werthe von x aus C und E, und endlich G den Werth von x bezogen auf ein Daniell als Einheit.

I. Versuche mit Zink und Platin.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1.	$N=749$ $a=757$	$N=749$ $a=605$	$x=68$ $D=76$	$N=749$ $a=681$	$x=68$	$x=68$	$x=0{,}90$
2.	$N=852$ $a=858{,}5$	$N=850$ $a=754$	$x=44{,}7$ $D=51{,}3$	$N=850$ $a=806{,}5$	$x=43{,}5$	$x=44{,}1$	$x=0{,}88$
3.	$N=804$ $a=811$	$N=806$ $a=696$	$x=51{,}5$ $D=58{,}5$	$N=808$ $a=756$	$x=52$	$x=51{,}7$	$x=0{,}88$
4.	$N=857$ $a=864$	$N=857$ $a=766$	$x=42$ $D=49$	$N=857$ $a=814$	$x=43$	$x=42{,}5$	$x=0{,}86$
5.	$N=668$ $a=675$	$N=668$ $a=556$	$x=52{,}5$ $D=59{,}5$	$N=668$ $a=615$	$x=53$	$x=52{,}7$	$x=0{,}88$
6.	$N=674$ $a=680$	$N=674$ $a=552$	$x=58$ $D=64$	$N=676$ $a=618$	$x=58$	$x=58$	$x=0{,}91$
7.	$N=714{,}5$ $a=724{,}5$	$N=715$ $a=655$	$x=75$ $D=85$	$N=714$ $a=639{,}5$	$x=74{,}5$	$x=74{,}7$	$x=0{,}88$
8.	$N=858$ $a=865$	$N=858$ $a=762$	$x=44{,}5$ $D=51{,}5$	$N=855$ $a=810$	$x=45$	$x=44{,}7$	$x=0{,}87$
9.	$N=848$ $a=855$	$N=848$ $a=747$	$x=47$ $D=54$	$N=847{,}5$ $a=801$	$x=46{,}5$	$x=46{,}7$	$x=0{,}86$
10.	$N=720$ $a=730$	$N=720$ $a=560$	$x=75$ $D=85$	$N=718$ $a=644$	$x=74$	$x=74{,}5$	$x=0{,}88$
11.	—	$N=808$ $a=694$	— $D=60$	$N=806$ $a=752$	$x=54$	—	$x=0{,}90$
12.	—	$N=808$ $a=695$	— $D=60$	$N=808$ $a=755$	$x=53$	—	$x=0{,}88$
13.	$N=855$ $a=871{,}5$	$N=855$ $a=757$	$x=45{,}7$ $D=52{,}3$	$N=853{,}5$ $a=808$	$x=45{,}5$	$x=45{,}6$	$x=0{,}87$
						Mittel	$x=0{,}881$

Bei den Versuchen 11 und 12 wurde je eine Controlbeobachtung unterlassen. Die Versuche 10—13 beziehen sich eigentlich auf Zink und Gold, denn es wurde bei ihnen die Platinplatte durch eine galvanoplastisch sehr solid vergoldete Messingplatte ersetzt; man sieht, dass Gold und Platin sich vollkommen gleich verhalten. Ich muss jedoch gleich hier bemerken, dass diese Gleichheit hier nicht lange währt; schon nach 2—3 Tagen liefert die Goldplatte beträchtlich kleinere Werthe als das Platin, und es dauert nicht lange, so wirkt eine solche vergoldete

Messingplatte nahezu wie eine unvergoldete. Das kann aber nur dem Umstande zuzuschreiben sein, dass die Luft allmählich die Goldschicht durchdringt und das darunter befindliche Messing oxydirt.

Eine gleiche Beobachtung machte schon de la Rive an gefirnissten Platten, so lange die Firnisschicht nicht eine sehr beträchtliche Dicke hatte. Dieses Verhalten eines feinen Metallüberzuges ist deshalb von Interesse, weil gerade die verlässlichsten älteren Beobachtungen mit solchen vergoldeten und verplatinirten Messingplatten gemacht wurden, z. B. die von R. Kohlrausch.

Dieser Verfasser hat speciell Versuche darüber angestellt[1]), ob eine platinirte Messingplatte ebenso wirke, wie eine massive Platinplatte, und gefunden, dass dem in der That so sei; allein dieser Versuch wurde aller Wahrscheinlichkeit nach bald nach Herstellung der Platinirung angestellt, und ich glaube nicht zu irren, wenn ich den geringen Werth für Zn | Pt, den Kohlrausch erhielt, nämlich 0,6 Daniell statt 0,88 einer allmählichen Durchdringung des Platinüberzuges durch die Luft zuschreibe. Dafür spricht auch der Umstand, dass Kohlrausch das Verhältniss von $\frac{\text{Zn} \mid \text{Cu}}{\text{Zn} \mid \text{Pt}}$ sehr variabel, und im Vergleich mit den nachfolgend mitgetheilten Beobachtungen zu gross findet, nämlich $= \frac{100}{111,2}$ bis $\frac{100}{106}$; wenn eben der Werth Zn | Pt zu klein beobachtet wird, so fällt dieses Verhältniss natürlich zu gross aus.

Von anderen Beobachtern als Kohlrausch konnte ich keine Angaben über die absolute Grösse von Zn | Pt finden.

Um nun ein Bild von der Richtigkeit dieses Werthes oder vielleicht der chemischen Theorie zu bekommen, haben wir nur den halben Werth der Oxydationswärme des Zinkes durch den Wärmewerth des Daniell'schen Elementes zu dividiren. Es ist nach J. Thomsen die Oxyda-

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 82. p. 407. 1851.

tionswärme des Zinkes = 42700 Cal per Aequivalent, und es ist der Wärmewerth des Daniell ebenfalls unter Zugrundelegung der Thomsen'schen Zahlen = 24300 Cal.; daraus berechnet sich der Werth von Zn | Pt = 0,879 Daniells.

Diese Zahl stimmt mit der beobachteten besser überein, als man es bei so schwierigen Versuchen erwarten konnte.

II. Versuche mit Kupfer und Platin.

Beobachtungsmethode und Bezeichnungsweise ganz wie früher.

	A	B	C	D	E	F	G
1.	$N=679$ $a=729$	$N=679$ $a=565$	$x=32$ $D=82$	$N=680$ $a=649$	$x=31$	$x=31,5$	$x=0,38$
2.	$N=681$ $a=735$	$N=681$ $a=565$	$x=31$ $D=85$	$N=680$ $a=649$	$x=31$	$x=31$	$x=0,35$
3.	$N=701$ $a=750$	$N=701$ $a=592$	$x=30$ $D=79$	$N=703$ $a=672$	$x=31$	$x=30,5$	$x=0,39$
4.	$N=709$ $a=770$	$N=709$ $a=575$	$x=36,5$ $D=97,5$	$N=709$ $a=672,5$	$x=36,5$	$x=36,5$	$x=0,37$
5.	$N=709$ $a=768$	$N=709$ $a=577$	$x=36,5$ $D=95,5$	$N=709,5$ $a=674$	$x=35,5$	$x=36$	$x=0,38$
6.	$N=707$ $a=769$	$N=707$ $a=577$	$x=34$ $D=96$	$N=707$ $a=673$	$x=34$	$x=34$	$x=0,35$
7.	$N=708$ $a=770$	$N=708$ $a=578$	$x=34$ $D=96$	$N=708$ $a=674$	$x=34$	$x=34$	$x=0,35$
						Mittel	$x=0,367$

Diese Versuche stimmen untereinander weniger gut als die mit Zink, ich habe überhaupt gefunden, dass unter allen Metallen das Zink weitaus die constantesten Resultate liefert.

Die Oxydationswärme des Kupfers ist nach Thomsen = 18600 Cal., und daraus berechnet sich wie oben der Werth von Cu | Pt zu 0,383 Daniells, was mit der Beobachtung genügend übereinstimmt.

Dass bei den verschiedenen Versuchen die absoluten Werthe für x und D untereinander nicht ganz gleich sind, hat seinen Grund darin, dass die Paraffinschicht des Con-

densators fast zwischen je zwei Versuchsreihen entweder ganz umgeschmolzen oder doch mit einer Bunsen'schen Flamme überfahren wurde.

III. Versuche mit Eisen und Platin.

Beobachtungsmethode und Bezeichnung wie in I und II. Beim Eisen ist besondere Vorsicht zu gebrauchen und müssen die Platten vor jedem einzelnen Versuche unbedingt neu geputzt werden.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1.	$N=800$ $a=812$	$N=800$ $a=720$	$x=34$ $D=46$	$N=800$ $a=766$	$x=34$	$x=34$	$x=0{,}75$
2.	$N=822$ $a=834$	$N=820$ $a=741$	$x=33{,}5$ $D=45{,}5$	$N=820$ $a=787$	$x=33$	$x=33{,}2$	$x=0{,}73$
3.	$N=795$ $a=810$	$N=790$ $a=713$	$x=31$ $D=46$	$N=790$ $a=759$	$x=31$	$x=31$	$x=0{,}68$
4.	$N=830$ $a=844$	$N=830$ $a=746$	$x=35$ $D=49$	$N=830$ $a=795$	$x=35$	$x=35$	$x=0{,}71$
5.	$N=758$ $a=772$	$N=758$ $a=680$	$x=32$ $D=46$	$N=760$ $a=729$	$x=31$	$x=31{,}5$	$x=0{,}68$
6.	$N=712$ $a=727$	$N=712$ $a=627$	$x=35$ $D=50$	$N=715$ $a=680$	$x=35$	$x=35$	$x=0{,}70$
7.	$N=681$ $a=699$	$N=682$ $a=586$	$x=39$ $D=57$	$N=680$ $a=641$	$x=39$	$x=39$	$x=0{,}68$
8.	$N=698$ $a=713$	$N=699$ $a=613$	$x=35{,}5$ $D=50{,}6$	$N=700$ $a=665$	$x=35$	$x=35{,}2$	$x=0{,}70$
						Mittel	$x=0{,}704$

Da die Verbrennungswärme des Eisens gleich ist 34100 Cal., so gibt die Berechnung für Fe | Pt den Werth = 0,701 Daniells, was mit der Beobachtung in vollkommenem Einklange steht.

Es wurde schliesslich noch das Silber der Beobachtung unterzogen, doch ist infolge der geringen Oxydationswärme desselben seine Spannung mit Platin so gering, dass schon der kleinste Beobachtungsfehler den Werth des Resultates bedeutend modificirt. Ich habe auch Silber nur deshalb beobachtet, um einen directen Vergleich mit den nachfolgenden Versuchen, betreffend Silber, in einer Chloratmosphäre anstellen zu können. Für den Werth

Ag|Pt in Luft habe ich nur eine einzige Messung gemacht, die eben dieses Vergleiches halber hier stehen mag. Die verwendete Platte war eine massive Silberplatte, denn galvanoplastische Silberüberzüge besitzen eine Durchlässigkeit für Luft in noch höherem Maasse als Goldüberzüge.

Sei die Bezeichnung wieder wie früher, so wurde erhalten:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
$N=800$ $a=855$	$N=800$ $a=735$	$x=5$ $D=60$	$N=800$ $a=795$	$x=5$	$x=5$	$x=0{,}083$

Da nach Thomsen die Verbrennungswärme des Silbers = 3000 Cal. ist, so berechnete sich der Werth Ag|Pt zu 0,062 Daniells, was mit der Beobachtung in Anbetracht der Kleinheit des Werthes genügend stimmt.

Ich habe nun noch den Versuch angestellt, die beiden Metalle des Condensators mit verschiedenen Gasen zu umgeben, und zwar habe ich zu diesem Zwecke beide Condensatorplatten aus demselben Metalle, nämlich Silber, gewählt, auf die eine Luft, auf die andere aber Chlorgas einwirken lassen. Zu diesem Versuche musste dem Apparate folgende Einrichtung gegeben werden. Eine cylindrische kurze Glasröhre von passender Weite wurde an dem einen Ende mit der einen Silberplatte luftdicht verschlossen, doch so, dass die Platte das Glas nirgends berührt, was leicht durch Aufkitten mittelst Paraffin erreicht werden kann. Das untere Ende der vertical gestellten Röhre war durch einen Stöpsel luftdicht geschlossen, durch den zwei Glasröhrchen zum Ein- und Ausleiten des Gases in das Innere führten und ausserdem noch ein allseitig durch Paraffin isolirter Platindraht, der sich mit seinem innern Ende federnd an die Silberplatte anlegte. Letzteres hatte nur den Zweck, die metallische Schliessung des Condensators zu gestatten. Darauf wurde die Silberplatte auch auf ihrer äussern Fläche mit Paraffin überzogen, welch letzteres die isolirende Schicht des Condensators bildete.

Eine zweite Silberplatte von gleichen Dimensionen wie die erste konnte auf diesen Condensator aufgesetzt werden, ganz wie bei den früheren Versuchen.

Wurde nun der Condensator in sich geschlossen, so zeigte sich natürlich nicht die geringste Ladung; sobald aber das Innere der Glasröhre mit trockenem Chlorgas, das sich aus doppelt chromsaurem Kali und Salzsäure entwickelte, gefüllt wurde, zeigte der Condensator sofort eine beträchtliche und ganz constante Spannung an. Gleichzeitig schwärzte sich die Innenseite der einen Silberplatte.

Die Spannung besteht aber nur so lange als die Verbindung des Chlors mit Silber vor sich geht; vertreibt man das Chlor aus dem Gefässe durch trockene Luft und lässt man dem Silber Zeit, die zurückbleibenden und festhaftenden Spuren von Chlor vollständig zu verzehren, so zeigt sich dann keine Spannung mehr zwischen der reinen und der angegriffenen Platte. Im Folgenden theile ich die diesbezüglichen Versuche mit.

IV. Silber in Luft gegen Silber in Chlor.

Die Bezeichnung ist wieder dieselbe wie früher.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1.	$N=800$ $a=789$	$N=800$ $a=840$	$x=14,5$ $D=25,5$	$N=800$ $a=815$	$x=15$	$x=14,7$	$x=0,57$
2.	$N=803$ $a=792$	$N=802$ $a=842$	$x=14,5$ $D=25,5$	$N=802$ $a=816$	$x=14$	$x=14,2$	$x=0,56$
3.	$N=690$ $a=676$	$N=690$ $a=734$	$x=15$ $D=29$	$N=690$ $a=704$	$x=14$	$x=14,5$	$x=0,50$

Man ersieht aus den Zahlen unter *A*, *B* und *D*, dass jetzt die Ausschläge sämmtlich in der entgegengesetzten Richtung erfolgten, wie bei den früheren Versuchen, dem Umstande entsprechend, dass jetzt nicht die stärker angegriffene Platte wie früher, sondern die schwächer angegriffene mit dem Electrometer verbunden wurde.

Noch wurde ein Versuch auf folgende Weise angestellt. Die Verschlussplatte der Glasröhre wurde abgenommen, vollkommen gereinigt, neu polirt und wieder auf-

gesetzt; die beiden Platten gaben wieder keine Spur einer Potentialdifferenz. Nun wurde die Verschlussplatte mit Luft in Berührung gelassen, dagegen die abhebbare Silberplatte auf kurze Dauer in einen Chlorstrom gehalten und sofort untersucht. Es ergaben sich die folgenden Werthe:

$N=658$ $a=683$	$N=658$ $a=573$	$x=30$ $D=55$	$N=658$ $a=628$	$x=30$	$x=30$	$x=0{,}54$

Die Ausschläge sind hier wieder gleich gerichtet mit jenen am Zn | Pt-Condensator, da jetzt wieder die stärker angegriffene Platte mit dem Electrometer verbunden wurde. Das Mittel aus den vorstehenden Versuchen wäre somit gleich 0,542.

Es ist nach Thomsen die Oxydationswärme des Silbers = 3000 Cal. und die Verbindungswärme von Chlor und Silber = 92400 Cal. Somit ergibt die Berechnung für die Potentialdifferenz zwischen Silber in Luft und Silber in Chlor den Werth 0,543 Daniell. Diese ausserordentliche Uebereinstimmung ist bei der geringen Anzahl von Beobachtungen wohl nur einem Zufalle zuzuschreiben. Es wurde schliesslich noch die abhebbare Silberplatte bis zur vollständigen Schwärzung der Einwirkung des Chlors ausgesetzt und abermals beobachtet. Es ergab sich der Werth 0,54 wie früher; allein dieser Werth nahm, wenn die Platte sich weiter in Luft befand, sehr rasch ab, und unmittelbar aufeinander folgende Versuche ergaben schon die Werthe 0,46, 0,42, 0,38, 0,36, und nach zwölfstündigem Stehen war überhaupt keine Potentialdifferenz mehr bemerkar, obwohl die eine Platte vollkommen blank, die andere aber durch Chlor vollkommen geschwärzt war.

Ich glaube, dass die Resultate der vorstehenden Versuche ein sehr beredtes Zeugniss zu Gunsten der chemischen Theorie ablegen; nicht nur, dass die qualitativen Verhältnisse ohne Ausnahme dieser Hypothese entsprechen, so stimmen auch die quantitativen Bestimmungen so gut mit der Berechnung, dass die Richtigkeit der zu Grunde gelegten Vorstellung kaum mehr einem Zweifel unterworfen

werden kann. Die einzige Substanz, mit der ich zu keinem positiven Resultate gelangen konnte, war das Blei. Nicht als ob dasselbe in Verbindung mit Platin Werthe ergeben hätte, die mit der Berechnung nicht stimmten; es konnten überhaupt keine zwei übereinstimmenden Beobachtungen erzielt werden. Der Grund davon liegt offenbar erstens in dem sehr raschen Angriffe, dem eine blanke Bleifläche von Seiten der Luft ausgesetzt ist, und zweitens in der Unmöglichkeit, derselben eine gute Politur zu geben. Letzteres ist aber unbedingt nothwendig, sobald man mit einer festen, isolirenden Zwischenschicht im Condensator arbeitet, damit der Abstand der Platten bei jeder Messung derselbe sei.

In Bezug auf den Werth der letzteren Beobachtungen mit Silber in Chlor möchte ich noch das Folgende bemerken: Wenn man auch für alle Substanzen nachweisen würde, dass ihre Spannungen den Differenzen der respectiven Verbindungswärmen proportional sind, so läge darin doch noch kein directer Beweis gegen die Contacttheorie; einen solchen liefern aber die Beobachtungen am Silber.

Es verliert offenbar die Contacttheorie ihre Basis, sobald man nachweist, dass zwei heterogene Metalle zur Berührung gebracht, doch keine Spannung annehmen. Dies hat nun de la Rive schon gezeigt durch seinen Versuch mit verschiedenen Metallen im Vacuo, einem Versuche, der leider der Vergessenheit anheim gefallen ist. Man kann dasselbe Resultat aber auch in einer leichter darstellbaren und augenfälligeren Weise erzielen.

Wenn man zwei blanke Kupferplatten in Luft verbindet, so geben dieselben keine Spannung; nach der Contacttheorie, weil es gleiche Substanzen sind, nach der chemischen, weil die Einflüsse von Seiten der Luft beiderseits gleich sind. Hebt man nun diesen Einfluss einseitig auf, etwa durch Oxydation der einen Platte in der Flamme, so bekommt man bekanntlich eine sehr starke Spannung: nach der chemischen Theorie, weil sich jetzt nur das eine Metall in der Luft weiter oxydirt, das andere aber nicht;

nach der Contacttheorie, weil jetzt zwei verschiedene Substanzen miteinander zur Berührung gebracht werden, nämlich Kupfer und Kupferoxyd. Welche von beiden Erklärungsweisen die richtige ist, das entscheidet eben der obige Versuch mit Silber in Chlor. In dem Falle, dass eine Silberplatte sich in Luft, die andere in Chlor befindet, ergibt sich eine bestimmte Spannung, so lange die Einwirkung des Chlors dauert; sowie aber beide Platten wieder mit Luft umgeben sind, verschwindet die Potentialdifferenz vollständig, da jetzt die beiderseitigen Einflüsse wieder gleich sind. Es geht der Versuch gerade mit Silber und Chlor deshalb gut, weil das Silber eine etwa haften bleibende Chlorschicht in kürzester Zeit consumirt.

Nach der chemischen Theorie ist nun dieser Versuch vollständig klar, nicht so nach der Contacttheorie. Letzterer gemäss müsste die Potentialdifferenz auch noch weiter bestehen bleiben, da die eine Platte aus Silber, die andere aber aus Chlorsilber besteht, oder doch damit überzogen ist. Ich sehe in der That keinen Weg, diesen Versuch mit der Contacttheorie in Einklang zu bringen.

Während ich bereits mit der experimentellen Durchführung der vorliegenden Arbeit beschäftigt war, erschienen noch zwei denselben Gegenstand betreffende Publicationen von Brown[1]), die ich hier nicht unerwähnt lassen kann. Brown wurde durch das Studium der Volta'schen Säule gleichfalls auf die Idee geführt, dass die sogenannte Contactelectricität ihren Ursprung in der chemischen Wirkung habe, die die umgebenden Gase auf die Metalle ausüben.

Zur Verificirung dieser Idee machte er die beiden Halbringe eines Thomson'schen Ringelectrometers aus verschiedenen Metallen und umgab dieselben einmal mit Luft, ein anderes mal mit verschieden anderen, passend

1) Phil. Mag. (5.) **6.** Aug. 1878 und **7.** Februar 1879.

gewählten Gasen; es zeigte sich, dass z. B. das Kupfer eines Kupfernickelringes, das in Luft immer negativ ist, gegen Nickel diese Eigenschaft nicht in allen Gasen behält. So wird es z. B. in einer Chlorwasserstoffatmosphäre gegen Nickel positiv. Die stets gleichnamig electrische Nadel des Instrumentes, die in Luft nach der einen Seite des Schlitzes, über den sie schwebt, auswich, geht beim Einleiten von Chlorwasserstoff über die Ruhelage zurück und nimmt eine dauernd entgegengesetzte Stellung ein. Dabei ist noch zu bemerken, dass bei einer Unterbrechung des Chlorwasserstoffstromes der Ausschlag der Nadel sich wieder verringert. Nach Brown soll auch im Wasser das Kupfer gegen Nickel negativ, in Salzsäure dagegen positiv sein. Leider war Brown mit seinem Apparate nicht im Stande, quantitative Messungen anzustellen; doch bleibt es immer bemerkenswerth, wenn man von zwei ganz verschiedenen Seiten und ganz unabhängig zum selben Resultate geführt wird. Wenn demnach Brown in der ersten, wenigstens qualitativen Ausführung der Idee unbedingt die Priorität gebührt, so glaube ich doch erst durch die quantitativen Nachweise die Sache in das rechte Licht gestellt zu haben.

Fasst man nun die Resultate aller Untersuchungen über Contactelectricität, die bis zum heutigen Tage vorliegen, ins Auge, so wird man, wie mir scheint, keinen auch nur halbwegs stichhaltigen Grund gegen die chemische Theorie beibringen können; wohl aber liegen sehr gewichtige Gründe für dieselbe und gegen die Volta'sche Theorie vor. Ich glaube, man ist vollständig berechtigt, zu sagen, eine Electricitätserregung durch den Contact heterogener Metalle, und eine electrische Scheidungskraft an der Grenzfläche zweier heterogener Metalle gibt es nicht. An Stelle des Volta'schen Erregungsgesetzes muss der Satz treten: „Die electrische Differenz zweier sich berührender Metalle wird gemessen durch die — mit gehörigem Vorzeichen genommene — Summe der Wärmewerthe der beiderseitigen chemischen Processe.“ Dieser

Satz gilt ebenso für jedes galvanische Element, wie für die galvanische Polarisation und den Volta'schen Fundamentalversuch.

Dass das Volta'sche Spannungsgesetz dadurch nicht beeinträchtigt wird, dass es im Gegentheil eine unmittelbare Consequenz aus der chemischen Theorie ist, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Es ist klar, dass eine derartige Umgestaltung der Ansicht von der Electricitätserregung nicht ohne Consequenzen bleiben kann in Bezug auf die Theorie einer grossen Reihe von Erscheinungen, von denen ich hier nur eine hervorheben will. Es ist dies die Thermoelectricität. Es ist eine schon von le Roux[1]) ausgesprochene und jetzt vielfach vertretene Ansicht, dass die thermoelectrische Erregung ihren Grund in einer durch die Temperaturänderung hervorgerufenen Aenderung der Volta'schen Contactkraft habe. Diese Ansicht ist in neuerer Zeit unter andern vertreten worden von Edlund[2]), der die Volta'sche Spannung zweier Metalle bekanntlich aus ihrem thermoelectrischen Verhalten zu bestimmen versuchte; ferner in ganz entschiedener Weise von Avenarius[3]) und ebenso von Gaugain.[4]) Diese Ansicht ist jedoch nach allem Voranstehenden höchst unwahrscheinlich, wenn nicht unhaltbar. Man müsste vor allem die an und für sich durch nichts gerechtfertigte Voraussetzung machen, dass sich die Verbrennungswärme der Metalle schon bei den geringsten Temperaturänderungen erheblich ändern, und zweitens, dass die Differenz dieser Aenderungen bei den verschiedenen Metallen recht erheblich variiren.

Ferner aber müsste die thermoelectrische Kraft zweier Metalle sehr bedeutend wechseln je nach den Medien, welche die Metalle umgeben, eine Erscheinung, die, wenn sie existirte, schwerlich bisher der Beobachtung entgangen

1) le Roux, Compt. rend. **63.**

2) Edlund, Pogg. Ann. **143.** p. 404. 1871.

3) Avenarius, Pogg. Ann. **119.** p. 406. 1863; **122.** p. 193. 1864.

4) Gaugain, Ann. d. chim. et de phys. (6) **6.** p. 193. 1864.

wäre. Es scheint mir deshalb bei weitem wahrscheinlicher, dass die thermoelectrische Kraft mit der sogenannten Volta'schen gar nichts gemein hat. Es ist übrigens auch schon von Kohlrausch[1]) darauf hingewiesen worden, dass die Annahme eines solchen Zusammenhanges durchaus nicht nothwendig sei, dass man von dem Wesen der Thermoelectricität auch von einem andern Gesichtspunkte aus sich eine ganz bestimmte Vorstellung zu bilden vermag.

Bedenkt man, dass die Theorie des galvanischen Elementes, so wie sie heute gegeben wird, vollständig auf der Annahme der Volta'schen Contactkraft beruht, so wird man wohl gerade in dieser Richtung die durchgreifendste Veränderung erwarten dürfen; und so weit ich bis jetzt die Sache zu übersehen vermag, dürfte sich dadurch die Theorie des Elementes in bedeutend einfacherer Gestalt und auf natürlicheren Grundlagen fussend, als bisher präsentiren.

Die Resultate einer eingehenderen Untersuchung über diesen Gegenstand sollen einer folgenden Publication vorbehalten bleiben.

IV. *Ueber Diffusion von Salzen in wässeriger Lösung; von J. H. Long.*

Obwohl über die Diffusion von Salzlösungen während der letzten 30 Jahre vieles veröffentlicht wurde, ist doch bis jetzt über den Einfluss der chemischen Natur des Stoffes auf den Gang der Diffusion wenig bekannt.

Die zahlreichen Versuche von Graham, Beilstein und Marignac erlauben keinen sichern Schluss in dieser Richtung, und die bekannten Fick'schen Versuche sowohl, als die von Voit, Hoppe-Seyler, Johannisjanz,

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. **156.** p. 601. 1875.

Weber und Stefan beschäftigen sich nicht mit der chemischen, sondern mit der physikalischen Seite des Problems. Die Wichtigkeit dieser Frage vom chemischen Standpunkte aus liess eine neue Untersuchung wünschenswerth erscheinen, und ich habe deshalb vor etwa anderthalb Jahren, auf Veranlassung des Hrn. Prof. Lothar Meyer, eine solche unternommen und theils im chemischen Laboratorium der Universität Tübingen, theils im physikalischen Institute der Universität Breslau bei Hrn. Prof. O. E. Meyer ausgeführt, deren Resultate ich nachstehend mittheile.[1])

Die Methoden von Graham, Beilstein und Marignac sind mit mehreren Fehlerquellen behaftet. So ist es bei deren Anwendung unmöglich, dem Gange der Diffusion zu folgen, d. h. die in jeder Stunde oder während jedes Tages diffundirende Salzmenge bestimmen zu können; auch ist Anfang und Dauer des Beharrungszustandes nicht zu ermitteln. Ferner sind die mittelst dieser Methoden gewonnenen Resultate nur Mittelwerthe für die Dauer der Versuche, da während der ersten Tage die Geschwindigkeit der Diffusion eine weit grössere sein kann als gegen Ende. Die diffundirenden Molekeln treten nämlich in eine stetig concentrirter werdende Flüssigkeit über, und diese Aenderung der Concentration bedingt natürlich eine Aenderung des Widerstandes, die für die verschiedenen Salze eine sehr verschiedene sein kann.

Es schien also wünschenswerth, eine von diesen und anderen Fehlerquellen freie Methode anzuwenden. Eine solche wurde mir von Hrn. Prof. Lothar Meyer vorgeschlagen, deren Vorzüge darin bestehen, dass eine Bestimmung der Diffusionsgeschwindigkeit zu jeder Zeit möglich ist, und dass die Diffusion in eine Flüssigkeit von gleichbleibender Concentration stattfindet. Wie dieses erreicht

---

1) Eine Besprechung der Literatur dieses Gegenstandes findet sich in meiner Dissertation „On the diffusion of liquids". Tübingen, bei Laupp, 1879.

wurde, ist aus den beigefügten Abbildungen ersichtlich. Taf. II Fig. 13 stellt den Haupttheil des angewendeten Apparates in natürlicher Grösse in vertikalem Durchschnitt dar. *mnop* ist ein Becherglas, in welchem sich die gebogene Röhre *arstb* befindet, deren Durchmesser $1^1/_2$ mm beträgt. Bei *ef* ist eine andere, unten offene Röhre *efgh* von 15 mm Durchmesser im Lichten in der Weise angeschmolzen, dass zwischen beiden Communication stattfindet. Taf. II Fig. 14 zeigt diesen Theil des Apparates in horizontalem Durchschnitt; Taf. II Fig. 15 gibt eine perspectivische Ansicht der ganzen Anordnung von vier Apparaten. Zu Anfang des Versuches werden das Becherglas und die Röhre *arstb* bis zu der Linie *ab* mit der zu untersuchenden Lösung gefüllt. Aus Mariotte'schen Flaschen tropft destillirtes Wasser in die Röhren *w*, durchfliesst *arst* und tritt endlich bei *b* wieder aus. In *i* ist die Trennungsfläche zwischen dem Wasser und der darunter stehenden Lösung ungefähr bei *ef*, doch hängt dies von anderen, nachher genauer zu erörternden Umständen ab. Es findet nunmehr Diffusion statt zwischen den unter- und oberhalb *ef* sich befindenden Flüssigkeiten, während das die diffundirten Salztheilchen enthaltende Wasser in einem unter *b* stehenden Gefässe aufgesammelt wird. Die Concentration der in *i* befindlichen Lösung nimmt rasch ab, und andere Salztheilchen treten bald von unten her bei *gh* nach *i* hinein. Bei *gh* kann sich natürlich die Concentration nur sehr langsam ändern, da fast die ganze Salzlösung sich oberhalb im Becherglase befindet. Selbstverständlich werden die ersten bei *b* austropfenden Portionen des Wassers fast so reich an Salztheilchen sein wie die ursprüngliche Lösung, und es ist eine gewisse Zeit erforderlich, bis diese mechanische Ueberführung von Salzmolekeln durch eine wirkliche Diffusion ersetzt wird. Meine ersten Versuche betrafen diesen Punkt. Der Apparat wurde um $8^1/_2$ Uhr vormittags mit Kochsalzlösung gefüllt und unter die Mariotte'sche Flasche gestellt. Erst um 9 Uhr wurden die ersten Wasserproben

bei *b* genommen und die Quantität des mitgeführten Salzes mittelst $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$-Lösung[1]) bestimmt.

Im Folgenden gebe ich die Resultate der während des ersten Tages gemachten Bestimmungen. Die Geschwindigkeit des fliessenden Wassers betrug 40 cm pro Stunde. Der Einfachheit halber werden die Resultate hier und im Folgenden in cm der bei der Titrirung verbrauchten Silberlösung ausgedrückt.

Zeit	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ gebraucht	Zeit	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ gebraucht
9—10 Vorm.	80,0	3—4 Nachm.	5,9
10—11 „	22,0	4—5 „	5,7
11—12 „	11,0	5 N.—9 Vorm.	4,0 pro Stde. im Durchschnitt
12—1 Nachm.	8,1	9—10 „	2,2
1—2 „	6,4	. . . .	. . . .
2—3 „	6,1	4—5 Nachm.	2,0

Letztere Geschwindigkeit blieb mehrere Tage lang constant. Man sieht, dass, obwohl der Verlauf der Diffusion anfangs durch den Ueberschuss an mechanisch mitgeführten Salztheilchen ganz verdeckt wird, dieser Ueberschuss doch sehr rasch abnimmt, sodass nach etwa 30 Stunden die Geschwindigkeit der Diffusion eine constante geworden ist. Die zur Erreichung dieses constanten Zustandes erforderliche Zeit war nicht immer dieselbe; sie variirte vielmehr zwischen 24 und 48 Stunden. Eine zweite Versuchsreihe, wie die vorige ausgeführt, ergab folgende Resultate:

Zeit	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ gebraucht	Zeit	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ gebraucht
9—10 Vorm.	64,0	2—3 Nachm.	6,0
10—11 „	17,0	3—4 „	5,6
11—12 „	9,6	4 N.—9 Vorm.	3,4 pro Stde.
12—1 Nachm.	7,6	9—11 „	1,9 „ „
1—2 „	6,4	11 V.—4 Nachm.	1,9 „ „

Der Beharrungszustand wurde hier nach 24 Stunden erreicht. Die Ergebnisse vieler anderer Versuche waren

1) $^1/_{40}$ Aequivalent Silber in Grammen im Liter enthaltend.

ähnlich, in keinem Falle aber wurde die Diffussion in weniger als 24 Stunden constant. Wie schon bemerkt, war die Geschwindigkeit des Wasserzuflusses 40 cm pro Stunde; da diese möglicherweise von Einfluss sein konnte, wurden hierüber specielle Versuche angestellt. Das Becherglas wurde mit normaler $BaCl_2$-Lösung gefüllt und nach dem Eintreten des Beharrungszustandes die Geschwindigkeit, wie unten angegeben, geändert. Durch Verstellen der zweimal rechtwinkelig gebogenen Ausflussröhre der Flasche liess sich diese Aenderung der Quantität des zufliessenden Wassers sehr leicht und rasch ausführen.

cm H_2O pro Stde.	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ gebr. pro Stde.	cm H_2O pro Stde.	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ gebr. pro Stde.
42	1,17	53	1,18
45	1,17	60	1,15
47	1,22	88	1,05

Die Aenderung der Geschwindigkeit schien hiernach innerhalb ziemlich weiter Grenzen keinen störenden Einfluss auszuüben. Um die Frage vollständig zu erledigen, habe ich mehrere Versuche in ähnlicher Weise ausgeführt, deren Ergebnisse folgende waren (n bedeutet „normal", d. h. 1 Aeq. in Grammen im Liter):

n KCl Dauer des Versuches 24 Stdn.		2 n NaCl Dauer des Versuches 48 Stdn.	
cm H_2O pro Stde.	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ pro Stde.	cm H_2O pro Stde.	cm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ pro Stde.
62	1,69	28	2,74
58	1,60	30	2,80
57	1,54	38	2,73
47	1,69	64	2,62
37	1,69	65	2,73
30	1,62	66	2,71
		70	2,64
NaCl (nahezu 2 n Dauer des Versuches 26 Stdn.		2 n NaCl Dauer des Versuches 5 Stdn.	
50	2,45	80	1,84
49	2,41	88	1,70
48	2,38	100	1,20
45	2,47		
44	2,50		

Aus den ersten zwei dieser Tabellen ist ersichtlich, dass bei Zuflussgeschwindigkeiten des Wassers, welche zwischen 30 und 70 ccm pro Stunde liegen, dieselben keinen merklichen Einfluss auf die Diffusion haben. In den Versuchen der dritten Tabelle betrug die Geschwindigkeit anfangs 50 ccm pro Stunde, und als sie plötzlich auf 80 ccm. gesteigert wurde, ergab die Titrirung bedeutend geringere Werthe, wie dies aus der vierten Tabelle ersichtlich ist. Auf die Ursache dieser Unregelmässigkeiten komme ich später zu sprechen.

Aus den verschiedenen Tabellen geht klar hervor, dass die Dauer des Beharrungszustandes mindestens 30 Stunden beträgt. Zu sehen, ob diese nicht in einzelnen Fällen noch länger sein dürfte, war der Zweck der nächsten Versuche. Zwei einander ähnliche Röhren wurden gefüllt, die eine mit normaler und die andere mit zweifach normaler NaCl-Lösung. Nach dem Eintritte des constanten Zustandes ergaben die vorgenommenen Bestimmungen bei einer Geschwindigkeit des Wassers von 40 ccm folgende Zahlen.

Dauer des Versuches	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ gebraucht für		stündlich	
	n-Lösung	$2n$-Lösung	n-Lösung	$2n$-Lösung
4 Nm. — 8 Vm. = 16 Stn.	12,8	26,0	0,80	1,63
8 Vm. — 12 Mitt. = 4 „	3,7	7,5	0,93	1,88
12 Mitt. — 6 Nm. = 6 „	6,1	11,2	1,02	1,87
6 Nm. — 12 Mitt. = 18 „	17,7	34,6	0,98	1,92
12 Mitt. — 4 Nm. = 4 „	3,5	7,8	0,88	1,95
4 Nm. — 8 Vm. = 16 „	15,8	31,2	0,98	1,95
8 Vm. — 12 Mitt. = 4 „	3,8	7,8	0,95	1,95
12 Mitt. — 6 Nm. = 6 „	5,9	11,6	0,98	1,93
6 Nm. — 8 Vm. = 14 „	14,3	26,0	1,02	1,86
8 Vm. — 4 Nm. = 8 „	8,2	16,4	1,03	2,05
4 Nm. — 12 Mitt. = 20 „	20,5	40,5	1,03	2,03
12 Mitt. — 6 Nm. = 6 „	6,5	11,8	1,08	1,97
6 Nm. — 10 Vm. = 16 „	16,0	30,0	1,00	1,87
Total = 138 Stn.	134,8 ccm	262,4 ccm	0,98 ccm	1,90 ccm

Da die während des fünften und sechsten Tages gewonnenen Resultate keineswegs kleiner sind, als die des

ersten, dürfte wohl nachgewiesen sein, dass die Periode der constanten Diffusion eine ziemlich lange ist.

Obige Tabelle gibt auch Auskunft über den Einfluss der Lösungsconcentration. Wie angegeben, war eine der Lösungen gerade zweimal so stark, als die andere, und die Bestimmungen ergeben, dass von der erstern fast zweimal so viel diffundirt ist als von der letztern. Bekanntlich ist Aehnliches schon von Graham[1]) und später von Weber[2]) beobachtet worden.

Andere Versuche mit drei KCl-Lösungen, in derselben Röhre ausgeführt, ergaben folgende Zahlen:

n-Lösung		2*n*-Lösung		3*n*-Lösung	
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ pro Stde.	Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ pro Stde.	Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ pro Stde.
12—3 Nm.	1,80	5— 8 Vm.	3,60	6—12 Vm.	5,83
3—5 „	1,75	8—10 „	3,65	12— 5 Nm.	5,70
5—8 Vm.	1,66	10— 6 Nm.	3,51	5— 9 Vm.	5,60
8—6 Nm.	1,93	6— 9 Vm.	3,53		
6—9 Vm.	1,73	9— 1 Nm.	3,62		
9—2 Nm.	1,90	1— 3 „	3,55		

Die Ergebnisse der ersten zwei der obigen Versuche stimmen mit den der entsprechenden NaCl-Lösungen überein. In beiden Fällen diffundirte von der 2*n*-Lösung etwas weniger als zweimal so viel, als von der *n*-Lösung. Die Zahlen der letzten Reihe sind aber etwas unregelmässig und bedürfen einer Erklärung, die sich ergeben wird, wenn wir einige Fehlerquellen der Methode genauer besprechen. Bei den vorläufigen Versuchen gebrauchte ich meist möglichst starke Lösungen und bemerkte bald, dass in solchen Fällen die Quantität des diffundirten Salzes viel grösser war, als ich erwartete. Fünf NaCl-Lösungen, z. B. *n*, 2*n*, 3*n*, 4*n* und 5*n* ergaben in gleichen Zeiten Quantitäten,

---

1) Graham, Phil. Trans. 1, 1850; auch Lieb. Ann. **77.** p. 56 u. 129. 1851.

2) Weber, Vierteljahrsschrift der Züricher naturf. Gesellschaft. Nov. 1878.

welche zueinander in den Verhältnissen 1:2,1:3,8:6,4:8 standen. Aehnliches wurde bei Anwendung von starken $CaCl_2$ und $SrCl_2$-Lösungen gefunden, was die Angabe Beilsteins[1]), es nehme die Diffusionsgeschwindigkeit von Salzlösungen mit wachsender Concentration rascher zu, als der Gehalt der Lösung an Salz, zu bestätigen schien.

Zu dieser Zeit ungefähr stellte ich, in der Hoffnung eine genügende Erklärung für diese unerwarteten Resultate zu finden, einen neuen Versuch an, dessen Ergebnisse für das Verständniss der ganzen Methode wichtig geworden sind. Dem Wasser in der Flasche wurde ein wenig Indigolösung zugesetzt, um mittelst der Blaufärbung die Grenzfläche zwischen Wasser und Salzlösung beobachten zu können.

Es zeigte sich bald, dass diese gar nicht so tief in *i* lag, als erwartet wurde. Statt bis *ef* oder noch niedriger zu sinken, blieb die blaue Schicht bei *cd* stehen mit scharf begränzter und vollkommen spiegelnder unterer Fläche. Dies blieb während des Tages so und war selbst nach Fortführung des Versuchs durch mehrere Tage kaum geändert. Nur eine Erklärung war hier möglich: es musste nämlich bei concentrirteren Lösungen die Gleichgewichtslage zwischen denselben und dem Wasser in der Weise geändert sein, dass die Trennungsfläche beider Flüssigkeiten sich hoch in *i* befand. In diesem Falle musste nicht nur die Diffusion erheblich beschleunigt werden, sondern wahrscheinlich auch eine mechanische Ueberführung von Salztheilchen stattfinden.

Zunächst wurde eine bedeutend schwächere Lösung (conc. 1,07) untersucht und zwar mit ganz anderem Erfolg. Anfangs liess sich, wie vorher, eine scharfbegrenzte Fläche unterscheiden, die aber weiter unten, etwa bei *ef*, auftrat; auch am zweiten Tage war sie noch bemerklich, aber nicht mehr spiegelnd, und am dritten Tage war sie vollständig verschwunden, infolge der fortschreitenden Diffusion. Der

---

1) Beilstein, Lieb. Ann. **99.** p. 165. 1856.

Versuch wurde mehrmals mit demselben Erfolge wiederholt, woraus sich schliessen liess, dass, um zu brauchbaren Werthen zu gelangen, es nothwendig sei, Lösungen von geringer, jedenfalls das spec. Gew. 1,10 nicht überschreitender Concentration anzuwenden. Die früher untersuchte KCl-Lösung war erheblich schwerer, und infolge dessen traten die beobachteten Unregelmässigkeiten auf.

Mit Hülfe des blaugefärbten Wassers liess sich auch der Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit beobachten. Die oben erwähnten Versuche zeigten, dass dieselbe bis zu 70 ccm pro Stunde keinen störenden Einfluss ausübt, dass aber bei grösseren Geschwindigkeiten die diffundirte Salzmenge sehr rasch abnimmt. Die Ursache dieser Erscheinung war leicht zu ermitteln. Bei mittlerer Geschwindigkeit des fliessenden Wassers war die spiegelnde Fläche im Anfange des Versuchs, wie erwähnt, etwa an der Stelle *ef*. Stieg die Strömungsgeschwindigkeit aber bis 80 ccm, so blieb diese Fläche nicht mehr bei *ef* stationär, sondern bewegte sich nach unten, bis endlich die Lösung aus *i* vollständig hinausgetrieben wurde, und sichtbare blaue Ströme ausserhalb *i* in die Höhe stiegen. Dies zeigte deutlich genug, dass das Wasser jetzt in *w* schneller eintropfte, als es bei *b* abfliessen konnte, und sich natürlich auf der Oberfläche ansammeln musste, bis der vermehrte Druck endlich gross genug geworden war, um den capillaren Widerstand bei *b* zu überwinden. Es dauerte immer eine gewisse Zeit, bis dies der Fall war und noch länger, bis das nunmehr in *i* enthaltene Wasser vollständig von Salztheilchen durchdrungen war. Bevor dies erreicht war, musste die bei *b* ausgetretene Salzmenge immer zu klein gefunden werden. Aehnliches wurde beobachtet, wenn die Röhre *arstb* vor dem Gebrauch nicht sorgfältigst gereinigt wurde. Die kleinsten fremden Körper, namentlich fettige, in der Röhre bei *b* schienen schon einen ziemlich bedeutenden Widerstand zu verursachen und hatten auf das Ergebniss des Versuchs denselben Einfluss, wie eine Vermehrung der Wasserzufuhr.

Dieselbe Erscheinung wäre selbstverständlich durch Verkleinerung der Oeffnung bei *b* hervorgerufen worden.

Es ist mithin gezeigt worden, dass die Höhe *ge*, welche die Lösung in *i* beim Anfange des Versuchs einnimmt, und von welcher die Quantität des diffundirten Salzes abhängig ist, nicht nur von der Concentration der Salzlösung, sondern auch von der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers und dem Widerstand bei *b* abhängig ist. Nur wenn diese Variabeln zwischen ziemlich engen Grenzen gehalten werden, ist es möglich, mittelst dieser Methode brauchbare Resultate zu erhalten. Vorausgesetzt, dass diese Factoren im richtigen Verhältniss bleiben, ist es keineswegs schwierig, constante und vergleichbare Werthe zu erhalten, selbst in dem Falle, dass verschiedene Röhren benutzt werden, wie dies unten ausführlicher gezeigt werden wird.

Selbstverständlich ist horizontale und vor Erschütterung geschützte Aufstellung des Apparates unerlässliche Bedingung zur Erreichung brauchbarer Resultate.

Ueber den Einfluss der Temperatur sind noch einige Bemerkungen anzuknüpfen; dieselbe war während der Ausführung der oben beschriebenen Versuche ziemlich constant 14°—16° C. Ich habe einige specielle Versuche zur Ermittelung ihres Einflusses angestellt, dieselben sind aber in nicht gerade befriedigender Weise ausgefallen, und zwar, weil es fast unmöglich war, höhere und niedrigere Temperaturen lange genug constant zu erhalten. Ich bediente mich bei dieser Untersuchung einer normalen NaCl-Lösung, während der ganze Apparat erst in einer durch Eis gekühlten Kiste aufgestellt wurde, nachher aber derselbe Raum durch eine darin brennende Bunsen'sche Lampe erwärmt wurde. Die hierbei gewonnenen Zahlen sind einschliesslich der mit der gleichen Lösung bei gewöhnlicher Temperatur erhaltenen, folgende:

Gebraucht pro Stunde bei 10° C. 0,87 ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$
„ „ „ „ 15° C. 1,10 „ „ „
„ „ „ „ 25° C. 1,35 „ „ „

Es diffundirte also bei 25° C. etwa anderthalb mal soviel Salz als bei 10° C.

Diese Werthe können nur als annähernd angesehen werden.

Die Vergleichung der Diffusionsgeschwindigkeit verschiedener Salze, der eigentliche Gegenstand meiner Untersuchung, erforderte zahlreiche einzelne Versuche, die, um die Resultate vergleichbar zu machen, unter genau übereinstimmenden Bedingungen angestellt werden mussten. Sämmtliche Salze aus derselben Röhre diffundiren zu lassen, hätte zu viel Zeit in Anspruch genommen, weshalb keine andere Wahl blieb, als mehrere Röhren gleichzeitig anzuwenden, wozu ich mich auch entschloss. Zwölf Röhren und Bechergläser, in der Fig. 13 Taf. II dargestellten Form und Grösse, die einander möglichst glichen, wurden durch Ausführung von Diffusionen gleicher Lösungen controlirt und nach mehreren Versuchen sechs ausgewählt, die sehr regelmässige Zahlenwerthe im Verhältniss 17 : 18 : 17 : 17 : 17 : 17 ergeben hatten. Selbstverständlich waren diese Werthe, wie in obigen Beispielen, kleinen Schwankungen unterworfen, die Durchschnittswerthe waren jedoch constant. Bei der Röhre Nr. 2 war der Theil i etwas kürzer als bei den anderen, was stärkere Diffusion zur Folge hatte.

Die genauen Dimensionen der Röhren waren folgende: der innere Durchmesser von $arst = 1{,}5$ mm, der Durchmesser der Oeffnung $b = 1$ mm, der Durchmesser von $i = 14{,}5$ mm, die Distanz $ge = 11$ mm, und die Distanz $gk = 15$ mm. Die Bechergläser enthielten, bis zum Niveau ab gefüllt, 240 ccm. Sämmtliche unten beschriebenen Experimente wurden mit diesen sechs Röhren ausgeführt, und von den früher besprochenen Versuchen die mit dem blaugefärbten Wasser. Die anderen waren mit etwas kleineren Röhren angestellt worden.

Die sechs Röhren wurden nebeneinander aufgestellt und immer zwei Salzlösungen gleichzeitig untersucht, indem

je drei Röhren die gleiche Lösung enthielten. In einigen Fällen wurde die aus jedem Apparate diffundirte Salzmenge für sich allein bestimmt. In anderen dagegen, z. B. bei den Sulfaten und Nitraten, wurden die Ergebnisse von drei Röhren zusammen ermittelt. In allen Fällen aber sind die unten angeführten Zahlen Durchschnittswerthe auf je eine Röhre berechnet. Die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers betrug in allen Fällen 40 ccm pro Stunde, und die Zimmertemperatur 14—16° C.

Erst am zweiten oder dritten Tage nach dem Füllen des Apparates wurden die Bestimmungen vorgenommen. Von der Reinheit der untersuchten Salze hatte ich mich vorher durch genaue Analysen überzeugt.

Zuerst untersuchte ich die Chloride, deren quantitative Bestimmung ich mittelst $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ (und K_2CrO_4 als Indicator) ausführte. Folgende sind die Versuchsergebnisse:

Diffusion von 2n NaCl		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$	ccm pro Stde.
8— 9 Vm.	2,1	2,10
9—11 „	4,0	2,00
11— 2 Nm.	5,7	1,90
2— 4 „	3,7	1,85
4— 8 Vm.	28,8	1,80
8— 9 „	2,0	2,00
9— 2 Nm.	10,1	2,02
2— 4 „	4,2	2,10
4— 8 Vm.	33,6	2,10
8— 9 „	2,1	2,10
9— 1 Nm.	8,4	2,10
53 Stdn.	104,7	1,97

Diffusion von 2n NH_4Cl		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$	ccm pro Stde.
4— 8 Vm.	32,5	2,03
8— 9 „	2,4	2,40
9—10 „	2,3	2,30
10—11 „	2,4	2,40
11— 2 Nm.	7,2	2,40
2— 4 „	4,9	2,45
4— 8 Vm.	38,4	2,40
8— 1 Nm.	10,5	2,23
45 Stdn.	100,6	2,23

Bei einem zweiten Versuche mit NH_4Cl-Lösung wurden 44,5 ccm in 19 Stunden gebraucht, was 2,34 ccm pro Stunde entspricht. Das Mittel aus beiden Werthen ist gleich 2,28 ccm pro Stunde und dies auf n-Lösung reducirt entspricht:

0,0369 g NH_4Cl in 24 Stunden.

Die NaCl-Lösung erforderte, auf n-Lösung berechnet, sehr nahe 1 ccm pro Stunde, mithin diffundirten:

0,0351 g NaCl in 24 Stunden.

Diffusion von nKCl		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$	ccm pro Stde.
8— 9 Vm.	1,40	1,40
9—11	2,90	1,45
11— 2 Nm.	4,35	1,45
2— 4	2,64	1,32
4— 8 Vm.	20,85	1,30
8—10	2,70	1,35
26 Stdn.	34,84	1,34

Diffusion von 2nLiCl		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$	ccm pro Stde.
3— 4 Nm.	2,1	2,10
4— 8 Vm.	28,8	1,80
8—11	5,1	1,70
11— 2 Nm.	5,7	1,90
2— 4	3,8	1,90
4— 8 Vm.	38,4	1,90
41 Stdn.	75,9	1,85

entsprechend: 0,0599 g KCl in 24 Stunden

und, auf n-Lösung berechnet:

0,0237 g LiCl in 24 Stunden.

Ein zweiter Versuch ergab:

0,0230 g LiCl in 24 Stunden.

Das LiCl war nicht ganz frei von NaCl, obwohl es mehrmals mit Alkohol behandelt worden war. Die Verunreinigung war aber so gering, dass das Salz für meine Zwecke hinreichend rein erschien.

Diffusion von n$CaCl_2$		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$	ccm pro Stde.
9—12 Vm.	3,9	1,30
12— 3 Nm.	3,9	1,30
3— 5	2,7	1,35
5— 9 Vm.	24,0	1,50
9—10	1,3	1,30
25 Stdn.	35,8	1,43

Diffusion von n$MgCl_2$		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$	ccm pro Stde.
11— 1 Nm.	2,8	1,40
1— 3	3,3	1,65
3— 5	2,9	1,45
5— 9 Vm.	20,8	1,30
9— 5 Nm.	8,8	1,10
30 Stdn.	38,6	1,29

Die in der ersten Tabelle angegebenen Zahlen entsprechen: 0,0476 g $CaCl_2$ in 24 Stunden.
Bei einer zweiten Versuchsreihe mit $MgCl_2$ wurden 21,6 ccm in 16 Stunden gebraucht. Das Mittel aus beiden Bestimmungen ergibt: 0,0373 g $MgCl_2$ in 24 Stunden.

Diffusion von $\frac{n}{2}$ BaCl$_2$			Diffusion von $\frac{n}{2}$ SrCl$_2$		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ AgNO$_3$	ccm pro Stde.	Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ AgNO$_3$	ccm pro Stde.
4— 8 Vm.	11,40	0,71	10—11 Vm.	0,8	0,80
8— 9	0,65	0,65	11— 1 Nm.	1,7	0,85
9—11	1,50	0,75	1— 2	1,0	1,00
11— 2 Nm.	2,40	0,80	2— 4	1,5	0,75
2— 4	1,60	0,80	4— 8 Vm.	11,7	0,73
4— 8 Vm.	12,90	0,81	8—10	1,5	0,75
8—10	1,60	0,80	10—12	1,4	0,70
10—12	1,30	0,65	12— 7	4,6	0,67
44 Stdn.	33,30	0,76	33 Stdn.	24,2	0,73

Auf Normal-Lösungen berechnet entspricht dies:

0,0936 g BaCl$_2$ in 24 Stunden

und 0,0686 g SrCl$_2$ in 24 Stunden.

Diffusion von NiCl$_2$ und CoCl$_2$.

Bei den Versuchen mit normalen Lösungen dieser Salze brauchte CoCl$_2$ 1,02 ccm $\frac{n}{40}$ AgNO$_3$ pro Stunde, entsprechend: 0,0397 g CoCl$_2$ in 24 Stunden

und NiCl$_2$ 1,01 ccm $\frac{n}{40}$ AgNO$_3$ pro Stunde, entsprechend:

0,0394 g NiCl$_2$ in 24 Stunden.

Diffusion von Bromiden und Jodiden. Diese Salze wurden in derselben Weise wie die Chloride der Diffusion unterworfen und bestimmt.

Diffusion von n KBr			Diffusion von n NH$_4$Br		
Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ AgNO$_3$	ccm pro Stde.	Zeit	ccm $\frac{n}{40}$ AgNO$_3$	ccm pro Stde.
3— 5 Nm.	2,74	1,37	8—12 Vm.	4,1	1,02
5— 8 Vm.	19,70	1,31	12— 4 Nm.	4,0	1,00
8— 1 Nm.	6,55	1,31	4— 8 Vm.	15,6	0,97
1— 5	5,22	1,30	8—12	4,5	1,12
5— 8 Vm.	18,75	1,25	12— 4 Nm.	4,7	1,17
8—12	6,40	1,60	4— 9 Vm.	18,5	1,09
12— 4 Nm.	6,04	1,51	9— 1 Nm.	4,5	1,12
4— 8 Vm.	21,64	1,35	53 Stdn.	55,9	1,05
8—12	6,05	1,51			
69 Stdn.	93,09	1,35			

Diese Werthe entsprechen:

0,0965 g KBr in 24 Stunden

und 0,0617 g NH_4Br in 24 Stunden.

Versuche mit normalen KJ-, NaJ-, NaBr- und KCy-Lösungen ergaben folgende Resultate:

nKJ	geb. 1,37 ccm $\frac{n}{40}$ $AgNO_3$ pro Stde.	= 0,1364 g KJ	in 24 Stdn.
nNaJ	„ 1,12 „ „ „ „ „	= 0,1008 g NaJ	in 24 Stdn.
nNaBr	„ 0,85 „ „ „ „ „	= 0,0525 g NaBr	in 24 Stdn.
nKCy	„ 0,64 „ „ „ „ „	= 0,0499 g KCy	in 24 Stdn.

Letztere Zahl darf nur als annähernd richtig betrachtet werden, da Lösungen von KCy bekanntlich ziemlich rascher Zersetzung unterworfen sind, und dies nicht ohne Einfluss auf den Gang der Diffusion sein dürfte.

Diffusion von Nitraten. Die Diffusion dieser Salze wurde genau wie bei den besprochenen ausgeführt und die diffundirte Menge des Salzes nach der Marx'schen Methode mitelst Indigolösung bestimmt.

Diffusion von $\frac{n}{4}$ BaN_2O_6		Diffusion von $\frac{n}{4}$ SrN_2O_6	
Zeit	diffund. Gew.	Zeit	diffund. Gew.
8—12 Vm.	0,0068 g	6—10 Vm.	0,0204 g
12— 6 Nm.	0,0110 „	10— 6 Nm.	0,0090 „
6—12 Vm.	0,0315 „	6—12 Vm.	0,0211 „
12— 6 Nm.	0,0107 „	12— 6 Nm.	0,0076 „
6—12 Vm.	0,0330 „	6—12 Vm.	0,0229 „
52 Stdn.	0,0930 „	66 Stdn.	0,0810 „

Diese Zahlen entsprechen $\left(\frac{n}{4}\text{ Lösungen}\right)$:

0,0429 g BaN_2O_6 in 24 Stunden

und 0,0294 g SrN_2O_6 in 24 Stunden.

Diffusion von $nKNO_3$		Diffusion von nNH_4NO_3	
Zeit	diffund. Gew.	Zeit	diffund. Gew.
9—12	0,0077 g	4— 8 Vm.	0,0360 g
12— 3	0,0071 „	8— 2	0,0144 „
3— 8 Vm.	0,0450 „	2— 5	0,0065 „
8— 4	0,0199 „	5— 9 Vm.	0,0358 „
4—10 Vm.	0,0494 „	9— 4	0,0161 „
10— 3	0,0124 „	48 Stdn.	0,1088 „
54 Stdn.	0,1415 „		

Hieraus berechnen sich 0,0026 g KNO_3 pro Stunde. Bei einem zweiten Versuch war die pro Stunde diffundirte Menge 0,0025 g. Das Mittel aus beiden ist:

0,0614 g KNO_3 in 24 Stunden.

Ferner ergibt sich aus der letzten Tabelle:

0,0544 g NH_4NO_3 in 24 Stunden.

Die Versuche mit normalem $NaNO_3$ und $LiNO_3$ ergaben:

0,0446 g $NaNO_3$ in 24 Stunden
und 0,0353 g $LiNO_3$ in 24 Stunden.

Das $LiNO_3$ war von mir aus Mg-freiem Li_2CO_3 bereitet worden und erwies sich bei der Prüfung als sehr rein.

Diffusion von Sulfaten. Ich habe sechs Salze der Schwefelsäure der Untersuchung unterworfen und die diffundirten Mengen der Sulfalte gewichtsanalytisch bestimmt. Das während 24 Stunden aus drei Röhren gewonnene Wasser wurde in Platinschalen eingedampft, das gelöste Sulfat mit $BaCl_2$ ausgefällt und das erhaltene Baryumsulfat in bekannter Weise gewogen. Nachstehend folgen die Ergebnisse dieser Versuche, auf eine Diffusionsröhre berechnet:

Diffusion von $\frac{n}{2}$ $(NH_4)_2SO_4$

Am	1.	Tage	diffundirte	0,0491 g
„	2.	„	„	0,0492 „
„	3.	„	„	0,0463 „

Mittel = 0,0482 g $(NH_4)_2SO_4$ in 24 St.

Diffusion von $\frac{n}{2}$ Na_2SO_4

Am	1.	Tage	diffundirte	0,0502 g
„	2.	„	„	0,0481 „
„	3.	„	„	0,0452 „

Mittel = 0,0478 g Na_2SO_4 in 24 St.

Diffusion von $\frac{n}{2}$ $ZnSO_4$

Am	1.	Tage	diffundirte	0,0298 g
„	2.	„	„	0,0266 „
„	3.	„	„	0,0243 „

Mittel = 0,0269 g $ZnSO_4$ in 24 St.

Diffusion von $\frac{n}{2}$ $CuSO_4$

Am	1.	Tage	diffundirte	0,0271 g
„	2.	„	„	0,0234 „
„	3.	„	„	0,0250 „

Mittel = 0,0252 g $CuSO_4$ in 24 St.

Diffusion von $\frac{n}{2}$ $MgSO_4$	
Am 1. Tage diffundirte	0,0243 g
„ 2. „ „	0,0209 „
„ 3. „ „	0,0184 „
„ 4. „ „	0,0183 „
Mittel = 0,0209 g $MgSO_4$ in 24 St.	

Diffusion von $\frac{n}{2}$ $MnSO_4$	
Am 1. Tage diffundirte	0,0230 g
„ 2. „ „	0,0231 „
„ 3. „ „	0,0213 „
„ 4. „ „	0,0231 „
Mittel = 0,0226 g $MnSO_4$ in 24 St.	

Der hier als 1., 2., 3. bezeichnete Tag ist in Wirklichkeit der 3., 4. und 5. seit Beginn des Versuchs, da mit den Bestimmungen erst nach zweitägiger Thätigkeit der Apparate begonnen wurde.

Bei Betrachtung der oben angegebenen Zahlen ergibt sich, dass in der Regel der Verlauf der Diffusion von Tag zu Tag ein ziemlich regelmässiger war. Bei den Sulfaten findet man die grössten Abweichungen, was möglicherweise seinen Grund darin hat, dass zwei Tage nicht genügen, um den constanten Zustand der Diffusion zu erreichen. Vielleicht ist auch dieses abweichende Verhalten den Sulfaten eigenthümlich. Es war nicht ohne Interesse, zu ermitteln, inwieweit meine Resultate mit denen anderer Forscher übereinstimmten.

Zum Vergleiche geeignet sind die von Graham gefundenen Werthe, und ich habe hierzu die Resultate seiner ersten Abhandlung über Salzdiffusion umgerechnet. Dies geschah in folgender Weise. Der Hals der von Graham angewandten Diffusionsgefässe hatte einen Durchmesser von 30,48 mm; die Höhe derselben betrug 12,7 mm. Der Hals dieser Diffusionsfläschchen, die er in ein weites Gefäss mit Wasser einsetzte, entspricht dem Theile *i* meines Apparates, dessen Durchmesser 14,5 mm beträgt, und dessen Höhe ohne merklichen Fehler als gleich mit der der Graham'schen Flaschenhälse angenommen werden kann. Ich habe nun, um vergleichbare Zahlen zu erhalten, mit Hülfe der Fick'schen Formel einfach berechnet, wie viel Salz aus einer Graham'schen Flasche von 14,5 mm Halsdurchmesser diffundirt wäre, die Geschwindigkeit, wie er sie bei seinen Versuchen beobachtete, vorausgesetzt.

Graham hat Lösungen verschiedener Concentration untersucht, doch war es nicht schwierig, die den normalen Lösungen entsprechenden Werthe zu berechnen. In dieser Weise habe ich die Graham'schen Zahlen reducirt und die Resultate in der unten stehenden Tabelle den meinigen gegenüber gestellt. Eine besondere Correction für die Temperatur anzubringen, habe ich für unnöthig gehalten, da dieser Factor in beiden Fällen nahezu derselbe war.

Aus n-Lösungen diffundirten während 24 Stunden.

Formel	Aus meinen Röhren	Aus Graham'schen Flaschen	Formel	Aus meinen Röhren	Aus Graham'schen Flaschen
	g	g		g	g
KCl	0,0599	0,0638	$NaNO_3$	0,0446	0,0531
$NaCl$	0,0351	0,0373	$LiNO_3$	0,0353	—
NH_4Cl	0,0369	0,0378	$BaN_2O_6 \cdot \frac{n}{4}$	0,0429	0,0296
$LiCl$	0,0233	—			
$CaCl_2$	0,0476	0,0547	$SrN_2O_6 \cdot \frac{n}{4}$	0,0249	0,0241
$SrCl_2$	0,0686	0,0766			
$BaCl_2$	0,0936	0,0974	$CuSO_4 \cdot \frac{n}{2}$	0,0252	0,0235
$MgCl_2$	0,0373	0,0444			
$CoCl_2$	0,0397	—	$ZnSO_4 \cdot \frac{n}{2}$	0,0269	0,0194
$NiCl_2$	0,0394	—			
KBr	0,0965	0,1037	$MnSO_4 \cdot \frac{n}{2}$	0,0226	—
$NaBr$	0,0525	0,0645			
NH_4Br	0,0617	—	$MgSO_4 \cdot \frac{n}{2}$	0,0209	0,0150
KJ	0,1364	0,1416			
NaJ	0,1008	0,0959	$Na_2SO_4 \cdot \frac{n}{2}$	0,0478	0,0300
KCy	0,0499	—			
KNO_3	0,0614	0,0715	$(NH_4)_2SO_4 \cdot \frac{n}{2}$	0,0482	0,0369
NH_4NO_3	0,0544	0,0596			

Aus obigen Zahlen ist ersichtlich, dass die Uebereinstimmung unter den Chloriden, Bromiden, Jodiden und einigen Nitraten eine sehr befriedigende ist, und dass die bei so verschiedenen Methoden zu erwartenden Differenzen nicht zu gross sind. Bei zwei Nitraten und bei den fünf Sulfaten erreichen aber die Differenzen eine Höhe, die man wohl nicht mehr den Beobachtungsfehlern zuschreiben darf. Wahrscheinlich sind die Graham'schen Zahlen in

diesen Fällen zu klein, da bei den meisten dieser Salze die Versuchsdauer eine bedeutend längere war. Die gegebenen Zahlen drücken die Durchschnittswerthe für die ganze Versuchszeit aus; die Resultate meiner Versuche deuten darauf hin, dass die von Graham für diese Salze gewählte Periode eine zu lange war. Ich zweifle nicht, dass bei längerer Dauer meiner Versuche die Mittelwerthe meiner Zahlen eine ähnliche Abnahme gezeigt hätten. Es dürfte mithin als ein Vorzug der oben beschriebenen Methode zu betrachten sein, dass sie das Auftreten von Unregelmässigkeiten jederzeit erkennen lässt.

Es fragt sich nun, ob vielleicht die Diffusionserscheinungen zu anderen physikalischen Vorgängen in engerer Beziehung stehen. Aus den Tabellen direct lassen sich freilich Gesetzmässigkeiten nicht ersehen, und es bedarf einer einfachen Umrechnung, um dieselben deutlicher hervortreten zu lassen. Statt die Quantität der diffundirten Salze in Grammen auszudrücken, gibt man zweckmässiger die Anzahl der in einem Tage diffundirten Molekeln an. Die absolute Anzahl derselben zu ermitteln ist natürlich unmöglich, für unsern Zweck aber auch unnöthig. Relative Zahlen genügen vollkommen, und ich habe solche in einfacher Weise aus den Tabellen gewonnen, indem ich die oben gefundenen Werthe durch das Moleculargewicht des betreffenden Salzes dividirte, und, um Bruchtheile zu vermeiden, den Quotient mit einer grossen Zahl, etwa 1 000 000, multiplicirte. Die Resultate, die bei der Diffusion von $^1/_2$ oder $^1/_4$ normalen Salzlösungen erhalten waren, wurden der Einfachheit wegen verdoppelt oder viervierfacht. Die Diffusionsgeschwindigkeit ist freilich dem Concentrationsgrade nicht genau proportional, doch dürfte zu den genannten Zwecken der kleine Fehler nicht in Betracht kommen.

KCl	803	$CaCl_2$	429	KJ	823	SrN_2O_6	552
NH_4Cl	689	$MgCl_2$	392	NaJ	672	$(NH_4)_2SO_4$	724
$NaCl$	600	$CoCl_2$	306	NH_4NO_3	680	Na_2SO_4	678
$LiCl$	541	$NiCl_2$	304	KNO_3	607	$MgSO_4$	348
KCy	767	KBr	811	$NaNO_3$	524	$ZnSO_4$	332
$BaCl_2$	450	NH_4Br	629	$LiNO_3$	512	$CuSO_4$	316
$SrCl_2$	432	$NaBr$	509	BaN_2O_6	656	$MnSO_4$	298

Diese Zusammenstellung der Versuchsergebnisse zeigt mehrere interessante Beziehungen; so z. B. dass die Chloride, Bromide und Jodide der Alkalimetalle eine Reihe bilden, in der NH_4 zwischen K und Na steht, sowie dass KCl, KBr, KJ und KCy beinahe die nämliche Diffusionsgeschwindigkeit besitzen. Aehnliches ist mit den entsprechenden NH_4- und Na-Salzen der Fall, sowie mit den Chloriden der zweiwerthigen Metalle Ba, Sr, Ca und Mg, den Nitraten und den Sulfaten. Zur grössern Uebersichtlichkeit habe ich diese Beziehungen unten zusammengestellt.

Auch beim Vergleichen der Resultate der Untersuchungen Kohlrausch's über das Leitungsvermögen der Flüssigkeiten[1]) mit den meinigen treten interessante Beziehungen zu Tage. Es scheint allgemeine Regel zu sein, dass diejenigen Salze, die am raschesten diffundiren, auch am besten in wässeriger Lösung leiten.

Die Diffusionsgeschwindigkeiten scheinen ferner in Beziehung zu den Moleculargewichten, Molecularvolumen und Lösungswärmen zu stehen. Salze mit grossem Moleculargewichte und Molecularvolumen scheinen am leichtesten zu diffundiren, während unter den wasserfreien Salzen diejenigen, welche bei der Lösung die grösste Wärmemenge absorbiren, oder, was dasselbe ist, deren Molekeln infolge der geleisteten Arbeit schliesslich in den Zustand der feinsten Zertheilung gelangen, auch die grösste Diffusionsgeschwindigkeit besitzen.

Da alle diese Thatsachen, aller Wahrscheinlichkeit nach, in sehr naher Beziehung zueinander stehen, dürfte

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 1 u. 145. 1879.

es zweckmässig sein, sämmtliche Daten in eine Tabelle zusammenzustellen. Ich lasse dieselbe in möglichster Vollständigkeit hier folgen. Die Molecularvolumina sind aus den mittleren Werthen der in den Clarke'schen Tabellen[1]) enthaltenen specifischen Gewichten berechnet. Die Werthe für das electrische Leitungsvermögen sind aus den oben citirten Abhandlungen genommen und in derselben Bedeutung gebraucht, da sie sich ebenfalls auf normale Lösungen beziehen.

Die Zahlen in der letzten Spalte habe ich aus einer Zusammenstellung in Gmelin-Kraut's Handbuch **I.** p. 512—544, genommen. Sie stammen aus den bekannten Untersuchungen von Thomsen, Berthelot und Favre und Valson her und drücken die Wärmezunahme oder -abnahme aus, welche sich ergibt, wenn das Moleculargewicht eines Salzes, in Grammen ausgedrückt, in überschüssigem Wasser aufgelöst wird.

Die Betrachtung der Tabelle (p. 634) zeigt die Allgemeinheit der oben angedeuteten Analogien. Die Chloride der Alkalien z. B. stehen in derselben Reihenfolge in Bezug auf ihre Molecularvolumina, Diffusionsgeschwindigkeiten, Leitungsvermögen und Wärmeabsorption. Aehnlich ist dies der Fall bei den entsprechenden Bromiden und Jodiden; das Cyanid des Kali verhält sich in Bezug auf seine Diffusionsgeschwindigkeit und sein Leitungsvermögen fast genau wie das Chlorid, Bromid und Jodid desselben Metalls. Das Natriumbromid scheint eine im Verhältniss zu denen der anderen Verbindungen geringe Diffusionsgeschwindigkeit zu besitzen, wenn nicht etwa der von mir gefundene Werth zu klein sein sollte. In der zweiten Gruppe ist die Reihenfolge in Bezug auf Leitungsvermögen und Diffusion dieselbe. In Hinsicht auf Molecularvolumen und Wärmeabsorption bilden die Salze dagegen eine besondere Reihe. NH_4NO_3 leitet und diffundirt besser als KNO_3,

1) Clarke, Constants of Nature. Smithsonian Contributions to knowledge. Washington 1873.

Formel	Molecular-Gewicht	Molecular-Volumen	Diffundirt. Molekeln	Leitungs-vermögen	Lösungswärme		
KCl	74,6	38,4	803	97	— 4440		
NH_4Cl	53,5	35,2	689	95	— 3880		
NaCl	58,5	26,2	600	81	— 1180		
LiCl	42,5	20,9	541	70	—		
KBr	119,1	45,9	811	104	— 5080		
NH_4Br	98,0	42,4	629	103	— 4380		
NaBr	103,0	34,2	509	81	— 150		
KJ	166,0	55,5	823	103	— 5110		
NaJ	150,0	43,4	672	84	+ 1220		
KCy	65,1	42,1	767	101	— 2860		
NH_3NO_3	80,0	47,2	680	93	— 6320		
KNO_3	101,1	48,6	607	92	— 8520		
$NaNO_3$	85,0	38,4	524	76	— 5060		
$LiNO_3$	69,0	28,9	512	—	—		
				Für ½ Mol.			
BaN_2O_6	261,0	81,6	656	69	— 4640		
SrN_2O_6	211,5	76,1	552	—	— 2540		
$BaCl_2$	208,1	54,1	450	79	+ 2344	($BaCl_2 . 2H_2O$)	—4836
$SrCl_2$	158,5	55,0	432	77	+10966	($SrCl_2 . 6H_2O$)	—7172
$CaCl_2$	111,0	49,7	429	75	+18106	($CaCl_2 . 6H_2O$)	—3258
$MgCl_2$	95,0	43,3	392	72	—		
$CoCl_2$	129,8	44,3	306	—	—		
$NiCl_2$	129,8	50,7	304	—	—		
$N_2H_8SO_4$	132,0	75,8	724	76	— 1950		
Na_2SO_4	142,0	53,7	678	63	+ 708	($MgSO_4 . 7H_2O$)	—3720
$MgSO_4$	120,0	45,4	348	37	+20304	($ZnSO_4 . 7H_2O$)	—4148
$ZnSO_4$	161,2	46,2	332	34	+18548	($CuSO_4 . 5H_2O$)	—2432
$CuSO_4$	159,5	44,5	316	33	+16298	($MnSO_4 . 5H_2O$)	+ 460
$MnSO_4$	151,1	48,8	298	—	+14170		

hat aber ein kleineres Volumen und geringere Wärmeabsorption. Das Leitungsvermögen von SrN_2O_6 ist meines Wissens noch nicht bestimmt worden, in anderen Beziehungen aber steht es hinter dem BaN_2O_6. Bei den zweiwerthigen Chloriden ist die Reihenfolge wieder dieselbe, bezüglich deren Diffusion, Leitung und Wärme-

wirkung, dagegen sind die Molecularvolumina weniger regelmässig. In der Gruppe der Sulfate stehen die einzelnen Salze in Bezug auf Diffusion und Leitungsvermögen in derselben Reihenfolge; die Sulfate des Zinks, Magnesiums und Kupfers sind einander in beiden Beziehungen ziemlich ähnlich. Interessant ist, dass schwefelsaures Ammoniak und schwefelsaures Natron etwa doppelt so grosse Werthe für Diffusion und Leitungsfähigkeit besitzen als die anderen angeführten Sulfate. Die Zahlenwerthe für Molecularvolumen und Lösungswärme sind in dieser Gruppe ganz unregelmässig, und in der That kommen in Hinsicht auf Diffusionsgeschwindigkeit und Wärmeabsorption die wasserfreien Salze in umgekehrte Reihenfolge zu stehen. Eine Uebereinstimmung in diesem Falle ist allerdings kaum zu erwarten, da diese Salze sich beim Auflösen mit grossen und sehr verschiedenen Wassermengen verbinden.

Bevor ich zu weiterer Besprechung dieser Analogien übergehe, will ich auf einige andere Thatsachen hinweisen.

Kohlrausch hat gezeigt, dass die Säuren HCl, HBr, HJ und HNO_3 fast genau das gleiche Leitungsvermögen besitzen. Es ist nun sehr interessant, zu wissen, wie diese Verbindungen sich hinsichtlich ihrer Diffusionsschnelligkeit verhalten. Ich habe keine Versuche mit denselben ausgeführt, aber glücklicherweise sind alle vier von Graham untersucht worden, und ich gebe nachstehend seine Resultate, in der oben erwähnten Weise reducirt. Die beim Auflösen eines Aequivalentes jeder Säure entwickelte Wärmemenge ist beigefügt.

Formel	Molec.-Gewicht	Diffund. Molek.	Leitungs-vermögen	Lösungs-wärme
HCl	36,5	989	323	17500
HBr	81,0	965	311	20000
HJ	128,0	994	328	19000
HNO_3	63,0	977	334	7500

Die Uebereinstimmung könnte nicht besser sein, da die vier Säuren in Hinsicht auf ihre Diffusionsgeschwindigkeit einander ebenso nahe stehen als in ihrem Leitungs-

vermögen. Die Lösungswärme der drei ähnlich constituirten Säuren sind wenigstens annähernd dieselben, die der Salpetersäure dagegen viel geringer.

Unter allen diesen Analogien scheint die am leichtesten zu erklärende diejenige zwischen Wärmeabsorption und Diffusionsgeschwindigkeit zu sein. Das Latentwerden einer grossen Wärmemenge deutet auf die Leistung einer entsprechend grossen Arbeit. Die Arbeit in diesem Falle wäre etwa das Auseinanderreissen der grösseren Molekelcomplexe in kleinere, und die hierbei entstandenen kleineren Gruppen würden sich in der Lösung natürlich mit grösserer Leichtigkeit bewegen können als die grösseren Aggregate. Andererseits aber dürfen wir kaum von einem Salze mit grossem Molecularvolumen eine schnelle Diffusion erwarten. Nun ist es möglich, dass grosse Wärmeabsorption und grosses Molecularvolumen einander entsprechen und sich compensiren, sodass die Diffusion von beiden unabhängig zu sein scheint. Eine Lösung dieser Frage kann ich zur Zeit nicht geben; ich begnüge mich hier mit Anführung der Thatsachen und dem Hinweise auf ihre gegenseitigen Beziehungen. Ganz anders ist es dagegen mit den Beziehungen zwischen Diffusion und electrolytischer Leitung. In beiden Fällen ist eine Molecularbewegung der in Betracht kommende Factor, und obwohl auf den ersten Blick eine Erklärung hier eben so schwierig wie dort scheinen mag, bietet sich hier doch ein Anhaltspunkt.

Zunächst ist hier an die Theorie der Constitution von Lösungen, wie sie von Clausius[1]), Williamson[2]) u. a. gegeben wurde, zu erinnern. Clausius nimmt an, dass in einer Lösung, z. B. von NaCl, die zwei Atome nicht absolut fest aneinander gebunden seien, sondern infolge ihrer eigenen lebhaften Bewegungen und der zahlreichen Zusammenstösse mit anderen nicht selten vonein-

1) Clausius, Pogg. Ann. **101.** p. 338. 1857.

2) Williamson, Chem. Soc. Qu. Journ. **4.** p. 229; Lieb. Ann. **77.** p. 37. 1851.

ander losgerissen, sich getrennt fortbewegen und durch ihren Zusammenstoss mit anderen Molekeln zum Zerfall dieser Anlass geben können. Dabei können die Geschwindigkeiten, mit welchen diese getrennten Theilchen sich fortbewegen, ganz verschieden sein, und was als die Geschwindigkeit der Molekel NaCl in einer Lösung angesehen werden darf, ist wahrscheinlich die Summe der Geschwindigkeiten der beiden Componenten. Die Wirkung des galvanischen Stromes auf ein solches System wird nun die sein, dass die nach wie vor lebhaften Bewegungen der Atome nicht mehr in der regellosen Weise wie vorher geschehen, sondern mehr und mehr in Richtungen gelenkt werden, die der Strombahn parallel sind. Von den Electroden werden die positiven Atome nach der einen, die negativen nach der andern Seite gezogen, wodurch die Electrolyse zu Stande kommt.

„Betrachtet man im Innern dieser Flüssigkeit, während die electrische Kraft wirkt, ein kleines auf der Richtung der Kraft senkrechtes Flächenstück, so gehen durch dieses während der Zeiteinheit mehr positive Theilmolecüle in positiver als in negativer Richtung hindurch, und mehr negative Theilmolecüle in negativer als in positiver Richtung. Da nun für jede Art von Theilmolecülen zwei in entgegengesetzter Richtung stattfindende Durchgänge sich gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben, und nur der für die eine Richtung bleibende Ueberschuss von Durchgängen in Betracht kommt, so kann man das Vorige auch einfacher so ausdrücken: es geht eine gewisse Anzahl positiver Theilmolecüle in positiver und eine Anzahl negativer Theilmolecüle in negativer Richtung durch das Flächenstück. Die Grösse dieser beiden Zahlen braucht nicht gleich zu sein, weil sie ausser von der treibenden Kraft, welche für beide gleich ist, auch noch von dem Grade der Beweglichkeit abhängt, welcher bei verschiedenartigen Theilmolecülen aus mehreren Gründen verschieden sein kann.“ Clausius[1]).

1) Clausius, Pogg. Ann. **101.** p. 350. 1857.

Das Verhältniss der Anzahl der negativen Atome oder Theilmolekeln, welche durch das Flächenstück hindurchgehen, zu der Anzahl der gleichzeitig zersetzten Molekeln wird von Hittorf in seinen bekannten Abhandlungen über die „Wanderung der Ionen"[1]) die Ueberführungszahl genannt und mit dem Buchstaben n bezeichnet. Er hat ferner gezeigt, dass dieses n gleich ist dem Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit der negativen Atome und der Summe der Geschwindigkeiten der positiven und der negativen Atome. Kohlrausch in seinen oben erwähnten Abhandlungen drückt das Verhältniss aus als:

$$n = \frac{v}{u + v},$$

wo v die Geschwindigkeit der negativen und u die der positiven Atome bedeutet, und er hat aus den vielen von Hittorf bestimmten Zahlenwerthen die den verdünnten Lösungen entsprechenden ausgerechnet. Er hat ferner gezeigt, dass v, die Beweglichkeit eines negativen Atoms, z. B. des Cl, dieselbe ist in seinen sämmtlichen Verbindungen, in HCl, KCl, $BaCl_2$ u. s. w. Dieselbe Regel gilt für positive Atome, wie K in KOH, KCl und KNO_3.

Vergleicht man nun die Zahlenwerthe n in irgend einer Gruppe mit der Diffussionsgeschwindigkeit der Salze derselben Gruppe, so ergibt sich, dass in den Fällen, wo n gross ist, die Diffusionsgeschwindigkeit eine geringe ist, und in der That ist fast in jeder Gruppe das Product aus n und der Diffusionsgeschwindigkeit, welche ich kurz d nennen will, eine nahezu constante Zahl. So finden wir bei den zweiwerthigen Chloriden:

	$\frac{n}{2}$	d	$\frac{n}{2}d$
$BaCl_2$	0,618	450	277
$SrCl_2$	0,655	432	283
$CaCl_2$	0,673	429	288
$MgCl_2$	0,682	392	267

1) Hittorf, Pogg. Ann. **89.** p. 176. 1853; **98.** p, 1. 1856; **103.** p. 1. 1858; **106.** p. 337. 1859.

Bei KCl, KBr und KJ

	n	d	nd
KCl	0,515	803	413
KBr	0,514	811	416
KJ	0,505	823	415

Bei den Sulfaten

	$\frac{n}{2}$	d	$\frac{n}{2}d$
$MgSO_4$	0,630	348	219
$ZnSO_4$	0,640	332	212
$CuSO_4$	0,645	316	204.

Aus diesen Tabellen scheint im allgemeinen hervorzugehen, dass

$$n:n'=d':d, \text{ d. h. } \frac{v}{v+u}:\frac{v'}{v'+u'}=d':d.$$

Aber wie oben bemerkt ist v' gleich v, mithin

$$d:d'=v+u:v+u',$$

oder in Worten ausgedrückt: die Diffusionsgeschwindigkeit eines Salzes ist proportional der Summe der Geschwindigkeiten, mit welcher seine Bestandtheile während der Electrolyse sich bewegen. Wir verstehen nunmehr den Zusammenhang meiner Resultate mit denen Kohlrausch's, da derselbe gezeigt hat, dass das Leitungsvermögen ebenfalls von den Geschwindigkeiten der Componenten abhängig ist. Von dieser Annahme ausgehend, berechnete er das Leitungsvermögen vieler Salze, und die so erhaltenen Werthe stimmen mit den durch den Versuch gefundenen sehr gut überein.

Diese Beziehung ist um so interessanter, als die Wahrscheinlichkeit derselben schon vor vielen Jahren von Wiedemann[1]) ausgesprochen wurde.

Es scheint demnach, dass das Gesetz der unabhängigen Beweglichkeit der Ionen ebenso gültig ist vor der Electrolyse einer Salzlösung als während derselben, da im entgegengesetzten Falle obige Analogien kaum erklärlich wären.

1) Wiedemann, Pogg. Ann. **104.** p. 170. 1858. Siehe auch Maxwell, „Theorie der Wärme", übers. v. Auerbach, p. 318.

Verschiedene andere Thatsachen scheinen überdies eine Beziehung zwischen Diffusion und Leitung zu beweisen. Beide wachsen mit der Temperatur, und nach den Graham'schen Untersuchungen scheint die Zunahme in der erstern etwa so gross zu sein, wie sie Kohlrausch für letztere bestimmte. Der Einfluss der Temperatur auf die Diffusion ist bis jetzt nur für wenige Salze ermittelt und auch da nicht mit vollkommener Sicherheit. Ferner hat Graham gezeigt, dass bei fast allen der von ihm untersuchten Salze die Diffusionsgeschwindigkeit mit wachsender Concentration abnimmt. Dies gilt in der nämlichen Weise vom Leitungsvermögen, und die Erklärung ist in beiden Fällen die gleiche: in concentrirten Lösungen beeinträchtigt, wie Kohlrausch bemerkt, jede Molekel gewissermassen die Bewegungen der anderen, und diese Interferenz lässt sich in dem einen Falle durch eine verminderte Zunahme der Diffusion, im andern durch langsames Wachsen des Leitungsvermögens nachweisen. In der That tritt, wenn man sämmtliche der obigen Daten in Betracht zieht, die Allgemeinheit der Analogien hervor. In dem einen Falle ist die Anzahl der Molekeln, in dem andern die durch dieselben fortgepflanzte Bewegung das in Betracht kommende Moment, und dass sie gewisse Beziehungen zeigen, ist keineswegs auffallend. Ob die Molekeln sich während der Diffusion mit derselben absoluten Schnelligkeit bewegen, wie während der Electrolyse, vermag ich nicht zu sagen, aber durch das Vorhergehende scheint bewiesen zu sein, dass falls bei letzterer eine Beschleunigung stattfindet, dieselbe für alle Salze jeder Reihe die gleiche sein muss.

Zur weitern Erkenntniss dieser Verhältnisse ist die Feststellung einiger anderer Daten erforderlich. So sollte die Diffusion der Elemente Cl und Br in wässeriger Lösung von neuem untersucht, und womöglich genauere Ermittelungen über den Einfluss der Temperatur vorgenommen werden. Die Kenntniss der Diffusionsgeschwindigkeit der alkalischen Hydrate ist ebenfalls sehr wünschenswerth, und

wenn obige Schlüsse von allgemeiner Geltung sind, müssen diese Körper durch rasche Diffusion wie durch grosses Leitungsvermögen ausgezeichnet sein. Auch Phosphate und Carbonate verdienen weitere Untersuchung, und ich gedenke, dieselben zum Gegenstand späterer Versuche zu machen.

Erst nach vollendetem Drucke meiner Dissertation ist eine Arbeit von Schuhmeister[1]) über denselben Gegenstand zu meiner Kenntniss gekommen. In einer kurzen Bemerkung am Schlusse derselben spricht der Verfasser die Ansicht aus, es bestehe ein Zusammenhang zwischen Leitungsvermögen, Reibung und Diffusion einiger Lösungen, da sich dieselben bezüglich aller drei in derselben Reihenfolge anordnen.

Tübingen, im September 1879.

V. *Ueber die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte; von H. A. Lorentz.*

(Für die Annalen vom Hrn. Verfasser bearbeitet.)[2])

---

§ 1. Die von Maxwell aufgestellte electromagnetische Theorie des Lichtes wurde bis jetzt nur noch auf die allgemeinen Gesetze der Lichtfortpflanzung und auf die Vorgänge bei der Reflexion und Refraction angewandt. Behufs einer weitern Vergleichung mit den Thatsachen habe ich untersucht, was sich aus derselben über den Zusammenhang zwischen den Brechungsexponenten n und der Dichte d eines Körpers ableiten lässt.

---

1) Schuhmeister, Untersuchungen über die Diffusion der Salzlösungen. Wien. Ber. April 1879.

2) Lorentz, Verhandelingen der Akad. v. Wet. te Amsterdam, Deel 18.

Ich bin dabei von der Vorstellung ausgegangen, dass sich zwischen den Molecülen des betrachteten Körpers der Aether befinde, und habe versuchsweise noch die Hypothese hinzugefügt, dass die Eigenschaften dieses Mediums, ausgenommen vielleicht in der unmittelbaren Nähe der Molecüle die nämlichen seien, wie im luftleeren Raum. Nimmt man dann weiter noch an, dass in jedem Molecül eines isotropen Körpers von einer electromotorischen Kraft ein derselben proportionales und gleichgerichtetes electrisches Moment erregt wird und dass auch für sehr kleine Entfernungen das Coulomb'sche Gesetz gilt, so führt die Rechnung zu einer Beziehung zwischen dem specifischen Inductionsvermögen K eines nichtleitenden Körpers und seiner Dichte. Verbindet man dieses Resultat mit der von Maxwell gefundenen Gleichung $K = n^2$, so findet man, dass bei Aenderungen der Dichte die Grösse

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)\, d} = \text{Const.} \tag{1}$$

sein muss.

Gegen die angedeutete Ableitung dieser Formel liesse sich indess der Einwand erheben, dass bei den Rechnungen, welche zu der Gleichung $K = n^2$ führten, das Medium als vollkommen homogen betrachtet wurde, und dass man also dieselbe nicht ohne weiteres auf einen Körper von molecularer Constitution anwenden dürfe. Ausserdem kann die benutzte Schlussweise jedenfalls nur für Strahlen mit unendlich grosser Wellenlänge gelten. Ich habe es deshalb vorgezogen, die Lichtbewegung in einem Körper wie den angenommenen direct zu behandeln und dabei sowohl die electrischen Bewegungen, welche in den Molecülen, wie diejenigen, welche im Aether ihren Sitz haben, in Betracht zu ziehen. Es schien dies auch deshalb der Mühe werth, weil auch für andere Zwecke, z. B. in der Theorie der Aberration, die gesonderte Betrachtung der genannten Bewegungen nothwendig sein wird.

§ 2. Denken wir uns im unbegrenzten Aether eine sehr grosse Zahl von gleichen Molecülen in isotroper Anordnung zerstreut. Um jedes derselben legen wir eine

kleine Kugel K, sodass ausserhalb dieser Flächen der Aether die nämlichen Eigenschaften besitzt, wie im luftleeren Raum. Ueber den Stoff innerhalb der Kugeln nehme ich an, dass er sich, was die Wirkung nach aussen betrifft, durch ein einziges Molecül P im Mittelpunkte ersetzen lässt. In meiner ursprünglichen Abhandlung habe ich nachgewiesen, dass wirklich bei verschiedenen anderen Annahmen die nämlichen Resultate erhalten werden. So z. B. wenn man sich die Kugeln K mit einer vollkommen leitenden Materie erfüllt denkt, oder wenn in jedem Molecül einige electrische Theilchen vorausgesetzt werden, welche sich im Aether bewegen können.

Für jedes der Theilchen P, welche wir nach dem Gesagten annehmen, mögen zwischen den Componenten X, Y, Z der auf dasselbe wirkenden electromotorischen Kraft und denjenigen m_x, m_y, m_z des inducirten electrischen Momentes die Beziehungen

$$m_x = \varkappa X, \quad m_y = \varkappa Y, \quad m_z = \varkappa Z \tag{2}$$

bestehen, wo $\varkappa$ eine von der Natur der Molecüle abhängige Constante ist.

§ 3. Wenn nun in den Theilchen des Körpers electrische Bewegungen vor sich gehen, werden sich solche auch von jedem Molecül aus in den Aether ausbreiten, sodass in jedem Punkte dieses Mediums eine dielectrische Polarisation bestehen wird. Die Componenten ξ, η, ζ derselben sind mit denjenigen der electromotorischen Kraft durch die Beziehungen

$$\xi = \varepsilon_0 X, \quad \eta = \varepsilon_0 Y, \quad \zeta = \varepsilon_0 Z \tag{3}$$

verbunden (ε_0 Dielectricitätsconstante des Aethers). Aus diesen Grundformeln lassen sich partielle Differentialgleichungen herleiten, in welchen ξ, η, ζ als Functionen von den Coordinaten x, y, z und der Zeit t enthalten sind. Wir wollen dieselben in der Gestalt, wie sie von Herrn Helmholtz[1]) abgeleitet wurden, zu Grunde legen. Nur

1) Helmholtz, Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern, Crelle's Journ. Bd. 72. Auszug in Wiedemann, Galvanismus. II. 2. Aufl. § 1256 u. fl.

werden wir zur Abkürzung die von ihm in Betracht gezogene magnetische Polarisation des Aethers, sowie die magnetischen Momente, welche in den Körpermolecülen entstehen können, vernachlässigen. Wie ich in der Originalarbeit erörtert habe, übt dies keinen Einfluss auf das Resultat aus.

§ 4. Betrachten wir nun zunächst ein einzelnes Theilchen P in der Mitte der Höhlung K (§ 2). Es bestehe in demselben in der Richtung der x-Axe ein electrisches Moment

$$m_x = f_1(t). \tag{4}$$

Vermöge desselben übt das Molecül zunächst eine electrostatische Kraft aus; ausserdem wirkt es wie ein (veränderliches) Stromelement $\frac{dm_x}{dt}$ in der Richtung der x-Axe.[1] Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin, von den im vorigen § erwähnten Gleichungen eine Lösung zu finden, welche die von dem genannten Momente und Stromelemente im Aether hervorgerufenen Bewegungen darzustellen vermag. Wir beachten dabei erstens, dass nach jenen Gleichungen jeder Bewegungszustand im Aether aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, die wir als den transversalen und den longitudinalen Theil unterscheiden können, und dass wir demgemäss zwei Werthsysteme für ξ, η, ζ zu finden haben. Zweitens müssen wir uns bei der Wahl derselben durch gewisse Bedingungen der Symmetrie leiten lassen, so u. a. dadurch, dass die Richtung der dielectrischen Polarisation in einem Punkte Q des Aethers mit der Richtung PQ in einer der x-Axe parallelen Ebene liegen muss.

Die transversale Bewegung im Aether genügt den Gleichungen

1) Betsteht in einem Leiterelemente ds mit den Componenten dx, dy, dz ein Strom mit der (in electrostatischem Maass ausgedrückten) Intensität i, so nennen wir kurz ids das Stromelement, idx, idy, idz seine Componenten.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial_2 \xi}{\partial t^2}, \quad \Delta \eta = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \Delta \zeta = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,^{1)},$$

wo v_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler electrischer Schwingungen im Aether, d, h. also die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die Lösung dieser Gleichungen, welche wir versuchen werden, den Bedingungen des Problems anzupassen, lautet folgendermassen:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \xi = -\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right], \\ \eta = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right], \quad \zeta = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{v_0} \right) \right]. \end{cases}$$

Hier bedeutet r die Entfernung von P, während α ein constanter Factor ist.

Für die Longitudinalbewegung hat man:

$$\xi = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \Delta \chi = \frac{1}{V^2_0} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

wo V_0 wieder die (von v_0 verschiedene) Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Wir wählen die Lösung:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \xi = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right], \quad \eta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right], \\ \zeta = \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{V_0} \right) \right] \end{cases}$$

(β constant).[2])

§ 5. Wir wollen nun annehmen, erstens, dass das Theilchen P ausser dem Momente (4) dergleichen Momente $m_y = f_2(t)$ und $m_z = f_3(t)$ in den Richtungen der

1) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

2) Um (A) und (B) zu finden, habe ich folgenden Satz angewandt: Von der Gleichung $\Delta \psi = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ist $\psi = \frac{1}{r} F \left(t - \frac{r}{k} \right)$ eine Lösung, und es lassen sich daraus durch Differentiation nach x, y, z beliebig viele andere Lösungen ableiten.

y- und z-Axe besitzt, zweitens, dass diese Momente in ganz gleicher Weise wie m_x electrische Bewegungen im Aether erregen, drittens, dass auch zu jedem andern Molecül ähnliche Bewegungen gehören wie zu P, und zwar mögen dabei die Grössen α und β immer die nämlichen Werthe besitzen. Wir werden dann zeigen, dass sich m_x, m_y, m_z als Functionen von Ort und Zeit, und α und β als Constanten so bestimmen lassen, dass überall den Bedingungen (2) und (3) genügt wird.[1])

§ 6. Um diesen Beweis zu liefern, habe ich zunächst die electromotorische Kraft berechnet, welche infolge des Bewegungszustandes (A) auftritt, wenn derselbe im ganzen Raum ausserhalb der Kugel K besteht.[2]) In einem Punkt dieses Raumes setzt sich jene Kraft aus drei Theilen zusammen. Der erste hat die Componenten $\frac{\xi}{\varepsilon_0}$, $\frac{\eta}{\varepsilon_0}$, $\frac{\zeta}{\varepsilon_0}$. Der zweite Theil ist der electrostatischen Kraft gleich, welche von einem in P liegenden und der x-Axe parallel gerichteten electrischen Momente:

$$M = \alpha \left\{ -\frac{8}{3}\pi \left(f_1 + \frac{\varrho}{v_0} f_1' \right) - \frac{4}{5}\pi A^2 v_0^2 \left(5 f_1 + 5\frac{\varrho}{v_0} f_1' + 2\frac{\varrho^2}{v_0^2} f_1'' \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\varrho^3}{3 v_0^3} f_1''' \right) - \frac{4}{15}\pi (1-k) A^2 v_0^2 \left(\frac{\varrho^2}{v_0^2} f_1'' + \frac{\varrho^3}{v_0^3} f_1''' \right) \right\}$$

herrühren würde. Hier ist ϱ der Radius von K; A und k sind die beiden in der Helmholtz'schen Inductionsformel auftretenden Constanten; die Zeichen f_1, f_1' u. s. w.

---

1) Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, wenn α und β so bestimmt werden, (A) und (B) eigentlich nicht blos die von P erregten Bewegungen vorstellen, sondern auch diejenigen umfassen, welche von den übrigen Theilchen ausgegangen sind und an der Oberfläche der Kugel K, welche P enthält, zurückgeworfen werden. Die weiteren Berechnungen werden eben dadurch ermöglicht, dass man diese verschiedenen Bewegungen nicht gesondert zu betrachten braucht.

2) Es muss jedoch angenommen werden, dass die Bewegungen (A) nur bis zu einer endlichen Entfernung von P bestehen, oder wenigstens bei wachsendem Abstande rasch genug schwächer werden.

sind zur Abkürzung für die Functionswerthe $f_1\left(t - \frac{\varrho}{v_0}\right)$, $f_1'\left(t - \frac{\varrho}{v_0}\right)$ u. s. w. geschrieben.

Der dritte Theil endlich hat den nämlichen Werth wie die von einem gleichfalls in P in der Richtung der x-Axe gelegenen Stromelemente:

$$S = -\frac{8}{3}\pi\alpha\left(f_1' + \frac{\varrho}{v_0}f_1''\right)$$

ausgeübten Induction.

Befände sich also in P in der genannten Richtung ein Moment $-M$ (das nur electrostatische Wirkung ausübte) und ein Stromelement $-S$, dann wäre die ganze electromotorische Kraft in einem Punkte des Aethers $\frac{\xi}{\varepsilon_0}, \frac{\eta}{\varepsilon_0}, \frac{\zeta}{\varepsilon_0}$, sodass dann der Zustand (A) wirklich bestehen könnte. Anders gesagt, um diese Bewegungen zu unterhalten, sind in P das Moment $-M$ und das Stromelement $-S$ erforderlich.

§ 7. Die Ausdrücke für diese Grössen vereinfachen sich erheblich, wenn man annimmt, dass der Radius ϱ so klein ist, dass in der Zeit $\frac{\varrho}{v_0}$ sich die Functionen $f_1(t)$, $f_1'(t)$ u. s. w. nur äusserst wenig ändern. Es kann dann in einer Reihenentwicklung wie:

$$f_1\left(t - \frac{\varrho}{v_0}\right) = f_1(t) - \frac{\varrho}{v_0}f_1'(t) + \frac{\varrho^2}{2v_0^2}f_1''(t) - \text{u. s. w.}$$

jedes Glied gegen das vorhergehende vernachlässigt werden. Berücksichtigt man ausserdem die Formel (4) und die Relation $v_0^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 A^2}$ [1]), so erhält man schliesslich:

$$-M = \alpha\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x, \quad -S = \alpha\cdot\frac{8}{3}\pi\frac{\partial m_x}{\partial t}.$$

In gleicher Weise sind zur Unterhaltung von (B) in

1) Dieselbe geht aus der von Helmholtz für v_0 abgeleiteten Formel hervor, wenn man darin $\vartheta_0 = 0$ setzt.

P das Moment $\beta\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{s_0}\right) m_x$ und das Stromelement $-\beta \cdot \frac{4}{3}\pi \frac{\partial m_x}{\partial t}$ erforderlich.

Für die im Mittelpunkte der Höhlung K von (A) und (B) hervorgerufene electromotorische Kraft (welche wieder der x-Axe parallel ist) ergibt sich endlich der Werth:

$$(\alpha + \beta) \cdot \frac{8}{3}\pi \frac{m_x}{\varrho^3}.$$

§ 8. Aus dem Gefundenen geht hervor, dass, wenn von jedem Molecül (mit den drei Momenten m_x, m_y, m_z) aus sich Bewegungen im Aether fortpflanzten, und wenn sich diese über den ganzen Raum ausserhalb der um das Molecül gelegten Kugel erstreckten, in jedem Theilchen zur Unterhaltung dieser Bewegungen ein Moment und ein Stromelement mit den Componenten:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{s_0}\right) m_x, \ (\alpha + \beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{s_0}\right) m_y, \\ \qquad (\alpha + \beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{s_0}\right) m_z, \end{array} \right.$$

$$(6) \quad (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3}\pi \frac{\partial m_x}{\partial t}, \ (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3}\pi \frac{\partial m_y}{\partial t}, \ (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3}\pi \frac{\partial m_z}{\partial t}$$

erforderlich wären.

Hätten aber jene Bewegungen die soeben genannte Ausbreitung, so würde auch noch innerhalb jeder Kugel K eine dielectrische Polarisation bestehen, für welche jedes Molecül mit Ausnahme des in der Kugel selbst liegenden einen Beitrag lieferte. Es lässt sich zeigen, dass in isotropen Körpern, wenn ϱ nicht zu gross ist, die erwähnte Polarisation über die ganze Kugel die nämliche Grösse und Richtung hat. Ihre Componenten seien ξ', η', ζ'. Um nun die wirklich im Aether vor sich gehenden Bewegungen zu erhalten, haben wir nur nachträglich diese dielectrische Polarisation innerhalb der Kugeln fortzulassen. Die electromotorische Kraft in einem Punkte des Aethers bleibt dabei ungeändert, wenn wir zu gleicher Zeit in die Mittel-

punkte der Kugeln Momente und Stromelemente mit den Componenten:

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3\xi', \quad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\eta', \quad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\zeta', \tag{7}$$

$$\frac{4}{3}\pi\varrho^3\frac{\partial\xi'}{\partial t}, \quad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\frac{\partial\eta'}{\partial t}, \quad \frac{4}{3}\pi\varrho^3\frac{\partial\zeta'}{\partial t} \tag{8}$$

setzen, denn diese üben die nämliche Wirkung aus wie der durch ξ', η', ζ' vorgestellte Bewegungszustand. Addirt man also (7) und (8) zu (5) und (6), so erhält man die Momente und Stromelemente, welche den § 5 vorausgesetzten Zustand im Aether zu unterhalten vermögen. Diese Grössen müssen dann aber den Momenten m_x, m_y, m_z und den Stromelementen $\frac{\partial m_x}{\partial t}$, $\frac{\partial m_y}{\partial t}$, $\frac{\partial m_z}{\partial t}$ gleich sein, welche wirklich in den Mittelpunkten der Kugeln K bestehen. Wir erhalten also für jedes Molecül die Gleichungen:

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)m_x+\frac{4}{3}\pi\varrho^3\xi' = m_x \quad \text{u. s. w.} \tag{α}$$

$$(2\alpha-\beta)\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\partial m_x}{\partial t}+\frac{4}{3}\pi\varrho^3\frac{\partial\xi'}{\partial t} = \frac{\partial m_x}{\partial t} \quad \text{u. s. w.} \tag{β}$$

§ 9. Zu diesen Beziehungen treten noch diejenigen, welche aus den Bedingungen (2) hervorgehen. Bei dem im Anfange des § 8 vorausgesetzten Bewegungszustande besteht im Mittelpunkte P einer Kugel K erstens die electromotorische Kraft:

$$(\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\frac{m_x}{\varrho^3}, \quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\frac{m_y}{\varrho^3}, \quad (\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\frac{m_z}{\varrho^3}, \tag{9}$$

welche von denjenigen Bewegungen ausserhalb K herrührt, die zu dem Molecül P selbst gehören; zweitens die Kraft:

$$\frac{\xi'}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\eta'}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\zeta'}{\varepsilon_0}, \tag{10}$$

welche von den zu den übrigen Theilchen gehörenden Bewegungen ausgeübt wird und von den Momenten und Stromelementen (5) und (6), welche denselben beigelegt wurden. Wird nun erstens die Polarisation (ξ', η', ζ') in allen Kugeln mit Ausnahme der betrachteten durch die Momente und Stromelemente (7) und (8) ersetzt, so bleibt dabei die

electromotorische Kraft in P ungeändert, und, wenn die Bedingungen (α) und (β) erfüllt sind, haben wir dann zu gleicher Zeit die Wirkung der übrigen Molecüle auf P gehörig in Rechnung gezogen. Um also die Grössen X, Y, Z in (2) zu finden, haben wir nur noch von der Summe von (9) und (10) die electromotorische Kraft abzuziehen, welche in P von dem Bewegungszustande (ξ', η', ζ') innerhalb der Kugel K selbst hervorgerufen wird. So erhält man schliesslich aus (2):

$$(\gamma) \qquad \varkappa\left[(\alpha+\beta)\cdot\frac{8}{3}\pi\frac{m_x}{\varrho^3}+\frac{\xi'}{\varepsilon_0}+\frac{4}{3}\pi\,\xi'\right]=m_x,\ \text{u. s. w.}$$

§ 10. Wir werden nun zeigen, dass den Gleichungen (α), (β), (γ) wirklich genügt werden kann durch eine Fortpflanzung transversaler Schwingungen. Wir verstehen darunter im allgemeinen jeden Bewegungszustand, der den Gleichungen:

$$(\text{I}) \qquad \frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}+\frac{\partial m_z}{\partial z}=0,$$

$$(\text{II}) \qquad \Delta m_x=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 m_x}{\partial t^2},\ \Delta m_y=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 m_y}{\partial t^2},\ \Delta m_z=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 m_z}{\partial t^2}$$

genügt; v ist die vorläufig unbekannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es sei:

$$m_x=f_1(x,y,z,t),\ m_y=f_2(x,y,z,t),\ m_z=f_3(x,y,z,t)$$

ein Werthsystem, wodurch (I) und (II) befriedigt werden, und es mögen dabei f_1, f_2, f_3 stetige Functionen sein, welche entweder nur in endlicher Entfernung vom Coordinatenursprung einen von 0 verschiedenen Werth haben, oder wenigstens bei wachsender Entfernung rasch abnehmen. Um dann diese Werthe zu prüfen, haben wir für den Mittelpunkt P einer Kugel K die Grössen ξ', η', ζ' zu berechnen. Wir beschränken uns dabei zunächst auf denjenigen Theil ξ'_1 von ξ', der von den transversalen Bewegungen (A) herrührt. Sind die Coordinaten von P x', y', z', diejenigen irgend eines andern Molecüls Q x, y, z, ist weiter $PQ=r$, so liefert Q für ξ'_1 den Antheil:

$$11)\begin{cases} \xi'_{1(q)} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{r}f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{r}f_2\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right]\right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{r}f_3\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right]\right\} - \alpha \Delta'\left[\frac{1}{r}f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right] \end{cases}$$

$$\left(\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)$$

Um hieraus ξ'_1 zu erhalten, muss man über sämmtliche Theilchen Q summiren.

§ 11. Wir wollen dabei noch die weitere Voraussetzung machen, dass sich m_x, m_y, m_z von Molecül zu Molecül nur sehr langsam ändern, was bei der Lichtbewegung der Fall sein wird, wenn die Wellenlänge gegen die Entfernung zweier Nachbarmolecüle sehr gross ist. Wir können dann um P als Mittelpunkt eine Kugel S legen, welche sehr viele Theilchen enthält, aber dennoch so klein ist, dass für sämmtliche Molecüle innerhalb derselben m_x, m_y, m_z als gleich betrachtet werden dürfen. Wir erreichen dadurch erstens eine erhebliche Vereinfachung von (11) für die Theilchen Q innerhalb S, und es lässt sich zeigen, dass $\Sigma \xi'_{1(q)}$ über diese Theilchen ausgedehnt verschwindet, sobald die Anordnung der Molecüle isotrop oder wenigstens, wie bei den Krystallen des regulären Systems, nach drei unter einander senkrechten Richtungen die nämliche ist. Zweitens lässt sich $\Sigma \xi'_{1(q)}$ für die übrigen Theilchen durch ein Integral über den Raum ausserhalb S ersetzen. Ist nämlich p die Molecülzahl in der Raumeinheit, so wird

$$\xi'_1 = \alpha p \frac{\partial J_1}{\partial x'} - \alpha p J_2,$$

wenn

$$J_1 = \iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{r}f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{r}f_2\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{r}f_3\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right]\right\} dx\, dy\, dz,$$

und

$$J_2 = \iiint \Delta'\left[\frac{1}{r}f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right] dx\, dy\, dz$$

gesetzt wird.

§ 12. Um J_1 zu finden benutzen wir folgende Betrachtung. Die Grössen $\frac{1}{r}f_1\left(x,y,z,t-\frac{r}{v_0}\right)$, $\frac{1}{r}f_2$, $\frac{1}{r}f_3$ enthalten x, y, z erstens gesondert, zweitens in r involvirt. Bezeichnet man nun mit $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ die wirklichen Differentialquotienten, mit $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ diejenigen, welche man erhält, wenn man r als constant betrachtet, so ist

$$J_2=\iiint\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{r}f_1\right]+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{1}{r}f_2\right]+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{1}{r}f_3\right]\right\}dx\,dy\,dz$$
$$-\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}f_1\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{r}f_2\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}f_3\right]\right\}dx\,dy\,dz.$$

Die Function im ersten Integrale ist der Werth, den $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}+\frac{\partial m_z}{\partial z}\right)$ zur Zeit $t-\frac{r}{v_0}$ im Punkte (x, y, z) hat, und verschwindet also nach (I). Das letzte Glied reducirt sich auf ein Integral über die Kugelfläche S, und auch $\frac{\partial J_1}{\partial x'}$ lässt sich durch ein solches Integral darstellen. Die Ausrechnung liefert

$$\frac{\partial J_1}{\partial x'}=\tfrac{4}{3}\pi\, m_x,$$

wo m_x sich auf das Theilchen P bezieht.

§ 13. Das Integral J_2 kann man in zweierlei Weise umformen. Erstens ist identisch

$$J_2=\iiint\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\left[\frac{1}{r}f_1\right]dx\,dy\,dz$$
$$-\iiint\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x'}\Big\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\right\}\Big]\left[\frac{1}{r}f_1\right]dx\,dy\,dz.$$

Die letzte Grösse reducirt sich auf ein Integral über S und erhält den Werth $-4\pi m_x$. Die im ersten Integral vorkommende Function ist aber der Werth, den $\frac{1}{r}\Delta m_x$ im Punkte (x, y, z) zur Zeit $t-\frac{r}{v_0}$ annimmt. Unter Berücksichtigung von (II) wird demzufolge

$$J_2 = \frac{1}{v^2}\iiint \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right] dx\, dy\, dz + 4\pi m_x.$$

Zweitens erhält man, wenn man die durch Δ' angedeuteten Operationen ausführt (vergl. § 4):

$$J_2 = \frac{1}{v_0^2}\iiint \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{r} f_1\left(x, y, z, t - \frac{r}{v_0}\right)\right] dx\, dy\, dz.$$

Aus den beiden gefundenen Werthen kann man das Integral eliminiren; führt man dabei für das Verhältniss $\frac{v_0}{v}$, d. h. also für den absoluten Brechungsexponenten des betrachteten Mediums, den Buchstaben n ein, so wird

$$J_2 = -\frac{4\pi m_x}{n^2-1},$$

folglich

$$\xi_1' = \alpha p \cdot \tfrac{4}{3}\pi m_x - \alpha p \cdot \frac{4\pi m_x}{n^2-1} = \alpha p \cdot \tfrac{4}{3}\pi m_x \cdot \frac{n^2+2}{n^2-1}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für denjenigen Theil von ξ', der von den Bewegungen (B) herrührt, der Werth $\beta \cdot \frac{4}{3}\pi p m_x$. Es wird also schliesslich

$$\text{(12)}\quad \xi' = q m_x,\ \ \eta' = q m_y,\ \ \zeta' = q m_z,\ \ q = \tfrac{4}{3}\pi p\left(\alpha \cdot \frac{n^2+2}{n^2-1} + \beta\right).$$

§ 14. Durch Einführung dieser Werthe zieht sich jedes der Systeme (α), (β), (γ) auf eine Gleichung zusammen, nämlich auf:

$$\text{(13)}\quad \begin{cases} (\alpha+\beta)\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) + \frac{4}{3}\pi \varrho^3 q = 1, \quad (2\alpha - \beta) \cdot \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi \varrho^3 q = 1, \\ \qquad (\alpha+\beta) \cdot \frac{8}{3}\pi + \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\varrho^3 q = \frac{\varrho^3}{\varkappa}. \end{cases}$$

Da also zwischen α, β, q (woraus mittelst (12) n und v gefunden werden können) drei Gleichungen bestehen, ist einerseits der vorausgesetzte Bewegungszustand möglich und lassen sich andererseits alle bis jetzt unbestimmt gebliebenen Grössen berechnen. Es wird nämlich:

$$\alpha = \frac{4\pi\varepsilon_0\left(1 - \frac{\varrho^3}{\varkappa}\right) + 3}{12\pi}, \qquad \beta = -\frac{\alpha}{1 + 4\pi\varepsilon_0},$$

$$q = \frac{\frac{8}{3}\pi\varepsilon_0^2\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varrho^3}\right) + \frac{\varepsilon_0}{\varkappa}}{1 + 4\pi\varepsilon_0}.$$

Nun ist man in der electromagnetischen Lichttheorie genöthigt, für die Constante ε_0 einen so grossen Werth anzunehmen, dass $\frac{1}{\varepsilon_0}$ gegen die Einheit vernachlässigt werden darf.[1]) Es geht dann aus dem Werth von β zunächst hervor, dass die im Aether bestehende longitudinale Bewegung sehr viel schwächer ist als die transversale. Substituirt man weiter die gefundenen Werthe in (12), vernachlässigt man dabei $\frac{1}{1+4\pi\varepsilon_0}$ gegen $\frac{n^2+2}{n^2-1}$, setzt man im zweiten Gliede $\frac{4\pi\varepsilon_0}{1+4\pi\varepsilon_0}=1$, und berücksichtigt man noch die Relation $p=\frac{d}{m}$, wo d die Dichte des Mediums, m die Masse eines Molecüls bedeutet, so wird

$$\text{(III)} \qquad \frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}=k,$$

wenn

$$\text{(14)} \qquad k=\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3}{m}\cdot\frac{(3+4\pi\varepsilon_0)-4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{\varrho^3}{\varkappa}}{(3+8\pi\varepsilon_0)\frac{\varrho^3}{\varkappa}-8\pi\varepsilon_0}$$

ist.

Variirt nun die Dichte des betrachteten Körpers, und bleiben dabei die Molecüle ungeändert, so bleibt auch k, also auch $\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}$ constant (vergl. (1)).

§ 15. Wenn man nicht, wie im Vorhergehenden, alle Molecüle als gleich betrachtet, sondern mehrere Arten derselben voraussetzt, so erhält man Formeln für den Brechungsexponenten einer Mischung. Es ergibt sich dann erstens, dass auch hier noch das Verhältniss $\frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}$ einen constanten Werth haben muss, zweitens, dass zwischen dieser Grösse und den analogen Constanten $\frac{n_1^2-1}{(n_1^2+2)\,d_1}$, $\frac{n_2^2-1}{(n_2^2+2)\,d_2}$ u. s. w., welche sich auf die Bestandtheile der Mischung in gesondertem Zustande beziehen, die Relation:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{n^2-1}{(n^2+2)\,d}=a_1\frac{n_1^2-1}{(n_1^2+2)\,d_1}+a_2\frac{n_2^2-1}{(n_2^2+2)\,d_2}+\text{u. s. w.}$$

1) Helmholtz, a. a. O. p. 68, Anmerkung, p. 128, 129.

bestehen muss. Dabei sind a_1, a_2 u. s. w. die in der Gewichtseinheit vorhandenen Mengen der Bestandtheile.

§ 16. Da nach (14) der Werth von k unabhängig von der Wellenlänge ist, sind zur Erklärung der Dispersion des Lichtes weitere Betrachtungen nothwendig. Ich habe zunächst untersucht, ob es (ähnlich wie in der Cauchy'schen Theorie) möglich ist, die Farbenzerstreuung daraus zu erklären, dass die Körper nicht aus einer homogenen Materie, sondern aus discreten Theilchen bestehen.

In der That wird die Voraussetzung des § 11, dass die electrischen Momente von Nachbarmolecülen als gleich betrachtet werden dürfen, um so weniger erfüllt sein, je kleiner die Wellenlänge l ist. Treibt man die Genauigkeit weiter, berücksichtigt man also auch die Verschiedenheit der Momente von nebeneinander liegenden Theilchen, so erhält man an den früher für ξ', η', ζ' gefundenen Werthen Correctionen, welche, mit diesen Werthen selbst verglichen, von der Ordnung $\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ sind, wenn δ die Entfernung der nächstliegenden Theilchen bedeutet. Es wird dann auch n von l abhängig.

Ich habe die eben erwähnten Correctionen für den Fall berechnet, dass die Molecüle eine regelmässig cubische Anordnung haben. Es ergab sich dabei allerdings eine Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge (in umgekehrter Richtung wie die beobachtete); nach dem zu urtheilen, was wir über die Entfernung der Molecüle wissen, scheint indess der berechnete Unterschied von n für verschiedene Wellenlängen unmerklich sein zu müssen.[1])

---

1) Setzt man z. B. in der erhaltenen Formel für δ den Werth, den Hr. van der Waals für die mittlere Entfernung der Molecüle eines Gases (bei 0° und 760 mm Druck) gefunden hat, 0,000 0025 mm, und nimmt man an, dass für unendlich lange Wellen der Brechungsexponent $n_0 = 1{,}5$ ist, so findet man, dass der Werth von n für ultraviolette Strahlen erst in der vierten Decimale von n_0 abweicht.

Es lässt sich also in dieser Weise die Dispersion nicht aus der molecularen Discontinuität erklären. Immerhin wäre dies vielleicht möglich, wenn man nicht mehr für die electrischen Kräfte in molecularen Entfernungen die nämlichen Gesetze annehmen wollte, welche für messbare Entfernungen gelten; es könnte dadurch die gegenseitige Wirkung nebeneinander liegender Theilchen und damit der Einfluss der unstetigen Raumerfüllung grösser werden.

Indess scheint mir gegen jede Erklärung der Dispersion aus der Anordnung der Molecüle der Umstand zu sprechen, dass die Krystalle des regulären Systems wenigstens mit sehr grosser Annäherung optisch isotrop sind; sobald man nämlich der molecularen Structur einen grossen Einfluss zuschreibt, wird man bei diesen Körpern nicht mehr alle Richtungen als optisch gleichwerthig betrachten dürfen.

§ 17. Diese Umstände scheinen mir darauf hinzuweisen, dass die Ursache der Farbenzerstreuung nicht in der Anordnung, sondern vielmehr in der Beschaffenheit der Molecüle gesucht werden muss. Um die Möglichkeit einer solchen Erklärung zu zeigen, wollen wir die Entstehungsweise eines electrischen Momentes etwas näher betrachten und zwar unter den möglichst einfachen Voraussetzungen.

Es mögen sich in einem Körpertheilchen mehrere mit Electricität geladene materielle Punkte befinden, von denen jedoch nur einer mit der Ladung e aus seiner Gleichgewichtslage verschoben werden kann. (Die übrigen seien daran durch ihre grossen Massen verhindert.) Es werde weiter dieser Punkt, wenn er eine Verschiebung (x, y, z) erlitten hat, durch den Einfluss der übrigen mit einer Kraft $(-cx, -cy, -cz)$ (c positive Constante) nach der Gleichgewichtslage zurückgetrieben. Wirkt dann die äussere electromotorische Kraft (X, Y, Z), so wird Gleichgewicht bestehen, wenn $x = \frac{e}{c} X$, $y = \frac{e}{c} Y$, $z = \frac{e}{c} Z$ ist. Die Com-

ponenten des electrischen Momentes sind dann ex, ey, ez[1]), oder $\varkappa X$, $\varkappa Y$, $\varkappa Z$, wenn $\varkappa = \frac{e^2}{c}$ ist.

Anders verhält sich die Sache, sobald sich der materielle Punkt bewegt. Ist μ seine Masse, so muss dann:

$$eX - cx = \mu \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad eY - cy = \mu \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad eZ - cz = \mu \frac{d^2 z}{dt^2}$$

sein. Für den Fall, dass der Punkt einfache Schwingungen macht mit der Oscillationsdauer T, kann man aus diesen Formeln noch die Beziehungen (2) herleiten; nur ist jetzt $\varkappa = \dfrac{e^2}{c - \dfrac{4\pi^2\mu}{T^2}}$, also desto grösser, je kleiner T ist (wenn immer $\frac{4\pi^2\mu}{T^2} < c$ bleibt).

Wir haben hier eine sehr specielle Voraussetzung über die Natur der Molecüle zu Grunde gelegt, und ihr Bau kann in Wirklichkeit viel complicirter sein. Obiges Beispiel möge denn auch nur dazu dienen, die Annahme wahrscheinlich zu machen, dass man in den Formeln, welche wir früher erhalten haben, für $\varkappa$ eine mit wachsendem T abnehmende Grösse zu setzen hat, sobald man annimmt, dass bei dem Entstehen eines electrischen Momentes eine gewisse Masse in Bewegung gesetzt wird. Wie dann aber diese Annahme zu einer Erklärung der Dispersion führen kann, ergibt sich leicht aus den Gleichungen (III) und (14).

In meiner ursprünglichen Arbeit habe ich nachgewiesen, dass man wirklich auf dem hier angedeuteten Wege zu Dispersionsformeln gelangen kann, welche eine befriedigende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zeigen. Ich verzichte hier auf die Mittheilung derselben, da sie doch bei unserer Unbekanntheit mit dem Baue der Molecüle nur dazu dienen können, die Möglichkeit einer Erklärung zu beweisen, und da, sogar wenn sie theoretisch vollkommen genau waren, die Gleichung von Cauchy eine viel bequemere Interpolationsformel bleiben würde.

1) Es ist hierbei angenommen, dass die algebraïsche Summe der electrischen Ladungen im Molecül 0 ist, und dass im Gleichgewichtszustande kein electrisches Moment besteht.

Es muss schliesslich noch hervorgehoben werden, dass wenn die oben mitgetheilten Ansichten über die Ursache der Dispersion richtig sind, und also die Grösse $\varkappa$ eine Function von T ist, alle früher entwickelten Resultate gültig bleiben, wenn man sich auf Schwingungen mit bestimmter Oscillationsdauer beschränkt. Die Beziehung zwischen n und d, sowie die Gleichung (IV) müssen dann also für jede bestimmte Gattung von Lichtstrahlen gelten und nicht etwa blos für solche mit unendlich grosser Wellenlänge.

§ 18. Ich habe die entwickelte Theorie zunächst verglichen mit den Versuchen des Hrn. Wüllner[1]) über die Aenderungen, welche die Brechungsexponenten von einigen Flüssigkeiten und Gemischen derselben durch Erwärmung erleiden. Nachstehende Tabelle I bezieht sich auf die (mittelst der Cauchy'schen Formel aus den Messungen abgeleiteten) Brechungsexponenten A für unendlich grosse Wellenlänge. Die Abnahme derselben durch Erwärmung ist nicht blos nach der Formel (III), sondern auch nach den bekannten Formeln:

$$\text{(V)} \quad \frac{n^2-1}{d} = \text{Const.} \qquad \text{und} \qquad \text{(VI)} \quad \frac{n-1}{d} = \text{Const.}$$

berechnet. Es wurden dabei die von Hrn. Wüllner mitbestimmten Aenderungen der Dichtigkeit benutzt.

I.

Abnahme von A für 1° C.

	Beobachtet	Berechnet nach (V)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (VI)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (III)	Beob. — Rechn.
Glycerin	0,000263	192	71	227	36	260	3
1 Wasser; 3,7 Glycerin	0,000229	167	62	196	33	223	6
1 „ 1 „	0,000183	131	52	152	31	170	13
1 „ 0,5 „	0,000152	107	45	123	29	136	16
1 Alkohol; 4 „	0,000289	213	76	251	38	286	3
1 „ 2 „	0,000301	241	60	283	18	322	— 21
1 „ 0,998 „	0,000325	260	65	303	22	342	— 17
1 „ 0,4997 „	0,000350	288	62	335	15	376	— 26

1) Wüllner, Pogg. Ann. **133.** p. 1. 1868.

Fortsetzung von Tabelle I.

	Beobachtet	Berechnet nach (V)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (VI)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (III)	Beob. — Rechn.
Alkohol	0,000384	328	56	377	7	419	— 35
Gesättigte Chlorzinklösung	0,000286	242	44	290	—4	340	— 54
1 Wasser; 3,997 „	0,000264	223	41	264	0	303	— 39
1 „ 1,996 „	0,000256	208	48	244	12	278	— 22
1 „ 0,9998 „	0,000249	197	52	229	20	258	— 9
Schwefelkohlenstoff . . .	0,000754	569	185	700	54	860	—106
1 Alkohol; 3,955 CS_2	0,000646	522	124	629	17	746	—100
1 „ 2,12836 „	0,000593	493	100	588	5	688	— 95
1 „ 1,03111 „	0,000544	450	94	532	12	611	— 67

Da die Dichtigkeit des Wassers nicht als eine lineare Function der Temperatur dargestellt werden kann, habe ich für diese Flüssigkeit aus dem Werth von A für 10° diejenigen für 20° und 30° berechnet und dabei folgende Werthe erhalten:

II.

Temperatur	Beobachtet	Berechnet nach (V)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (VI)	Beob. — Rechn.	Berechnet nach (III)	Beob. — Rechn.
10°	1,32508	—	—	—	—	—	—
20°	1,32409	1,32467	—58	1,32461	—52	1,32456	—47
30°	1,32310	1,32396	—86	1,32380	—70	1,32368	—58

§ 19. Da die gemessenen Brechungsexponenten jedenfalls bis auf 4 Decimalen genau sind, zeigen diese Tabellen, dass jede der drei angewandten Formeln, wenn man aus ihr die Aenderung von A für nur 10° ableitet, zu Abweichungen führt, welche die Beobachtungsfehler übersteigen. Diese Abweichungen sind am grössten bei (V), während je nach der Natur der betrachteten Flüssigkeit bald unsere Gleichung (III), bald die empirische Formel (VI) die grösste Genauigkeit liefert. Bei beiden erreichen die Abweichungen etwa den Werth von 19 Proc. der beobachteten Aenderung von A.

Mit Ausnahme des Wassers und der Gemische von Wasser und Glycerin liefert die Formel (III) für die Aen-

derung des Brechungsexponenten zu grosse Werthe. Wir wollen Abweichungen in dieser Richtung negativ, also die beim Wasser auftretenden positiv nennen. Der Einfluss des Wassers macht sich auch in den negativen Abweichungen der Chlorzinklösungen dadurch bemerkbar, dass dieselben mit steigender Verdünnung abnehmen.

§ 20. In ganz gleicher Weise wie oben auf die Aenderung von A habe ich die Formel (III) auch auf die Brechungsexponenten n_α und n_γ für die beiden Wasserstofflinien H_α und H_γ angewendet. Die Tabellen III und IV enthalten die Resultate.

III. Abnahme für 1° C. von

	n_α			n_γ		
	Beobachtet	Berechn. nach (III)	Beob. − Rechn.	Beobachtet	Berechn. nach (III)	Beob. − Rechn.
Glycerin	0,000 265	267	− 2	0,000 267	275	− 8
1 Wasser; 3,7 Glycerin	0,000 231	228	+ 3	0,000 233	235	− 2
1 „ 1 „	0,000 185	174	+ 11	0,000 187	180	+ 7
1 „ 0,5 „	0,000 154	140	+ 14	0,000 156	144	+ 12
1 Alkohol; 4 „	0,000 292	293	− 1	0,000 296	303	− 7
1 „ 2 „	0,000 305	330	− 25	0,000 310	340	− 30
1 „ 0,998 „	0,000 330	350	− 20	0,000 336	361	− 25
1 „ 0,4997 „	0,000 356	386	− 30	0,000 363	397	− 34
Alkohol	0,000 389	429	− 40	0,000 395	442	− 47
Gesättigte Chlorzinklösung	0,000 288	353	− 65	0,000 291	369	− 78
1 Wasser; 3,997 „	0,000 266	314	− 48	0,000 268	327	− 59
1 „ 1,996 „	0,000 258	287	− 29	0,000 261	298	− 37
1 „ 0,9998 „	0,000 250	265	− 15	0,000 252	275	− 23
Schwefelkohlenstoff . .	0,000 780	920	−140	0,000 850	1032	−182
1 Alkohol; 3,955 CS_2	0,000 678	790	−112	0,000 750	867	−117
1 „ 2,12836 „	0,000 626	724	− 98	0,000 680	786	−106
1 „ 1,03111 „	0,000 560	638	− 78	0,000 590	682	− 92

IV. Wasser.

Temperatur	n_α Beobachtet	Berechnet	Beob. − Rechn.	n_γ Beobachtet	Berechnet	Beob. − Rechn.
10°	1,33215	—	—	1,34130	—	—
20°	1,33116	1,33162	−54	1,34031	1,34076	−45
30°	1,33017	1,33071	−54	1,33932	1,33982	−50

§ 21. Die Tabellen I und III zeigen, dass die unbekannten Ursachen, wodurch bei Glycerin, Alkohol, Chlorzinklösung und Schwefelkohlenstoff die Brechungsexponenten sich weniger ändern, als es nach unserer Theorie der Fall sein müsste, einen um so grössern Einfluss haben, je kleiner die Wellenlänge ist. Auch verschiedene andere Flüssigkeiten, auf welche ich die Formel (III) anwendete, zeigen ein ganz übereinstimmendes Verhalten.

Sogar beim Wasser, wofür in den Tabellen die Abweichungen entgegengesetzte Richtung haben, scheinen noch die nämlichen Ursachen wie bei den anderen Flüssigkeiten zu bestehen. Denn erstens wird hier die positive Abweichung um so geringer, je kleiner die Wellenlänge ist. Und zweitens erhält man wirklich negative Abweichungen, wenn man unsere Formel vergleicht mit den Beobachtungen des Hrn. Jamin über die Aenderung des Brechungsexponenten des Wassers durch Zusammendrückung.

Während also negative Abweichungen die Regel sind, scheint man die positiven beim Wasser secundären Ursachen zuschreiben zu müssen, welche sich nur bei einer Temperaturänderung bemerkbar machen. Es wäre z. B. möglich, dass bei Erwärmung die Wassermolecüle sich so änderten, dass $\varkappa$ abnimmt, durch welche Auffassung man es auch erklären könnte, dass bei einer Abkühlung unter 4° C. trotz der Ausdehnung des Wassers der Brechungsexponent zunimmt. Ich bemerke schliesslich noch, dass die positiven Abweichungen nur bis zu einer bestimmten Temperatur zu bestehen scheinen.

§ 22. Unter den festen Körpern haben einige, wie z. B. Flussspath (nach den Bestimmungen von Baille[1]), wie die Flüssigkeiten einen bei Erwärmung abnehmenden Brechungsexponenten. Bei Anwendung der Formel (III) zeigen sich wieder negative Abweichungen; nur sind sie jetzt grösser geworden. Man kann sich nun vorstellen, dass die Ursachen, welche hier noch mehr als bei den Flüssig-

1) Baille, Recherches sur les indices de réfraction. Paris, 1867.

keiten die Abnahme der Brechungsexponenten verkleinern, wenn sie in noch stärkerem Maasse aufträten, sogar eine Zunahme der Brechungsexponenten zur Folge haben könnten. Eine solche ist wirklich bei verschiedenen Glassorten durch die Versuche von Fizeau, van der Willigen und Baille nachgewiesen.

Mit der Auffassung, dass die Abweichungen von unserer Theorie sowohl bei festen Körpern wie bei Flüssigkeiten den nämlichen Ursachen zugeschrieben werden müssen, ist es ganz in Uebereinstimmung, dass erstens bei Flintglas die Zunahme des Brechungsexponenten um so grösser ist, für je kleinere Wellenlängen man ihn betrachtet, und dass zweitens, wie Baille fand, bei Crownglas der Brechungsexponent für grössere Wellenlängen bei Erwärmung ab-, derjenige für kleinere Wellenlängen zunimmt.

§ 23. Wir können schliesslich die Formel (III) noch auf diejenigen Körper anwenden, für welche der Brechungsexponent im flüssigen und dampfförmigen Zustande bekannt ist. Folgende kleine Tabelle enthält die (absoluten) Brechungsexponenten einiger Dämpfe, aus denjenigen der zugehörigen Flüssigkeiten berechnet. Es beziehen sich dabei erstere auf einen Druck von 760 mm und die Temperatur 0°.[1])

	Flüssig		
	Dichte	n	
Wasser	1 (4°)	1,3345 (4°)	Wüllner
Schwefelkohlenstoff .	1,2702 (15,6°)	1,6308 (15,6°)	Baden Powell
Aether	0,7166 (20°)	1,3529 (20°)	Landolt
Schweflige Säure .	0,4821	1,3384	Ketteler [2])

1) Kann der Dampf unter diesen Verhältnissen nicht bestehen, so haben die angegebenen Zahlen die Bedeutung, dass man aus denselben mittelst einer der (für Gase identischen) Formeln (III), (V) und (VI) die Brechungsexponenten für wirklich vorkommende Zustände berechnen kann.

2) Ketteler, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase.

	Gasförmig		
	Dichte (die d. Luft = 1)	n Beobachtet	Berechnet
Wasser	0,622	1,000 261 Jamin[1])	1,000 249
Schwefelkohlenstoff .	2,644	1,001 50 Dulong	1,001 44
Aether	2,580	1,001 53 „	1,001 51
Schweflige Säure . .	2,216	{ 1,000 665 „ 1,000 686 Ketteler	1,000 605

Auch hier haben, wie man sieht, die Abweichungen die schon öfter angedeutete Richtung. Das Gegentheil schien der Fall zu sein bei Schwefel- und Phosphordampf, deren Brechungsexponenten aus denjenigen des festen Schwefels und Phosphors berechnet und mit den von Hrn. Le Roux[2]) bestimmten Werthen verglichen werden können. Für festen Schwefel ist (für rothe Strahlen) $n = 2{,}053$, $d = 2{,}065$; für Phosphor $n = 2{,}106$, $d = 1{,}823$. Da nun die Dichtigkeit der Dämpfe in Beziehung auf Luft resp. 6,617 und 4,355 ist, erhält man für n die Werthe 1,0032 und 1,0020 (bei 0° und 760 mm), während nach Le Roux $n = 1{,}001\,629$ und $n = 1{,}001\,364$ sein sollte. Es scheinen mir aber die letzteren Zahlen mit einem bedeutenden Fehler behaftet zu sein. Le Roux hat bei Berechnung seiner Versuche den Satz angewandt, dass der relative Brechungsexponent zweier gasförmiger Körper von gleicher Temperatur und bei Atmosphärendruck von der Temperatur unabhängig ist. Dies ist augenscheinlich falsch. Eine entsprechende Correction reducirt die Angaben von Le Roux für Schwefel auf $n = 1{,}0036$, für Phosphor auf $n = 1{,}0025$ (welche Zahlen indess wohl nicht sehr genau sein können). Die Abweichungen von unseren theoretischen Werthen wären dann also wieder negativ.[3])

§ 24. Was nun die Ursachen der immer in gleicher Richtung wiederkehrenden Abweichungen betrifft, so kann man darüber nur Muthmassungen anstellen. Sie könnten

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3) **52.** p. 163. 1858.

2) Le Roux, Ann. de chim. et de phys. (3) **61.** p. 585. 1861.

3) Sind diese Bemerkungen über die Angaben von Le Roux richtig, so werden die Folgerungen, welche Hr. Schrauf in seinen „Physikalischen Studien", p. 72, aus denselben ableitet, unstatthaft.

z. B. ihren Grund haben in einer Aenderung der Molecüle, in einem Einflusse derselben auf die Eigenschaften des Aethers, in einer Abweichung von den gewöhnlichen Wirkungsgesetzen der Electricität für moleculare Entfernungen oder endlich in den Complicationen, welche eintreten könnten, wenn die Molecüle einen grossen Theil des Körperarmes einnehmen. Es wäre indess voreilig, eine dieser Hypothesen, deren Zahl sich noch wohl vermehren liesse, schon jetzt weiter auszuarbeiten.

§ 25. Nach dem Obigen lässt sich auch bei der Formel (IV), welche wir für den Brechungsexponenten einer Mischung ableiteten, keine absolute Genauigkeit erwarten. In der That fand ich bei der Anwendung derselben auf verschiedene Mischungen nicht unbedeutende Abweichungen. Ihre Richtung lässt sich hier nicht mehr so einfach angeben wie in den früher untersuchten Fällen; dass aber auch hier die nämlichen Ursachen wirken wie bei der Dichtigkeitsänderung der Körper, dafür spricht der Umstand, dass die Abweichungen wieder im allgemeinen mit abnehmender Wellenlänge wachsen.

§ 26. Bekanntlich haben verschiedene Physiker gezeigt, dass man bei vielen chemischen Verbindungen mit ziemlicher Annäherung die Brechungsexponenten aus denjenigen der Bestandtheile mittelst der Formeln berechnen kann, welche für Mischungen angenommen würden. Als ich die Formel (IV) auf einige Verbindungen von Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff anwendete, deren Brechungsexponenten von Hrn. Landolt bestimmt sind, erhielt ich zwar eine gewisse rohe Uebereinstimmung; es steht indessen in dieser Hinsicht die Gleichung (IV) entschieden hinter der von Hrn. Landolt benutzten empirischen Formel zurück.

Wenn es sich übrigens bei weiterer Untersuchung zeigen sollte, dass wirklich für die Brechungsexponenten einer grössern Zahl von Verbindungen die nämlichen Formeln gelten wie für die Mischungen, so wäre dies, wenn man die electromagnetische Theorie des Lichtes annimmt

wohl am besten zu erklären durch die Annahme, dass ebenso wie in jedem Molecüle einer Mischung, so auch in jedem Atome einer Verbindung ein electrisches Moment erregt werden könne.

VI. *Das Stokes'sche Gesetz; von O. Lubarsch.*

Seit ich vor mehr als Jahresfrist eine Abhandlung[1]) über Fluorescenz publicirte, in welcher ich die von Lommel erhaltenen Resultate nach genauer Untersuchung bestätigte, sind drei neue Arbeiten in diesen Annalen erschienen, welche sich mit der Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes beschäftigen. Die erste[2]), von Lommel, ist gegen eine in den Comptes rendus erschienene Abhandlung[3]) von Lamansky gerichtet und soll zeigen, dass der letztere Beobachter, welcher für das Stokes'sche Gesetz eintritt, in Wahrheit durch seine Untersuchungen nur bewiesen hat, dass die mittlere Brechbarkeit des erregenden Lichtes grösser ist, als die mittlere des Fluorescenzlichtes (das Stokes'sche Gesetz verlangt bekanntlich, dass die höchste Brechbarkeit des erregenden Lichtes grösser sei als die höchste des erregten), dass er somit nichts Neues geliefert hat. Kurze Zeit darauf griff Hagenbach[4]) die Ansichten Lommel's an, indem er zeigte, dass bei richtiger Bestimmung der oberen Grenze des erregenden Lichtes dieselbe stets höher gefunden wird als bisher angenommen wurde, und dass das Stokes'sche Gesetz sich bei Vermeidung dieses Fehlers immer als richtig erweist. Endlich zeigt Lamansky[5]) in seiner

1) Lubarsch, Wied. Ann. **6.** p. 248. 1879.
2) Lommel, Wied. Ann. **8.** p. 244. 1879.
3) Lamansky, Compt. rend. **88.** p. 1192. 1879.
4) Hagenbach, Wied. Ann. **8.** p. 369. 1879.
5) Lamansky, Wied. Ann. **8.** p. 624. 1879.

neuesten Arbeit, welche eine ausführlichere Reproduction seiner in den Comptes rendus erschienenen ist, dass seine Darstellung missverstanden worden sei, und dass er wirklich die Richtigkeit des Stokes'schen Gesetzes gegenüber Lommel's Resultaten bewiesen habe.

Da ich nach dem, was ich früher selbst beobachtet habe, mich zunächst der Ansicht von Lommel anschliessen musste, so erregten die beiden letztgenannten Arbeiten mein Interesse in gleichem Grade. Eine genauere Durchsicht beider zeigte mir jedoch, dass nur die Abhandlung Hagenbach's von Wichtigkeit in dem Streite über die Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes sei. Sie führt eine neue Bestimmungsmethode ein, und ich muss aus diesem Grunde unter Anwendung derselben Methode die Versuche Hagenbach's erst wiederholen, um mich davon zu überzeugen, ob die neue Methode wirklich so stark auf die Resultate einwirkt, wie dieser Forscher angibt. Wegen des nöthigen starken Sonnenlichtes muss diese Arbeit bis zum nächsten Sommer verschoben bleiben. Was dagegen die Abhandlung von Lamansky angeht, so will ich in dem Folgenden nachweisen, dass deren Resultate von allen bisherigen Beobachtungen so erstaunlich abweichen, dass ich nur glauben kann, Lamansky habe irrthümlich Erscheinungen beobachtet, welche er für Fluorescenzspectra hielt, die es in Wahrheit aber zum grössten Theil nicht waren. Trotz dieser Abweichungen, die doch dem Beobachter selbst hätten auffallen müssen, wenn er die einschlägige Literatur eingehender studirt hätte, behauptet Lamansky, dass seine Versuche ein unanfechtbarer Beweis für die allgemeine Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes seien.

Was zuerst an diesen Versuchen auffällt, ist der Umstand, dass der Beobachter mittelst total reflectirender Prismen genügend lichtstarke Fluorescenzspectra erhalten haben will, was bisher weder Hagenbach noch Lommel und ebenso wenig mir, der ich sämmtliche Methoden dieser beiden Forscher wiederholt anwendete, gelungen ist. Ich habe mit dergleichen Prismen so viele vergebliche

Versuche angestellt, dass schon die eine, eben erwähnte Angabe Lamansky's genügt hätte, um mich davon zu überzeugen, dass er ganz andere Erscheinungen gesehen und gemessen hat, als normale Fluorescenzspectra. Ferner hat Lamansky gar keine Angabe über die Tiefe der angewendeten fluorescirenden Flüssigkeiten gemacht, obgleich sowohl Lommel als auch ich selbst gezeigt haben, wie stark die Absorption der fluorescirenden Flüssigkeit auf die Ausdehnung der Fluorescenzspectra influirt. Wir werden später sehen, dass gerade diese Sorglosigkeit wahrscheinlich die noch zu erwähnenden Fehler der vorliegenden Arbeit verursachte. Endlich aber, und das ist das Schlimmste, sind die ganzen Versuche nur sehr ungenügend controlirbar. Während Lommel in seiner jüngsten Arbeit behufs Vergleichung seiner spectrometrischen Resultate mit der Bunsen'schen Scala die Brechungsexponenten für drei Wellenlängen (D, E, F) angibt[1], wie es sich auch eigentlich von selbst versteht, gibt Lamansky nur den einen Brechungsexponenten für D an[2] ($n_D = 1{,}6227$ für D bei $48^0\,36'$), also nur eine Constante, während die Christoffel'sche Gleichung zur Bestimmung beliebiger Indices deren bekanntlich mindestens zwei verlangt. Wenn ich also in dem Folgenden eine Kritik der Versuche Lamansky's unternehme, so kann das Numerische nur aufs Ungefähr hin besprochen werden.[3]) Die Versuche bezogen sich auf Naphthalinroth, Eosin und Fluoresceïn.

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 251. 1879.

2) Lamansky, Wied. Ann. 8. p. 626. 1879.

3) Um wenigstens eine ungefähre Controle zu gewinnen, musste ich annehmen, dass die untere Grenze des Eosinspectrums, welche Lamansky im Durchschnitt auf $47^0\,25'$ angibt, mit der sonst gefundenen (28 B.) übereinstimmt. Dann würden also, da die Linie D nach Lamansky bei $40^0\,36'$, nach Bunsen bei 50 liegt, $48^0\,36' - 47^0\,25'$ oder $71'$ entsprechend sein 50—28 oder 22^0 nach Bunsen. Es würde sich also ergeben, dass für die Mitte des Spectrums eine Minute des Spectrometers ungefähr gleich $0{,}3^0$ B. ist. Diesen Reductionsfactor habe ich denn allgemein bei meinen Vergleichungen der beiden Scalen angenommen.

1. Naphthalinroth. Alle bisherigen Forscher stimmen darin überein, dass das typische Fluorescenzspectrum durch alle Strahlen, die brechbarer sind als das Absorptionsmaximum (56 Bunsen), in seiner vollständigen Ausdehnung (57 — 28 B.) erregt wird. Ferner geben die Anhänger des Stokes'schen Gesetzes selbst an, dass, wenn das erregende Licht weniger brechbar wird als das Absorptionsmaximum, die obere Grenze des Fluorescenzspectrums allmählich und stetig von 57 B. aus gegen das rothe Ende zurückgeschoben wird. Beide Erscheinungen findet Lamansky ganz anders. Wenn das erregende Licht die Ablenkung 50° 23′ (jedenfalls bedeutend oberhalb *D*, nach meiner Schätzung etwa 80 B.) zeigt[1]), so soll die obere Grenze des Fluorescenzspectrums bei 48° 16′ liegen, also ziemlich stark unterhalb *D*; daraus würde folgen, dass der Strahl 80 B. nicht das ganze derivirte Spectrum, sondern nur einen Theil desselben erregt, was, mit den Beobachtungen anderer Forscher verglichen, jedenfalls unrichtig ist. Zweitens zeigt eine Vergleichung der fünf Beobachtungen Lamansky's über das Naphthalinroth deutlich, dass beim Herabgehen des erregenden Lichtes die obere Grenze des erregten fast dieselbe bleibt und schliesslich sogar nicht unbedeutend (bis auf 48° 28′) steigt. Die Beobachtungen über das Naphthalinroth müssen also nothwendig auf einem Irrthum beruhen.

2. Eosin (in alkoholischer Lösung). Das Eosin beginnt, wie andere Forscher übereinstimmend fanden, im reinen Spectrum erst dicht oberhalb *D* zu fluoresciren. In Lamansky's Angaben über das Eosin finden sich hingegen nicht weniger als drei Beobachtungen (die drei letzten von den sieben überhaupt angestellten), bei welchen durch erregendes Licht unterhalb *D* (nämlich mit den Ablenkungen 48° 26′, 48° 14′ und 47° 53′) auch schon ein deutliches Fluorescenzspectrum hervorgerufen

2) Vgl. Wied. Ann. 8. p. 625. 1879.

worden sein soll. Ferner ist bekannt, dass jeder Strahl oberhalb E das ganze Fluorescenzspectrum (E—28) hervorruft. Lamansky erhält aber durch erregendes Licht von der Ablenkung 50° 55′ (ungefähr aus der Gegend von F) ein derivirtes Spectrum, dessen obere Grenze, statt bei E, bei 48° 14′ also noch unterhalb D liegt. Diese Grenze bleibt bei den weiteren Beobachtungen fast dieselbe. Auch hier muss also ein Irrthum in der Beobachtung vorliegen.

3. Fluorescëin. Jeder erregende Strahl, welcher oberhalb 86 B. liegt, erzeugt bekanntlich das ganze Fluorescenzspectrum (86—28 B.). Das erregende Licht, welches Lamansky anwendet, liegt allerdings, bis auf die letzte Beobachtung, bei der es mir zweifelhaft ist, innerhalb der richtigen Erregungsgrenze (oberhalb 62 B.); dasjenige Licht aber, dessen Ablenkung 51° 14′ beträgt (ungefähr 98 B.), erregt nur ein Fluorescenzspectrum, dessen obere Grenze bei 48° 57′, also statt bei *86* B. etwa bei *57* B. liegt. Diese Grenze bleibt bei allen einzelnen Beobachtungen fast genau dieselbe.

Ich mache noch besonders darauf aufmerksam, dass, selbst wenn ich von meinen immerhin ungenauen numerischen Schätzungen ganz absehe, folgende fehlerhafte Angaben Lamansky's dennoch bestehen bleiben: 1) Es wird bei allen drei Fluorescentien durch Licht von entschieden hoher Brechbarkeit nicht das ganze Fluorescenzspectrum, sondern nur der weniger brechbare Theil desselben erregt; 2) es wird die Fluorescenz des Eosins nicht nur durch Strahlen oberhalb D, wie bekannt, sondern auch durch solche tief unter D erregt.

Die Frage, woher der erste von diesen beiden Fehlern rührt, scheint mir durch Lommel's und meine Versuche, welche, was diesen Punkt betrifft, auch von Hagenbach bestätigt worden sind, genügend beantwortet zu sein. Es ist nämlich zweifellos richtig, dass eine nur wenige Centimeter tiefe Schicht einer fluorescirenden Flüssigkeit sehr stark absorbirend auf das ausstrahlende Fluorescenzlicht

wirkt, besonders bei der Anwendung homogenen erregenden Lichtes. Dieser störende Einfluss zeigt sich einmal deutlich an der verschiedenen Färbung des Fluorescenzlichtes im fluorescirenden Spectrum[1]), vornämlich aber erstreckt er sich auf das brechbarere Ende des Spectrums, welches stark verkürzt wird.[2]) Demgemäss können nothwendiger Weise bei der Lamansky'schen Versuchsanordnung, wie es Lommel auch ganz richtig so fand[3]), die Spectra nur bis zu der Absorptionsgrenze reichen, welche infolge der Concentration und Dicke der Flüssigkeitsschicht ziemlich bedeutend unterhalb des Absorptionsmaximums liegen muss. Ich fand diese Grenze aus eigenen früheren Versuchen beim Naphthalinroth und Eosin bei etwa 45, beim Fluoresceïn bei etwa 60 B. Wir sehen denn auch in der That, dass nach Lamansky das Spectrum des Naphthalinroths schon bei 48° 16′ (etwa *44* B.), das des Eosins bei 48° 10′ (etwa *43* B.) und das des Fluoresceïns bei 48° 58′ (etwa *58* B.) abbricht. Aus diesen Gründen zweifle ich daher nicht mehr, dass der genannte erste Fehler Lamansky's einzig eine Folge seiner mangelhaften Methode ist, deren Unzulänglichkeit noch dazu in mehreren früheren Arbeiten bereits hinreichend erwähnt worden ist.

Was nun die Ursache des bei Weitem auffallenderen zweiten Fehlers betrifft, so glaube ich dieselbe auf folgende Weise angeben zu können. Es ist jedem, der über Fluorescenz gearbeitet hat, bekannt, dass sich auf dem Boden oder der Hinterwand des Gefässes, in welchem sich die

---

1) Hagenbach zeigt, dass diese Erscheinung von Lommel theoretisch nicht genügend erklärt ist. Vgl. Wied. Ann. 8. p. 380. 1879. Mir scheint sie auf die erwähnte Art, welche auch von Lommel herrührt, hinreichend einfach gedeutet zu werden.

2) So sah z. B. Hagenbach erst dann, dass das durch Natriumlicht erregte Spectrum des Naphthalinroths über *D* hinausreicht, als er von der Beobachtung einer tiefern Schicht abging und die Lösung in möglichst dünner Schicht auf eine Thonplatte tröpfelte.

3) Vgl. die sehr ausführlichen und klaren Auseinandersetzungen in Wied. Ann. 8. p. 249. 1879.

fluorescirende Flüssigkeit befindet, ein ziemlich intensiver Schein desjenigen einfallenden Lichtes zeigt, welches nicht zur Erregung der Fluorescenz verbraucht wird, welches also nur einer Gegend des Spectrums angehören kann, die unterhalb der Absorptionsgrenze der ziemlich concentrirten und dickschichtigen Flüssigkeit liegt. Dieser Schein ist natürlich desto deutlicher, und sein Spectrum stimmt desto vollkommener mit dem des erregenden Lichtes überein, je weniger das letztere in die Absorptionsgrenze hineingreift, je weniger es also überhaupt Fluorescenz erregt. Lässt man daher auf eine Eosinlösung Licht unterhalb *D* fallen, welches bekanntlich die Fluorescenz gar nicht mehr erregt, so kann man überhaupt nur dann ein scheinbares derivirtes Spectrum erhalten, wenn man das erwähnte, durch die Gefässwände zerstreute, durch die Absorption gar nicht mehr beeinflusste erregende Licht irrthümlich für Fluorescenzlicht hält. Dieses Spectrum muss dann natürlich ganz dasselbe sein, wie das des erregenden Lichtes. Eine solche Erscheinung zeigt sich nun recht frappant bei den beiden letzten Beobachtungen Lamansky's über das Eosin, sodass ich hiermit die Ursache seines zweiten Fehlers richtig gefunden zu haben glaube. Ich zweifle wenigstens daran, dass sich eine andere Erklärung wird finden lassen.

Aus dem Angeführten geht somit hervor, dass, entgegen der Meinung Lamansky's, welcher, ebenso wie E. Becquerel, seine Versuche für exact und beweisend für die allgemeine Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes erklärt, dieselben weiter nichts beweisen, als dass die Methode, welche auf der Anwendung einer tieferen fluorescirenden Flüssigkeitsschicht und total reflectirender Prismen beruht, eine unbrauchbare ist, sowie, dass man die Fehler, die durch Zerstreuung des erregenden Lichtes entstehen können, mit mehr Sorgfalt vermeiden muss, als es bei den erwähnten Versuchen geschehen ist.

Berlin, im Januar 1880.

VII. *Ueber Bewegungsnachbilder; von G. Zehfuss in Frankfurt a. M.*

Bekannt sind die Gestalt- und Farbennachbilder im menschlichen Auge. Allein es gibt auch Bewegungsnachbilder, welche von Plateau entdeckt, und auch von Oppel[1]) beschrieben worden sind. Wird dem Beschauer längere Zeit, z. B. eine Minute lang, ein unbestimmter gleichförmiger Bewegungszustand vorgeführt, so nimmt er nachher bei offenen Augen einen subjectiven Bewegungszustand des Gesichtsfeldes wahr, welcher jedoch die entgegengesetzte Richtung hat, wie der ursprünglich die Erscheinung hervorrufende. Als ich diese Erscheinung im Frühjahr 1879 bei Eisenbahnfahrten gleichfalls beobachtete, waren mir die Aufsätze von Plateau und Oppel nicht bekannt, auf welche ich erst durch die Güte des Hrn. Prof. Wiedemann aufmerksam gemacht wurde. Meine eigenen Beobachtungen führe ich trotzdem an, weil sie die Erscheinungen möglichst nackt zeigen.

Fixirt man, während man in einem Eisenbahnwagen zum Fenster hinaussieht, einen fernen Punkt am Horizont, so scheinen alle äusseren Gegenstände, z. B. Ackerfurchen, nach links vorbeizufliegen, wenn der Wagen rechts fährt. Blickt man dann nach einer Minute auf eine gegenüber befindliche hölzerne Wand im Innern des Wagens, welche horizontale Holzfasern besitzt, so scheinen sich diese in der der erregenden entgegengesetzten Richtung von links nach rechts zu verziehen. — Blickt man, immer nach rechts fahrend, etwa eine Minute lang starr unter einem Winkel von 30° unter den Horizont, etwa auf die scheinbare Mitte der nach dem Horizont hinziehenden Ackerstrecke, so werden sich die zwischen der Bahnlinie und der Mitte des Gesichtsfeldes liegenden Theil des Ackerfeldes scheinbar nach links, die darüber bis zum Horizont befindlichen nach rechts bewegen. Richtet man dann wieder den Blick auf

1) Oppel, Pogg. Ann. **99.** 1856.

die hölzerne Wand, indem man eine der horizontalen Holzfasern fixirt, so scheint sich längs dieser das ganze Brett zu theilen, indem scheinbar die obere Hälfte von links nach rechts über die untere hinweggleitet. — Heftet man den Blick auf das Centrum einer in der deutlichen Sehweite befindlichen, in etwa 32 schwarze und 32 weisse Sectoren eingetheilten Scheibe von 50 cm Durchmesser, welche sich in jeder Secunde einmal gleichförmig rechts umdreht, so scheint sie nach 1 Minute, wenn man sie plötzlich stillhält, eine rückläufige Bewegung zu machen, wenn auch nur auf kurze Zeit. — Ich füge bei, dass die scheinbare Geschwindigkeit der Bewegungsnachbilder, wenigstens anfänglich, der ursprünglichen gleich ist.

Die Erklärung dieser Nachbilder anlangend, so legt Plateau dem Auge eine Reactionsfähigkeit bei, derzufolge, wenn der dem Auge eingeprägte Zustand etwa der gestörten Gleichgewichtslage eines Pendels verglichen wird, ein Zurückfallen desselben, sogar noch über die Gleichgewichtslage hinaus, zu erwarten steht. Oppel denkt an Contrastwirkungen, an eine nicht zum Bewusstsein gelangende Vergleichung der ruhenden Fläche mit der in der Erinnerung bleibenden Bewegung, sowie auch an die Dreherscheinungen beim Schwindel. Diesen mehr dem psychischen Gebiete entnommenen Erklärungen lässt sich aber eine viel bestimmtere gegenüberstellen, welche der Erscheinung einen physiologischen Haltpunkt verleiht. Die Urtheile durch Vergleich mit äusseren Dingen lassen sich nämlich beseitigen, wenn man, nachdem der Blick eine Minute lang dem äussern Bewegungszustande ausgesetzt gewesen, die Augen schliesst, um die Nachbilder von rein physiologischer Natur zu beobachten. Wenn man die geschlossenen Augen nicht mit der Hand bedeckt, so gewahrt man im Nachbilde eine chaotische Masse von schwachen Lichtfunken, deren Bewegungsrichtung der ursprünglichen entgegengesetzt ist, also z. B. beim ersten der oben beschriebenen Experimente einen nach rechts ziehenden Funkenstrom; beim zweiten einen nach rechts ziehenden, darüber einen andern, welcher nach

links läuft; und endlich bei der Scheibe einen rückläufigen Wirbel. Die Ursache der Erscheinung haftet also in der That an der Netzhaut. Dass aber nicht, wie z. B. beim Schwindel, etwa eine Erregung des ganzen Gehirnes in Betracht kommt, sondern bestimmt nur der Zustand der durch den Anblick der Bewegung erregten Stellen der Netzhaut, lässt sich durch eine andere Beobachtung erweisen. Fixirt man, in eine Ecke des nach rechts fahrenden Eisenbahnwagens gelehnt, das gegenüberstehende, eine helle Fläche auf dunkelem Grunde darstellende Fenster, oder vielmehr, um ein recht scharfes Nachbild zu erhalten, einen festen Punkt auf der Fensterscheibe, oder in Ermangelung desselben einen solchen am Rande des Fensterrahmens; so gewahrt man nach einer Minute bei alsdann geschlossenen Augen, und ohne dieselben mit der Hand zu bedecken, zunächst ein scharfes Nachbild des Fensterrahmens und auf heller Umgebung das dunkle Nachbild der Fensterscheibe. Während nun die helle Umgebung eine völlig ruhige Fläche darstellt, findet sich dagegen das dunkle Bild des Fensters von jenem chaotischen nach rechts laufenden Funkenstrome durchzogen, der zwar die ganze Fensterfläche ausfüllt, den Rahmen aber nirgends überschreitet. Die eigenthümliche rückläufige Bewegung ist also nur der erregten Stelle der Netzhaut eigen. Natürlich würde derselbe Erfolg auch bei einer sehr kleinen Fensteröffnung eintreten, also ist jedem erregten Elemente der Netzhaut für sich der besagte Zustand eigenthümlich, und ein Bewegungsnachbild von endlicher Ausdehnung entsteht genau aus der Summe der Nachbilder der einzelnen erregten Netzhautelemente. Bei genauerer Betrachtung der Erscheinungen bemerkt man in der That, dass nur jede einzelne Elementarstelle des Nachbildes eine Tendenz zur Rückbewegung besitzt, ohne übrigens selbst von der Stelle zu kommen. Eine fortschreitende Bewegung der Nachbilder von grösseren Objecten mit bestimmten Umrissen findet nicht statt, daher zeigt sich die Erscheinung nur bei Bildern von Flächen mit vielen für das Auge

ohngefähr gleichwerthigen punktartigen Objecten, z. B. Ackergewächsen, oder wie Oppel bemerkt, beim Rheinfall. Wenn z. B. bei einer in hinlänglich zahlreiche Sectoren getheilten Scheibe die Erscheinung bei offenem Auge gleichfalls auf einen Augenblick eintritt, so glaube ich dass dabei der Blick durch besagte Tendenz von einem Radius auf den nächstvorhergehenden hinübergeleitet wird, den man dann mit dem erstern verwechselt, ähnlich wie bei der stroboskopischen Scheibe.

Eine Erörterung der für solche Wirkungen erforderlichen Vorgänge im Auge ist Sache der Physiologie, ich habe jedoch, ohne die folgenden Andeutungen als die Sache erledigend annehmen zu wollen, nachstehende Vermuthung darüber gewagt. Wenn, wie einige Physiologen angeben, der erwähnte Funkenstrom auf der thatsächlich in der Netzhaut oder deren Parallelschichten stattfindenden Blutcirculation beruht, so scheint demnach jedes einzelne Nervenstäbchen besondere Blutgefässe zu besitzen, welche, wenn das ursprüngliche Bild eines bewegten Gegenstandes auf der Netzhaut nach rechts entflieht, nach eben dieser Seite den Blutlauf hinwenden, wie ja auch beim gewöhnlichen Sehen das zersetzte Blut rasch durch frisches ersetzt wird. Durch die vorwiegende Entsendung von Blut nach der rechten Seite der Netzhautelemente entsteht aber daselbst in jedem einzelnen eine Stauung auf seiner rechten Seite, welche zu einem Rückstrome Veranlassung gibt, sobald die äussere Ursache aufhört zu wirken. Indem aber das Blut nach links zurückströmt, entstehen zufolge der specifischen Reizbarkeit der Stäbchen jene Funkenströme, die sich in die Aussenwelt als nach rechts gehende Elementarbewegungen projiciren.

Diese Erklärung lässt sich auch auf die von Oppel erwähnte Nachbewegung beim Schwindel anwenden. Dreht man sich nämlich bei geschlossenen und überdies mit den Händen bedeckten Augen etwa 5 mal nach rechts im Kreise, so scheinen sich bei alsdann geöffneten Augen die äusseren Gegenstände nach links zu bewegen. Man bemerkt jedoch,

dass sie dabei ebenfalls, wie bei oben beschriebenen Nachbildern, trotz aller Eile nicht eigentlich vom Flecke kommen, auch treten natürlich bei unveränderter Richtung der Augenaxen keine neuen Objecte in das Sehfeld. Etwaige äussere Gegenstände würden sich bei Rechtsdrehung des Beobachters, wie in oben angenommenen Fällen, scheinbar nach links bewegen, und stände also, wenn eine directe Vergleichung zwischen den obigen Phänomenen und den Bewegungen der Schwindelnachbilder zulässig wäre, für letztere gleichfalls die Richtung nach rechts zu erwarten, während sie in der That links laufen, ein Unterschied, den Oppel übersehen zu haben scheint. Die Erklärung dieser scheinbaren Anomalie ergibt sich jedoch wieder aus dem angenommenen Princip. Stehe ich, nachdem das Blut die Rotation nach rechts angenommen, plötzlich still, so strömt dasselbe infolge des Beharrungsvermögens noch eine Zeit lang weiter nach rechts, bis der aus der künstlichen Bewegung stammende Antheil seiner lebendigen Kraft durch die Widerstände der Wandungen der Blutgefässe aufgezehrt ist. Indem aber der Strom nach rechts läuft, projicire ich seine Bewegung nach aussen hin als eine nach der linken Seite gerichtete. — Wendet man bei offenen Augen rasch den Kopf nach rechts, so scheinen die äusseren Objecte eine kurze Oscillation nach rechts zu machen, weil dann das träge Blut anfänglich eine relative nach links ausführt.

VIII. *Nachtrag zu der Abhandlung über die Ströme der Gramme'schen Maschine; von O. E. Meyer und F. Auerbach.*

Hr. Prof. Herwig in Darmstadt hat uns auf einige in unserer Abhandlung[1]) enthaltene Irrthümer, welche der Berichtigung bedürfen, aufmerksam gemacht.

1) Wied. Ann. 8. p. 494. 1879.

Es beruht zunächst auf einem Missverständnisse, wenn wir geglaubt haben, dass die von Hrn. Herwig benutzte Maschine von der unsrigen wesentlich verschieden eingerichtet sei. Beide sind vielmehr einander ganz ähnlich construirt, sodass die auf p. 512 unserer Abhandlung hervorgehobene Uebereinstimmung unserer Messung mit der Herwig'schen nicht mehr auffallen kann.

Ferner sind die auf p. 511 für die Stärke des Hauptstroms und der Nebenströme angegebenen Formeln, wie man aus den auf p. 509 angeführten Kirchhoff'schen Sätzen leicht erkennt, fehlerhaft. Mit diesen Formeln wird auch die Bemerkung hinfällig, durch welche wir die Abnahme der in unseren Formeln enthaltenen Constanten a_0 und m mit wachsendem Widerstande w zu erklären versucht haben. Es bleibt jetzt nichts weiter übrig, als den Grund davon, dass die durch unsere Formeln ausgedrückten Gesetze die Beobachtungen nicht in völlig befriedigender Weise wiedergeben, in dem Umstande zu suchen, dass die Function arc tg i nicht ganz ausreichen wird, die Stärke des inducirten Magnetismus für jeden der bei unsern Versuchen erreichten Werthe der Stromstärke i darzustellen. Wir müssen indess für diesmal darauf verzichten, die Frage zu erörtern, wie die Function durch Hinzufügung von Correctionen für unseren Zweck geeigneter zu machen wäre.

Bei diesem Mangel der Theorie war es uns um so erfreulicher, ebenfalls durch die Güte des Hrn. Herwig eine schon vor der unsrigen erschienene Untersuchung von Dr. John Hopkinson[1]), durch welche alle unsere Beobachtungen bestätigt werden, kennen zu lernen. Hr. Hopkinson hat nämlich eine Siemens'sche dynamoelectrische Maschine aus der Fabrik von Gebr. Siemens in London in fast genau derselben Weise, wie wir die Gramme'sche, einer experimentellen Prüfung unterworfen und ist in allen Punkten zu wesentlich gleichen Ergeb-

1) On electric lighting. First paper. Proceedings of the meeting of the institution of mechanical engineers, in London, 25th April 1879.

nissen gelangt. Besonders augenfällig tritt die Uebereinstimmung seiner und unserer Beobachtungen in den Versuchen hervor, aus denen das Gesetz bestimmt worden ist, nach welchem die Stromstärke von der Grösse des eingeschalteten Widerstandes abhängt; in beiden Abhandlungen ist dieses Gesetz durch eine Curve[1]) veranschaulicht, deren Ordinate die Stromstärke darstellt, während ihre Abscisse dem Widerstande gleich ist; beide Curven verlaufen bei geringem Werthe des Widerstandes mit concaver Krümmung gegen die Abscissenaxe, fallen plötzlich bei einem Werthe des Widerstandes von 5 oder 6 Einheiten steil nach dieser Axe ab, um endlich nach einem Wechsel der Krümmung sich ihr asymptotisch anzuschliessen. Diese Uebereinstimmung, welche auch in anderen Hinsichten ähnlich hervortritt, führt zu der Ueberzeugung, dass die Vorgänge der Induction und der Magnetisirung in beiden Arten von Maschinen in wesentlich gleicher Weise verlaufen.

Schreitet man zu einer genauern numerischen Vergleichung, indem man beide Versuchsreihen auf dieselben Einheiten reducirt, so findet man freilich ein deutlich abweichendes Verhalten der beiden Maschinen. Werden beide mit gleicher Geschwindigkeit in Umdrehung versetzt, so liefert Hopkinson's Siemens'sche Maschine einen stärkern Strom als unsere Gramme'sche, wenn der eingeschaltete Widerstand gering ist; wird dagegen der Widerstand auf mehr als etwa 4 Einheiten vergrössert, so ist bei gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit die Gramme'sche der Siemens'schen überlegen. Jedoch werden wir in dieser Verschiedenheit keinen allgemein gültigen, im Principe begründeten Unterschied der Siemens'schen und der Gramme'schen Bauart erblicken dürfen; denn dieselbe findet ihre einfache Erklärung in dem Umstande, dass der Leitungswiderstand im Innern der Maschine bei unserer grösser als bei Hopkinson's Maschine ist; dadurch wird

---

1) In Hopkinson's Abhandlung, Fig. 5, Taf. 29, in der unseren Fig. 4 Taf. IV. Bd. 8.

die erstere geeigneter, äussern Widerstand zu überwinden, während andererseits bei geringem äussern Widerstande der Nachtheil entsteht, dass durch den grössern innern Widerstand der entstehende Strom geschwächt wird.

Die Vergleichung der Hopkinson'schen Versuche mit den unseren kann daher freilich nicht zu der Beantwortung der Frage führen, ob die Siemens'sche oder die Gramme'sche Maschine den Vorzug verdiene, einer Frage, welche, so allgemein gestellt, gar keinen Sinn hat; aber es wird doch das, was wir über die Verschiedenheit im Verhalten beider angeführt haben, ausreichen, um das Urtheil zu entscheiden, für welche Zwecke die von der einen oder der andern Fabrik bezogenen Maschinen besser geeignet sind; und zwar gilt dies, da Hopkinson's Maschine vermuthlich ebenso wie unsere zu der kleinsten Art der von der Fabrik gelieferten gehören wird, namentlich von den in einem physikalischen Kabinet vorkommenden Anwendungen derartiger Maschinen.

Um ein vollständiges Urtheil über Vorzüge und Nachtheile beider Maschinen zu gewinnen, wäre noch nöthig, den Kraftverbrauch beider zu kennen. Wir haben jedoch denselben nicht gemessen, während die Maschine electrische Arbeit leistete, sondern nur durch einen besondern Versuch mit dem Prony'schen Zaume bestimmt, dass die Arbeit, welche unsere Dampfmaschine zu verrichten vermag, reichlich zwei Pferdekraft beträgt. Die Unsicherheit dieser Methode erlaubt uns nicht mit Sicherheit zu sagen, welche der beiden Maschinen mehr Energie verbraucht; aber wir dürfen doch aus der Vergleichung mit Hopkinson's Zahlen den Schluss ziehen, dass bei Versuchen, welche in so kleinem Massstabe ausgeführt werden, der Kraftverbrauch beider Maschinen nicht erheblich verschieden sein kann.

Schliesslich erlauben wir uns, Hrn. Prof. Herwig hier öffentlich unsern wärmsten Dank für alle seine freundlichen Mittheilungen auszusprechen.

IX. *Berichtigung; von O. Grotrian.*

Bei der Zusammenstellung der Temperaturcoëfficienten $\left(\frac{df}{dt}\right)_{22}\frac{1}{f_{18}}$ und $\left(\frac{dk}{dt}\right)_{22}\frac{1}{k_{18}}$ für Fluidität und Leitungsvermögen, welche ich in meiner letzten Abhandlung[1]) gegeben habe, ist ein Irrthum begangen worden, den ich hiermit zu corrigiren wünsche. Die für Essigsäure p. 550 gegebene Zusammenstellung der Temperaturcoëfficienten ist nämlich unrichtig. Denn ich ersehe nachträglich aus dem Referate über Wijkander's Arbeit[2]), die mir im Original nicht zugänglich ist, dass die dort mitgetheilten Procentzahlen nicht, wie ich annahm, Procente an $C_2H_4O_2$, sondern an Wasser bedeuten. Da Wijkander's Beobachtungen sich auf Lösungen von 2,1 bis 27,7 Proc. Wasser, d. h. von 97,9 bis 72,3 Proc. Essigsäure beziehen, so ist für dieselben eine Zusammenstellung ihrer Temperaturcoëfficienten mit den entsprechenden des Leitungsvermögens nicht ausführbar. Denn die stärkste Essigsäurelösung, für welche durch die Versuche von F. Kohlrausch der Temperaturcoëfficient des Leitungsvermögens ermittelt wurde, ist eine 76,4 procentige.[3])

Es ist daher die von mir p. 552—553 gemachte Angabe über die Zahl der im Verlaufe übereinstimmenden Coëfficienten dahin zu modificiren, dass im ganzen 88 (statt 95) Coëfficienten der Fluidität vorliegen, von denen 77 (statt 84) im Verlaufe übereinstimmen. Die Anzahl der Fälle, in denen sich eine besonders auffällige Uebereinstimmung im Verlaufe ergeben hat, bleibt unverändert gleich 18.

Aachen, Februar 1880.

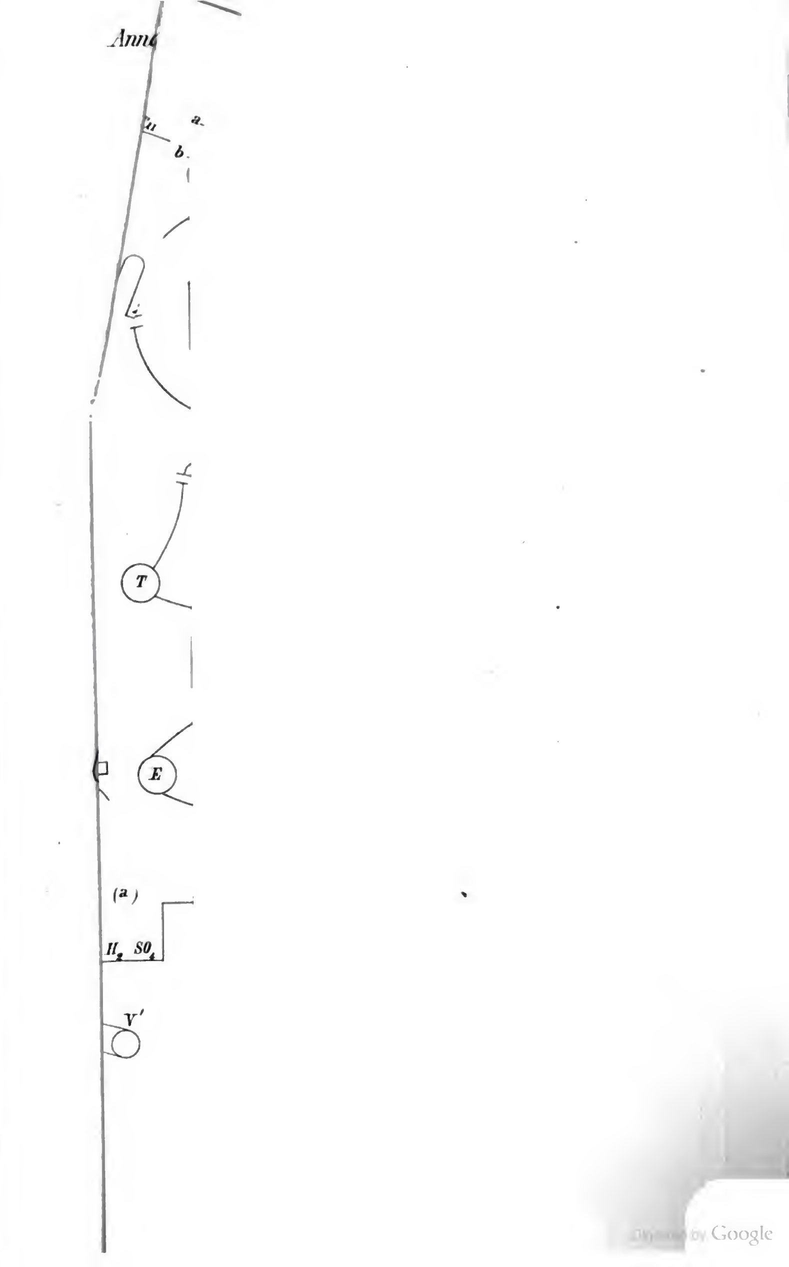
1) Grotrian, Wied. Ann. **8.** p. 529. 1879.
2) Wijkander, Beibl. **3.** p. 8. 1879.
3) Kohlrausch, Pogg. Ann. **159.** p. 245. 1876.

Berichtigungen.

Bd. IX. p. 283 Z. 9 v. u. statt „Clausius'" lies „Weber's".

p. 286 Z. 9 v. u. statt „$=0$" lies „$= -k h ds i'' \frac{\partial \varsigma_1}{\partial t} \mathfrak{z}_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r^3}$".

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



Ann
a
b
T
E
(a)
H2 SO4
V'



